

exaccer

Temas fundamentales y bibliografía



Contenido

Temas fundamentales y bibliografía	3
1. Matemáticas.....	3
Bibliografía sugerida.....	82
2. Humanidades.....	84
Bibliografía sugerida.....	94
Ciencias Experimentales.....	97
3. Biología	97
Bibliografía sugerida.....	111
4. Geografía	112
Bibliografía sugerida.....	121
Fuentes electrónicas.....	121
5. Química.....	122
Bibliografía sugerida.....	133
6. Física	134
Bibliografía sugerida.....	144
7. Comunicación	145
Bibliografía sugerida.....	165
8. Lengua adicional al español – Inglés	167
Bibliografía sugerida.....	171
9. Ciencias Sociales	172
Bibliografía sugerida.....	190
10. Introducción al Trabajo	192
Bibliografía sugerida.....	197
11. Recursos Humanos	199
Bibliografía sugerida.....	212
12. Contabilidad	213
Bibliografía sugerida.....	230
13. Informática	232
Bibliografía sugerida.....	250
14. Turismo.....	253
Bibliografía sugerida.....	263

Temas fundamentales y bibliografía

A continuación, se presentan los temas y subtemas de cada una de las áreas y ejes modulares, éstos recuperan la elaboración de las preguntas que contendrán las evaluaciones parciales.

También se sugiere la bibliografía que se puede consultar y que le ayudará a prepararse para presentar la Certificación por Evaluaciones Parciales.

1. Matemáticas

1.1 Concepto y uso de los números

A lo largo del tiempo, la humanidad ha enfrentado y resuelto problemas de su vida cotidiana, desde actividades simples como contar animales y medir terrenos, hasta los problemas más complejos en contextos científicos y tecnológicos modernos. Estas necesidades han impulsado el desarrollo de soluciones innovadoras, herramientas tecnológicas y avances científicos, transformado la manera en la que se interactúa con el entorno.

Muchas civilizaciones antiguas desarrollaron sus propios *sistemas de numeración*, cada uno caracterizado por su simbología única y sus métodos distintivos para representar *números*. Estos sistemas reflejaban, en esencia, las necesidades prácticas en la medición, el comercio y la astronomía. Por ejemplo: los antiguos egipcios utilizaban un sistema decimal, pero con símbolos diferentes para cada potencia de diez; los babilonios utilizaban un sistema de base 60 (sexagesimal); los mayas desarrollaron un sistema vigesimal (base 20) que utilizaba puntos y barras, además fue una de las primeras civilizaciones en reconocer el concepto de cero.

Los *números* son los elementos de dichos sistemas, estos son aquellas asociaciones o cantidades constituidas a partir de unidades, donde una unidad, a su vez, es aquello que permite identificar y cuantificar elementos, donde cada objeto o concepto, al ser considerado único o singular, es llamado “uno”. Esta base permite construir y entender conceptos más complejos dentro de las matemáticas, desde números enteros hasta sistemas más abstractos como los números reales (\mathbb{R}) o complejos (\mathbb{C}). Desde el siglo XVIII, se utilizan las siguientes agrupaciones (o *conjuntos*) de números:

- Naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$,
- Enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- Racionales $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0 \right\}$,
- Irracionales $\mathbb{I} = \left\{ z \mid z \neq \frac{p}{q} \text{ para algún } p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0 \right\}$,
- Reales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$,
- Complejos $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ y } i = \sqrt{-1}\}$.

Los números reales se pueden ubicar en la *recta numérica* (Ver *Ilustración 1*). Un número $x \in \mathbb{R}$ es *positivo* si $x \in (0, \infty)$, se escribe $x > 0$ (x mayor que 0), estos números se encuentran a la derecha del cero. Por el contrario, un número $x \in \mathbb{R}$ es *negativo* si $x \in (-\infty, 0)$, se escribe $x < 0$ (x menor que 0), estos números se encuentran a la izquierda del cero.

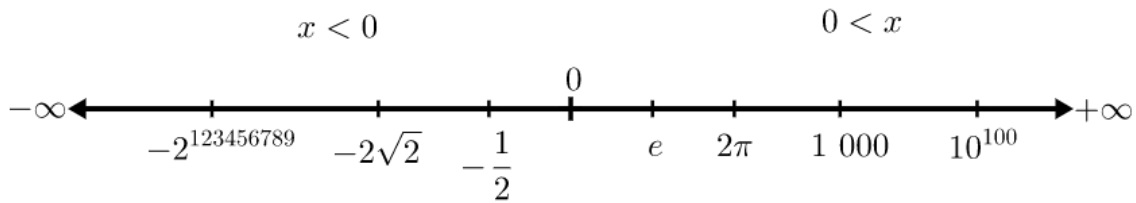


Ilustración 1. Recta numérica, también conocida como *recta real*. El número *Gúgol* es igual a 10^{100} , es uno de los números más grandes que se conocen, se compone de un *uno* seguido de cien *ceros*.

Se dice que los conjuntos de números reales (y complejos) son un *campo*, es decir, para $a, b \in \mathbb{R}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

- Ley asociativa de la adición: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- Existencia de un elemento neutro para la adición: $a + 0 = 0 + a = a$.
- Existencia de inversos aditivos: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- Ley conmutativa de la adición: $a + b = b + a$.
- Ley asociativa de la multiplicación: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- Existencia de un elemento neutro para la multiplicación: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, siendo $1 \neq 0$.
- Existencia de inversos multiplicativos: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, para $a \neq 0$.
- Ley conmutativa de la multiplicación: $a \cdot b = b \cdot a$.
- Ley distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Por ejemplo.

- Asociatividad de la adición:

$$8 + (1 + 3) = (8 + 1) + 3 = 12.$$

- Elemento neutro para la adición:

$$\frac{\pi}{2} + 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

- Inverso aditivo:

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0.$$

- Conmutatividad de la adición:

$$500 + (-49) = (-49) + 500 = 451.$$

- Asociatividad de la multiplicación:

$$7 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right) = (7 \cdot 2) \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3}.$$

- Elemento neutro para la multiplicación:

$$200 \cdot 1 = 1 \cdot 200 = 200.$$

- Inverso multiplicativo:

$$8.55 \cdot 8.55^{-1} = 8.55^{-1} \cdot 8.55 = 1,$$

donde $8.55^{-1} = \frac{1}{8.55}$.

- Conmutatividad de la multiplicación:

$$\sqrt{2} \cdot 4 = 4 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

- Ley distributiva:

$$2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = (2 \cdot 1) + \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 3.$$

Otras propiedades que tienen los números son aquellas que se presentan cuando se operan con exponentes o como fracciones. Considere $x, y, a, b \in \mathbb{R}$:

Nombre	Ecuación		
Leyes de los signos	$(+)(+) = (-)(-) = (+)$ $(+)(-) = (-)(+) = (-)$		
Leyes de los exponentes	Si $x \neq 0$, $x^0 = 1$	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$	$x^a \cdot x^{\pm b} = x^{a \pm b}$
	$x^1 = x$	$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^b$	$\sqrt[b]{x^a} = \frac{x^a}{x^b}$ $= (\sqrt[b]{x})^a$
	Si $a \in \mathbb{N} - \{0\}$, $x^a = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{a\text{-veces}}$ $x^{-b} = \frac{1}{x^b}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$	
Reglas para fracciones	$\frac{x}{y} \pm \frac{a}{b} = \frac{(x \cdot b) \pm (y \cdot a)}{y \cdot b}$	$\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b} = \frac{x \cdot a}{y \cdot b}$	$\frac{x}{y} \div \frac{a}{b} = \frac{x \cdot b}{y \cdot a}$
	Si $y = b$, $\frac{x}{y} \pm \frac{a}{y} = \frac{x \pm a}{y}$		

Tabla 1. Ecuaciones algebraicas más comunes.

Considere los siguientes ejemplos.

- Leyes de los signos
 - El producto de los números 8 y -2 da como resultado -16 .
 - Además, $(8) \times (-2) = (-2) \times (8)$.
 - El producto de los números -1 y -3 da 3 (positivo).
- Leyes de los exponentes
 - $(2^2)^3 = 4^3 = 64 = 2^6 = 2^{2 \cdot 3}$.
 - $\sqrt[3]{3^2} = 3^{2/3} = (\sqrt[3]{3})^2 \approx 2.08$.
 - $5^2 \cdot 25^3 = 5^2 \cdot (5 \cdot 5)^3 = 5^2 \cdot (5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^{2 \cdot 3} = 5^{2+(2 \cdot 3)} = 5^8$.
- Reglas para fracciones
 - $\frac{3}{8} + \frac{9}{4} = \frac{(3 \cdot 4) + (9 \cdot 8)}{8 \cdot 4} = \frac{12 + 72}{32} = \frac{84}{32}$, simplificando $\frac{3}{8} + \frac{9}{4} = \frac{84}{32} = \frac{2}{2} \cdot \frac{42}{16} = \frac{2}{2} \cdot \frac{21}{8} = \frac{21}{8}$.
 - $\frac{1}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$.

1.2 Álgebra básica

El álgebra utiliza *números* y *variables* (o *incógnitas*) para representar un hecho matemático (tal como una relación de igualdad o desigualdad), un objeto geométrico, una gráfica, etc. Cuando se hace referencia a un *número cualquiera*, este se representa con un símbolo arbitrario, generalmente se utiliza la equis minúscula (x), a menos que se demande lo contrario, o sea una cantidad con un nombre preestablecido, por ejemplo: tiempo (t), temperatura (T), área (A), volumen (V), etc.

Una *expresión algebraica* es aquella que se puede escribir con simbología matemática; variables, por mencionar algunas, $x, y, z, t, \alpha, \theta$ y ϕ ; números reales, como $\pi, 0, -\sqrt{2}, 15, -\frac{3}{2}y - 8$; y operaciones como la suma (+), resta (-), multiplicación (\times) o división (\div). Las expresiones están compuestas de uno o más *términos algebraicos*, los cuales son el producto de un número real con una o más variables y se clasifican en función de la cantidad de términos que tengan (Ver **Tabla 2.**).

Las *variables* son aquellos elementos abstractos que representan valores desconocidos, indeterminados o generalizados. Estos valores pueden variar según el contexto y se expresan mediante símbolos. Además, las variables pueden tener un *exponente*, cuyo valor se conoce como *grado*, el cual indica la magnitud de su potencia.

Por ejemplo, el monomio $5x^2$ tiene exponente 2, pues la variable x está elevada a la segunda potencia (o al cuadrado); por otro lado, el monomio $2t$ tiene su exponente igual a 1, entonces el monomio es de grado 1. En caso de binomios, trinomios, etcétera, se dice que el *grado de la expresión algebraica* es el grado del término con el exponente mayor. Por ejemplo, el trinomio $t^2 + 10t - 8$ tiene grado 2, pues el primer término (t^2) tiene la variable con su exponente igual a 2, el segundo término ($10t$) tiene exponente 1 y el tercer término (-8) no tiene variable.

Nombre	Cantidad de términos algebraicos	Ejemplos
<i>Monomios</i>	uno	$2\theta, x^2, 6by^3, -cz^2y$
<i>Binomios</i>	dos	$4a - bz, 8x^2 + yz$
<i>Trinomios</i>	tres	$ct^2 - at + 6b, z^3 - \sqrt{2}z^2 + \pi z$
⋮	⋮	⋮
<i>Polinomios</i>	n	$3 + 2x^2 + z^3 + xy - y^4$

Tabla 2. Un polinomio puede estar formado por un monomio o tener más términos.

Considerando las propiedades mencionadas anteriormente, es posible simplificar los términos de las expresiones algebraicas, siempre y cuando tengan *términos en común*, es decir, que existan términos que tengan la misma variable elevada a la misma potencia (o con el mismo grado).

Por ejemplo, las expresiones $x^2 - 8y^3$ y $y^2 - x^2 - 3y^3$ tienen dos términos en común, uno con la variable x^2 y otro con la variable y^3 , entonces:

- $(x^2 - 8y^3) + (y^2 - x^2 - 3y^3) = -11y^3 + y^2,$
- $(x^2 - 8y^3) - (y^2 - x^2 - 3y^3) = -5y^3 + 2x^2 - y^2,$
- $(y^2 - x^2 - 3y^3) - (x^2 - 8y^3) = 5y^3 - 2x^2 + y^2.$

Note que las últimas dos expresiones tienen signos opuestos, esto se cumple para cualesquiera dos números reales a y b : $a - b = -(b - a)$, esto es $a - b$ es el inverso aditivo de $b - a$.

1.3 Lenguaje algebraico

El *lenguaje algebraico* es aquel que se emplea para modelar aquellas situaciones o problemas de interés en ecuaciones matemáticas. Para ello, se usan símbolos con diferentes significados algebraicos, entre ellos, números, incógnitas, operaciones, etc. Su uso permite traducir enunciados coloquiales a expresiones algebraicas y viceversa. En la **Tabla 3** se muestran algunas de las frases coloquiales que pueden traducirse en expresiones matemáticas para la suma, resta, multiplicación, división, exponentes y equivalencias y desigualdades.

Operación	Frase coloquial	Expresión matemática
Suma	La suma de dos números	$a + b$ o $x + y$
	Nueve unidades más un número	$9 + x$
	Un número aumentado tres unidades	$a + 3$
Resta	La diferencia entre dos números	$x - y$
	Cinco unidades reducidas por un número	$5 - x$
	Un número reducido seis unidades	$y - 6$
Multiplicación	El doble producto de dos números	$a \cdot b$
	El doble producto de un número	$2a$
	El producto de tres unidades con un número	$3b$
División	El cociente entre dos números	a/b
	La tercera parte de un número	$\frac{1}{3}x$
	Ocho unidades divididas entre un número	$8/b$
Exponentes	El cuadrado de un número	x^2
	Un número a la tercera potencia	a^3
	Veinte unidades elevadas a la potencia x	20^y
Equivalencias y Desigualdades	Un número es equivalente a otro número	$y = b$
	Ocho unidades corresponden a un número	$8 = x$
	Siete es mayor o igual a algún número	$7 \geq a$
	Dos unidades menores o iguales a la suma de dos números	$2 \leq a + b$
	Cuatro unidades son menores a un número	$4 < y$

Tabla 3. Traducciones más comunes para las principales operaciones. El objetivo de la tabla es exponer casos particulares que sirvan de referencia para practicar, el lector no debe dejarse llevar por las palabras exactas que aparecen en la misma, pues pueden existir otras frases o palabras no mostradas o estar escritas en un contexto específico de la vida diaria. Además, es necesario considerar las posibles combinaciones entre estas frases para representar expresiones o ecuaciones más complejas.

1.4 Patrones numéricos

1.4.1 Series y sucesiones de números reales

Una *sucesión* es un conjunto de números definidos a partir de una regla de correspondencia, esto es, para todo número natural n se define el *n -ésimo término de la sucesión* como $a(n) = a_n$. Para abreviar, se utiliza la notación $\{a_n\}$, la cual representa:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots\}.$$

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales, entonces: si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que $\{a_n\}$ es *creciente*; si se cumple que $b_n \geq b_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{b_n\}$ es *decreciente*.

- Los números *pares* son una sucesión creciente dada por la regla de correspondencia $n \rightarrow p_n = 2n$, donde la sucesión es $p_0 = 2(0) = 0$, $p_1 = 2(1) = 2$, $p_2 = 2(2) = 4$, $p_3 = 2(3) = 6$, etc.
- El conjunto de números *impares* es $\{i_n\} = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ y también puede obtenerse por medio de una sucesión dada por la regla de correspondencia $n \rightarrow i_n = 2n + 1$. Por ejemplo, el término 1 012 es $i_{1\ 012} = 2(1\ 012) + 1 = 2\ 025$.
- La sucesión más conocida es la de *Fibonacci* que, históricamente, se considera la solución a un problema de contar conejos. El primer término es $F_0 = 0$, el siguiente es $F_1 = 1$ y el $(n + 1)$ -ésimo es $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, para todo $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, esto es, los siguientes términos de la sucesión de Fibonacci están dados por la suma de los dos anteriores. Además, esta sucesión es creciente, pues $F_{n+1} > F_n > F_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. La sucesión empieza con los números:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, 4 181, 6 765, 10 946, ...

1.4.2 Progresiones numéricas

Una sucesión de números $\{\alpha_n\}$ tal que cada término se obtiene multiplicando el término anterior a él por una *razón dada* r (o *factor de progresión*) se conoce como *progresión geométrica*. Conociendo el primer término α_1 y la razón r se puede calcular el n -ésimo término mediante la fórmula

$$\alpha_n = \alpha_1 \cdot r^{n-1}$$

y la suma de los primeros n términos está dada por

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k = \alpha_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Por otro lado, una sucesión de números $\{a_n\}$ tal que la diferencia entre cualesquiera dos términos sucesivos es constante se conoce como *progresión aritmética*, esto es $a_{n-1} - a_n = d$. A la cantidad constante se le conoce como *diferencia de la progresión* o *distancia* y se denota con la letra d . Dado el primer término y la distancia d , el n -ésimo término de la sucesión es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

y la suma de los primeros n términos de la progresión está dada por

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n.$$

Por ejemplo.

- El proceso de *división celular* puede representarse matemáticamente como una progresión geométrica. En efecto, al inicio hay una célula ($a_1 = 1$); después de que se lleva a cabo el proceso de división celular hay dos células ($a_2 = 2$), conocidas como *células hijas*; cada una de estas células hijas se vuelve a dividir, entonces hay 4 células hijas ($a_3 = 4$); y así sucesivamente. La razón de la progresión es $r = 2$, pues cada célula se divide en dos. Así, la n -ésima división dará como resultado

$$a_{n+1} = a_1 \cdot r^{n+1-1} = 1 \cdot 2^n = 2^n$$

células hijas.

- Una deuda puede representarse matemáticamente como una progresión aritmética. En el primer mes, se cuenta, por ejemplo, con \$10,000 de deuda ($a_1 = \$10,000$); al segundo mes se abona el pago de \$200 ($d = -\200), entonces la deuda asciende a \$9,800 ($a_2 = \$9,800$); de esta forma, mes con mes disminuye la deuda. Para saber cuántos meses durará la deuda (valor de n), se considera $a_n = 0$, entonces $0 = a_1 + (n - 1) \cdot d$, es decir, en

$$n = 1 - \frac{a_1}{d} = 1 - \frac{\$10,000}{-\$200} = 51$$

meses se terminará de pagar la deuda.

1.5 Variaciones proporcionales y lineales

1.5.1 Propiedades y uso en la resolución de problemas

Una *magnitud* es aquella propiedad que se puede medir numéricamente, los ejemplos más comunes son los *gramos* (g, representan la cantidad de materia), los *metros* (m, representan la longitud), los *segundos* (s, representan el tiempo), *grados centígrados* ($^{\circ}$ C, representan la temperatura), etc. Otros ejemplos poco conocidos que son usados en cantidades físicas con las que se conviven día a día son: *Amperios* (A, corriente eléctrica), *Watts* (W, potencia), *Hertz* (Hz, frecuencia de una onda electromagnética), *calorías* (Cal, energía que los alimentos proporcionan), etc.

La *razón geométrica* entre dos magnitudes se define como el cociente de estas, se expresa como un número racional (en fracción): la razón entre la cantidad p y una cantidad q es $\frac{p}{q}$ (o $p:q$). Hay muchas razones que se encuentra en la vida cotidiana, por ejemplo: la *velocidad*, es la distancia recorrida por cada segundo que pasa ($v = d/t$); la *densidad de materia* es la cantidad de materia por cada unidad de volumen de un material o un fluido ($\rho = m/V$). Al numerador de la fracción se le llama *antecedente* y al denominador se le conoce *consecuente* y se lee p es a q . Una *proporción* es la equivalencia entre dos razones, es decir, si $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ son dos razones, la proporción entre ellas es

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s},$$

se lee p es a q como r es a s .

Dos cantidades pueden ser directa o inversamente proporcionales, como se describe a continuación.

- Se dice que dos magnitudes son *directamente proporcionales* cuando, si una aumenta, la otra también lo hace, ambas aumentan de forma proporcional. Si x es directamente proporcional a y , entonces

$$x = k \cdot y$$

con $k = \frac{x}{y}$ es la constante de proporcionalidad, dicha relación suele denotarse como $x \propto y$.

Por otro lado, dos razones $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ son *directamente proporcionales* si

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s'}$$

más aún, al aplicar una operación a alguna de estas razones (multiplicación o división), la otra se verá afectada de la misma manera. Para la resolución de problemas se procede a identificar la constante de proporcionalidad de cada una de las razones involucradas que, por ser directamente proporcionales, serán iguales.

- Por ejemplo, si una receta para preparar mole dice que 450 g de pasta rinden para 1 500 mL de agua, ¿cuánta agua se necesita para 100 g de pasta?

Primero, se hace referencia a la cantidad de agua por cada gramo de pasta para mole, sus unidades son $\frac{\text{mL}}{\text{g}}$. Entonces, las dos razones que son proporcionales son $\frac{1\,500\text{ mL}}{450\text{ g}}$ y $\frac{x\text{ mL}}{100\text{ g}}$, es decir

$$\frac{1\,500\text{ mL}}{450\text{ g}} = \frac{x\text{ mL}}{100\text{ g}}$$

El resultado se obtiene multiplicando por ambos lados de la ecuación por los 100 g, esto es: si

$$\frac{1\,500\text{ mL}}{450\text{ g}} = \frac{x\text{ mL}}{100\text{ g}} \Rightarrow \frac{(1\,500\text{ mL}) \cdot (100\text{ g})}{450\text{ g}} = \frac{(x\text{ mL}) \cdot (100\text{ g})}{100\text{ g}}$$

por lo tanto,

$$x = \frac{(1\,500\text{ mL}) \cdot (100\text{ g})}{(450\text{ g})} = 333.\bar{3}\text{ mL}$$

En conclusión, si 450 g de pasta para mole rinden para 1 500 mL de agua, entonces 100 g de pasta rinden para 333.3 mL de agua.

- Si dos magnitudes son *inversamente proporcionales*, una aumenta mientras la otra disminuye de forma proporcional. Si y es inversamente proporcional a x , entonces $y = \frac{k}{x}$, donde $k = y \cdot x$ es su constante de proporcionalidad inversa.

Dos o más valores de dos magnitudes inversamente proporcionales mantienen la constante de proporcionalidad, esto es, si x y y son magnitudes inversamente proporcionales y además a y b también lo son, se cumple que $x \cdot y = k$ y $a \cdot b = k$, por lo que

$$x \cdot y = a \cdot b$$

- Por ejemplo, 20 mapaches (*Procyon*) consumen un costal de alimento en 10 días, ¿cuánto se tardarán 40 mapaches en consumir un costal de alimento? Las magnitudes inversamente proporcionales son los mapaches y los días que tardan en consumir un costal de comida. Primero, $(20\text{ mapaches}) \cdot (10\text{ días}) = k$ y $(40\text{ mapaches}) \cdot (x\text{ días}) = k$, entonces igualando las ecuaciones y dividiendo de ambos lados de la ecuación por 40, se obtiene el resultado

$$\begin{aligned} (20\text{ mapaches}) \cdot (10\text{ días}) &= (40\text{ mapaches}) \cdot (x\text{ días}) \\ &\Rightarrow \\ \frac{(20\text{ mapaches}) \cdot (10\text{ días})}{(40\text{ mapaches})} &= \frac{(40\text{ mapaches}) \cdot (x\text{ días})}{(40\text{ mapaches})} \end{aligned}$$

simplificando

$$x = \frac{(20\text{ mapaches}) \cdot (10\text{ días})}{40\text{ mapaches}} = 5\text{ días}$$

En conclusión, si 20 mapaches consumen todo su alimento en 10 días, 40 mapaches lo harán en 5 días.

La regla de tres nace a partir de las relaciones de proporcionalidad entre las razones y resulta ser una técnica muy práctica para la resolución de problemas.

- En una situación que involucre dos razones que son directamente proporcionales se tienen dos magnitudes proporcionales p y r , junto con una tercera magnitud q la cual es proporcional a la incógnita, directamente:

$$\begin{aligned}x &= (\text{razón de magnitudes directamente proporcionales}) \cdot (\text{magnitud proporcional a } x) \\ &= \frac{p}{r} \cdot q.\end{aligned}$$

- En el ejemplo (y en la vida real), si se aumenta (disminuye) la cantidad de pasta para mole, se debe de aumentar (disminuir) la cantidad de agua, por lo tanto, las magnitudes directamente proporcionales son 1 500 mL y los 400 g. La tercera magnitud es la cantidad de pasta con la que se cuenta, 100 g; además, se desea conocer la cantidad de agua para que se cumpla la razón de proporcionalidad directa.
- En una situación que involucre cuatro magnitudes que son inversamente proporcionales dos a dos: a inversamente proporcional a b y x inversamente proporcional a y se puede escribir

$$\begin{aligned}x &= \frac{\text{producto de magnitudes inversamente proporcionales}}{\text{magnitud inversamente proporcional a } x} \\ &= \frac{a \cdot b}{y}.\end{aligned}$$

- En el ejemplo, las cantidades que son inversamente proporcionales es el número de mapaches (20) y la cantidad de días en las que consumen su alimento (10): si se aumenta (disminuye) la cantidad de mapaches, los días que tarden en consumir su alimento disminuirá (aumentará). Se pregunta por una cantidad que sea inversamente proporcional a una tercera dada (40 mapaches).

1.5.2 Representación geométrica y uso en la resolución de problemas

La manera de visualizar la proporción entre dos magnitudes es por medio del gráfico de una línea recta (Ver sección 1.19 en página 35 y la Ilustración 28). A x se le conoce como *variable independiente*, mientras que a y se le conoce como *variable dependiente*.

- **Variación proporcional.** La línea recta para por el origen de coordenadas ($b = 0$) y la constante de proporcionalidad es m .
 - Por ejemplo, algunos atletas necesitan consumir al día 1.5 g de proteína por cada kilogramo de peso corporal (matemáticamente se escribe $1.5 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$). La variación proporcional está dada por el consumo de proteína total (como variable dependiente), el peso de las personas (como variable independiente) y la constante de proporcionalidad $m = 1.5 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$.

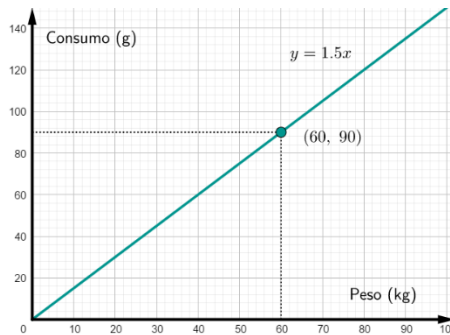


Ilustración 2. La relación de correspondencia está dada por el producto de las calorías a consumir (por cada kg de peso) y el peso de las personas (medido en kg). El punto representa el caso de una persona con 60 kg, esta tiene que consumir 90 g de proteína al día.

- **Variación lineal.** Ocurre cuando la recta no pasa por el origen de coordenadas ($b \neq 0$).
 - Por ejemplo, los grados Kelvin y los grados Celsius siguen una relación de tipo lineal, pues la forma de convertir $^{\circ}\text{C}$ a $^{\circ}\text{K}$ es por medio de la ecuación
$$K = C + 273.15,$$
la constante de proporcionalidad es $m = 1$ y el desplazamiento es $b = 273.15$.

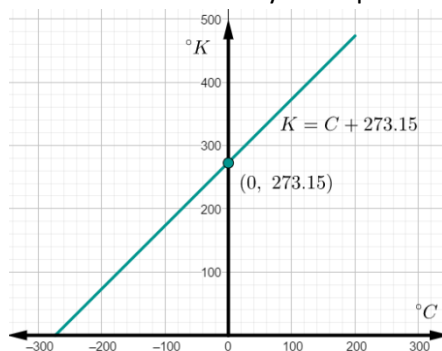


Ilustración 3. La relación de correspondencia está dada por la fórmula de conversión de grados Celsius a grados Kelvin. El punto muestra la temperatura de congelamiento del agua, a 0°C o equivalentemente a 273.15°K . Esta relación lineal representa la conversión de unidades $^{\circ}\text{C}$ a $^{\circ}\text{K}$, la conversión inversa, que convierte $^{\circ}\text{K}$ a $^{\circ}\text{C}$ está dada por $C = K - 273.15$.

1.6 Procedimientos algebraicos

En el álgebra y la aritmética, la multiplicación juega un papel importante para el tratamiento de expresiones algebraicas: ayuda a desarrollarlas (o expandirlas); y de forma inversa, reducirlas o escribirlas con menos términos.

Los *productos notables* son aquellas combinaciones de términos que suelen repetirse ocasionalmente al escribir un polinomio. A continuación, se presentan algunos de ellos. Considere $x, y, a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Descripción	Ecuación
Cuadrado de una suma o diferencia	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Binomios conjugados	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
Producto de dos binomios que tienen un término no común	$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
Producto de dos binomios con un término semejante y el otro no común	$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$
Cubo de la suma o diferencia de un binomio	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
Factores cuyo producto da una suma o diferencia de cubos	$(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$
Productos de dos binomios que no tienen un término común	$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Tabla 4. Cada una de estas reglas puede aplicarse en cualquier sentido, es decir, para desarrollar o para factorizar una expresión.

Los productos notables son útiles en el tratamiento de las expresiones algebraicas o polinomios, siempre que se utilicen adecuadamente las *propiedades de los números reales* \mathbb{R} (Pág. 3).

Primero, para expandir expresiones algebraicas es necesario usar la multiplicación de polinomios, la cual se lleva a cabo término a término; o los productos notables, que son una forma simplificada y rápida de llegar al resultado; la herramienta más útil para expresiones de la forma $(a + b)^n$ es el *Teorema del binomio*.

Teorema (Teorema del Binomio). Si a y b son dos números cualesquiera y n es un número natural, entonces

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot a^{n-j} \cdot b^j. \end{aligned}$$

Donde $\binom{n}{j}$ el *coeficiente binomial* para $n, j \in \mathbb{N}$ y $0 \leq j \leq n$ se define como

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j! \cdot (n-j)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-j+1)}{j!};$$

con $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, la *función factorial* de n .

Por otro lado, para escribir una expresión algebraica con menos términos, se usa la *factorización*. Es el proceso que permite fragmentar o separar una expresión en dos o más expresiones de menor grado

llamadas **factores**. Al multiplicar los factores se obtiene nuevamente la expresión original. Además, la suma de los grados de los factores es igual al grado de la expresión que se tenía al principio.

$$(\text{Expresión algebraica de grado } n) = (\text{factor 1}) \times (\text{factor 2}) \times \cdots \times (n - \text{ésimo factor})$$

Se dice que una expresión está **factorizada** o **simplificada** si se ha separado en todos los factores posibles. Este proceso ayuda a la simplificación de estructuras algebraicas más complejas, principalmente cuando se tienen expresiones en numeradores o denominadores de fracciones.

Ahora, un **factor común** es aquel **monomio**, compuesto de números, variables o un producto de ambos, que está presente en todos los términos de una expresión algebraica o polinomio. Considérese la **ley distributiva de los números reales** (Ver pág. 4):

$$\underbrace{\tilde{a}}_{\text{1er término}}^{\text{fc}} \cdot b + \underbrace{\tilde{a}}_{\text{2do término}}^{\text{fc}} \cdot c = a \cdot (b + c),$$

escrita de esta forma se puede apreciar como el factor común (fc) a ambos términos es a , el cual puede ser factorizado, tal como lo muestra el lado derecho de la igualdad. Para encontrar el factor común de los términos de una expresión algebraica es necesario conocer lo siguiente.

- El **máximo común divisor**, denotado por mcd , de sus coeficientes. Este se define como el mayor número entero que *divide* a dos o más números, dejando un *residuo* igual a cero. Si a y b son números enteros, se cumple

$$\frac{a}{mcd(a, b)}, \frac{b}{mcd(a, b)} \in \mathbb{Z}.$$

Para encontrarlo, es necesario conocer todos los divisores de los números involucrados, observar cuales son comunes y seleccionar el menor de ellos.

- Las variables que aparecen en todos los términos, escogiendo las que tengan el menor exponente.

En la práctica de la factorización se presentan muchos casos y la mayoría de estos tiene como fundamento las fórmulas de los productos notables (Ver **Tabla 4**). A continuación, se muestran algunos procedimientos estandarizados que son útiles en la práctica, el lector puede comprobar los resultados obtenidos desarrollando las expresiones.

- **Monomio como factor común**

Es el primer paso en la mayoría de los procedimientos de factorización, pues se busca encontrar un factor común a todos los términos de una expresión algebraica. Por ejemplo, considere el siguiente desarrollo.

$$\begin{aligned} 2x^2y + 6zx - 12z^3yx &= 2(xxy) + 2(3zx) + 2(-6z^3yx) \\ &= 2x(xy) + 2x(3z) + 2x(-6z^3y) \\ &= 2x(xy + 3z - 6z^3y). \end{aligned}$$

Nótese que el polinomio $2x^2y + 6zx - 12z^3yx$ tiene como factor común al monomio $2x$, el cual se extrajo en dos pasos: primero se encontró que $mcd(2, 6, 14) = 2$, pues de todos los divisores de esos números es el máximo común; posteriormente, la variable de menor grado que se encuentra en todos los términos.

- **Agrupación de términos**

En este método se acomoda al polinomio en diferentes agrupaciones, comúnmente los primeros términos (de mayor grado) son una agrupación y los últimos (de menor grado) son otra. En cada

una de las agrupaciones se factorizan los *mcd* junto con la variable que los acompañe (si es posible); posteriormente se factoriza el factor común; de esta forma el polinomio queda escrito como producto de sus factores.

Considere el polinomio

$$2x^2 - 3x - 20.$$

Se escribe el término numérico como el producto de sus divisores $2 \cdot 2 \cdot 5$ o $4 \cdot 5$. A su vez, se escribe el monomio $-3x$ como la suma de dos términos: $-2x$ y $-x$; o x y $-4x$. Con la práctica, el lector se dará cuenta que lo más conveniente para este método es utilizar alguna combinación que incluya al 5, pues es divisor de 20; y algún múltiplo de 2. Una opción podría ser $-8x$ y $5x$. Entonces

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 20 &= 2x^2 + 5x - 8x - 4 \cdot 5 \\ &= (2x^2 - 8x) + (5x - 4 \cdot 5) \\ &= (2x^2 - 4(2x)) + (5x - 4 \cdot 5). \end{aligned}$$

Ahora solo queda escribir el factor común a cada uno de los términos agrupados: para esto, el monomio $-8x$ se escribió como $4(2x)$ y 20 como $4 \cdot 5$.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 20 &= (2x^2 - 4(2x)) + (5x - 4 \cdot 5) \\ &= 2x(x - 4) + 5(x - 4) \\ &= (2x + 5)(x - 4). \end{aligned}$$

El último paso consistió en factorizar el binomio común a toda la expresión, $x - 4$. Así, se concluye que $2x^2 - 3x - 20 = (2x + 5)(x - 4)$.

- **Polinomio de cuatro términos $ac + ad + bc + bd$**

Para factorizar se procede en dos pasos, asociando los términos dos a dos en ambos pasos empleando la agrupación de términos con ayuda del *mcd*.

$$\begin{aligned} ac + ad + bc + bd &= a(c + d) + b(c + d) \\ &= (a + b)(c + d). \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 12xy + 9cy + 3cx + 4x^2 &= (12xy + 4x^2) + (9cy + 3cx) \\ &= 4x(3y + x) + 3c(3y + x) \\ &= (4x + 3c)(3y + x). \end{aligned}$$

Nótese que, por la distribución de las variables, la agrupación $(12xy + 3cx) + (9cy + 4x^2)$ no lleva a factorizar el polinomio.

- **Binomios de la forma $x^n \pm y^n$ con $n \in \mathbb{Z}_+$**

- **Diferencia de cuadrados**

Una expresión de la forma $x^2 - y^2$ puede factorizarse en dos binomios conjugados: con la suma y resta de los términos x y y . Por ejemplo

$$\begin{aligned} 4x^2 - 2z^2 &= (\sqrt{4x^2} + \sqrt{2z^2})(\sqrt{4x^2} - \sqrt{2z^2}) \\ &= (\sqrt{4}\sqrt{x^2} + \sqrt{2}\sqrt{z^2})(\sqrt{4}\sqrt{x^2} - \sqrt{2}\sqrt{z^2}) \\ &= (2x + \sqrt{2}z)(2x - \sqrt{2}z). \end{aligned}$$

Nótese que el procedimiento se simplifica conociendo las raíces de los números involucrados.

- **Suma y diferencia de cubos $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$**

Al igual que los productos notables, con ayuda de la formulación es posible obtener los términos que aparecen en ella. Por ejemplo, el binomio $x^3 - 27$ se puede factorizar considerando que $3^3 = 27$; entonces, $a = x$ y $b = 3$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 x^3 - 27 &= (x)^3 - (3)^3 \\
 &= (x + 3)(x^2 + 3x + 3^2) \\
 &= (x + 3)(x^2 + 3x + 9).
 \end{aligned}$$

○ **Casos generales**

Para factorizar sumas o restas de binomios más generales se procede a extraer factor por factor hasta encontrar una forma simplificada. Este procedimiento depende de la paridad de n y del signo del binomio original, esto se puede resumir en la siguiente tabla

Paridad de n	Signo	Factor que se extrae
Impar	-	$x - y$
	+	$x + y$
Par	-	$(x + y)(x - y)$
	+	No es factorizable

Por ejemplo, el binomio $81x^4 - 16y^4$ tiene potencia par y su signo es negativo, por lo tanto, se pueden extraer dos factores. Como $81 = 3^4$ y $16 = 2^4$ se puede escribir

$$\begin{aligned}
 81x^4 - 16y^4 &= (9x^2)^2 - (4y^2)^2 \\
 &= (9x^2 - 4y^2)(9x^2 + 4y^2) \\
 &= (3x - 4y)(3x + 4y)(9x^2 + 4y^2),
 \end{aligned}$$

de donde el binomio $9x^2 - 4y^2$ se factorizo con ayuda de la información de la tabla.

● **Trinomio cuadrado perfecto**

Consiste en agrupar una expresión de la forma $x^2 \pm 2xy + y^2$ en un binomio elevado al cuadrado, donde el signo resultante es igual al del doble producto. Por ejemplo

$$\begin{aligned}
 9a^2 + 12ab + 4b^2 &= (3a \cdot 3a) + 2(6ab) + (2b \cdot 2b) \\
 &= (3a)^2 + 2(6ab) + (2b)^2 \\
 &= (3a + 2b)^2.
 \end{aligned}$$

En el procedimiento se busca escribir la expresión dada como se muestra el producto notable del trinomio cuadrado perfecto (segundo renglón), de esa forma se podrá escribir el resultado.

● **Trinomio de la forma $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$**

Para factorizar el trinomio, se buscan dos números tales que su suma sea igual a $(a + b)$ y su producto sea ab . Por ejemplo

$$\begin{aligned}
 m^2 + 2m - 15 &= m^2 + (5 - 3)m + (-3)(+5) \\
 &= (m + (-3))(m + (+5)) \\
 &= (m - 3)(m + 5).
 \end{aligned}$$

El producto de -3 y 5 es -15 , mientras que su suma es $+2$.

● **Trinomio de la forma $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$**

Se compone del producto de dos binomios más generales, con un término semejante y otro no común. Primero se buscan cuatro números tales que $ad \cdot bc = ac \cdot bd$, donde el lado derecho es conocido; posteriormente se factoriza $acx^2 + adx + bcx + bd$ por medio de la agrupación de términos.

Por ejemplo, considere el polinomio $10x^2 - 19x + 6$: directamente $ac = 10$, $bd = 6$ y $(ad + bc) = -19$.

○ Primero, $ad \cdot bc = ac \cdot bd = 10 \cdot 6 = 60$, entonces ad y bc :

- son múltiplos de 60: $ad, bc \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30\}$;
- ambos son negativos, pues su suma es negativa y su producto es positivo.

Basta encontrar dos números del conjunto mencionado tales que la suma de sus negativos sea -19 : siendo únicamente -4 y -15 .

- Ahora, considerando que $ac = 10$, $bd = 6$, $ad = -4$ y $bc = -15$, se procede a agrupar $acx^2 + adx + bcx + bd$

$$\begin{aligned} 10x^2 - 4x - 15x + 6 &= (10x^2 - 15x) + (-4x + 6) \\ &= ((2)(5)x^2 + (-3)(5)x) + ((2)(-2)x + (-2)(-3)) \\ &= 5x(2x - 3) + (-2)(2x - 3) = (5x - 2)(2x - 3) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $10x^2 - 19x + 6 = (5x - 2)(2x - 3)$.

En el ejemplo no se escribió directamente a, b, c o d , encontrar su valor fue consecuencia de factorizar el polinomio resultante, cuidando las leyes de los signos y la correcta agrupación. Se deja como ejercicio al lector factorizar el polinomio $10x^2 - 4x - 15x + 6$ partiendo de las agrupaciones $(10x^2 - 4x) + (-15x + 6)$.

- **Cubo perfecto** $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$

La expresión desarrollada se compone de dos términos cúbicos y dos cuadráticos. Para factorizarlos, se busca simplificar la expresión obteniendo primero uno de los dos términos cúbicos y después el otro utilizando algún término cuadrático.

Por ejemplo, para factorizar el polinomio $343z^3 + 735z^2 + 525z + 125$, se realiza lo siguiente

- Directamente, $b^3 = 125$, entonces $b = 5$.
- Utilizando el segundo término del polinomio se puede escribir $3a^2b = 735z^2$ y como $b = 5$ se puede despejar a a : $(3 \cdot 5)a^2 = 735z^2$, entonces $a^2 = \frac{735}{3 \cdot 5}z^2 = 49z^2$; por lo tanto, $a = \sqrt{49z^2} = 7z$.
- Con estos valores de a y b se puede escribir directamente que $343z^3 + 735z^2 + 525z + 125 = (7z + 5)^3$, en efecto:

$$\begin{aligned} 343z^3 + 735z^2 + 525z + 125 &= (7z)^3 + 3(49z)^2(5) + 3(7z)(25) + (5)^3 \\ &= (7z)^3 + 3(7z)^2(5) + 3(7z)(5)^2 + (5)^3 \\ &= (7z + 5)^3. \end{aligned}$$

Nótese que se puede obtener el valor $a = 7z$ utilizando el tercer término del polinomio ($525z$) en lugar del segundo, esto es, se plantea que $3ab^2 = 525z$.

A continuación, se muestra una perspectiva geométrica del binomio cuadrado perfecto y del cubo perfecto, pensando a las variables a y b como longitudes de aristas.

En el binomio cuadrado, es posible dibujar un *tetrágono regular* de medida $a + b$ y de área $(a + b)^2$. Este se compone en *cuatro* polígonos: un cuadrado (**rojo**) con arista a y área a^2 y un cuadrado (**verde**) con arista b y área b^2 ; dos rectángulos (**morado**) de aristas a y b con área $a \cdot b$.

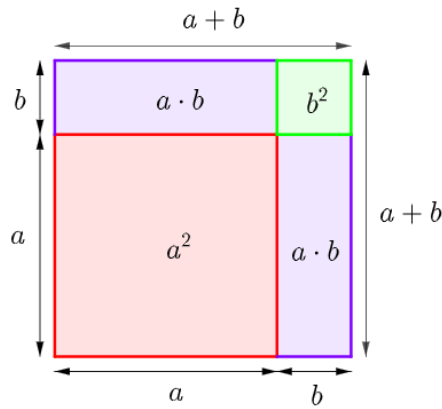


Ilustración 4. Binomio cuadrado perfecto: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2(a \cdot b)$. Polígonos con áreas iguales a los términos del binomio

El cubo perfecto se puede representar con un *hexaedro regular* con arista de medida $a + b$ y volumen $(a + b)^3$. Se compone de *ocho* poliedros: dos cubos (*rojo* y *verde*) de medidas a y b , siendo a^3 y b^3 sus volúmenes respectivamente; tres prismas rectangulares (*morado*), siendo área de su base a^2 , su altura b y $a^2 \cdot b$ su volumen; otros tres prismas rectangulares (*cian*) con base b^2 , altura a y volumen $a \cdot b^2$.

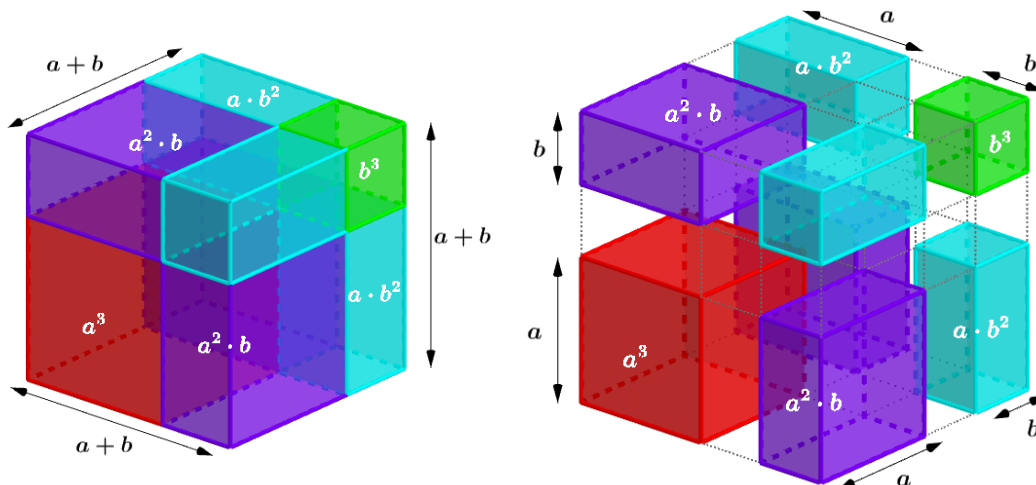


Ilustración 5. Cubo perfecto: $(a + b)^3 = a^3 + 3(a^2 \cdot b) + 3(a \cdot b^2) + b^3$. Izquierda: cubo con aristas de medida $a + b$. Derecha: poliedros con volúmenes iguales a los términos del binomio desarrollado.

Nótese que estos poliedros tienen bases iguales a las áreas de la **Ilustración 4**; análogamente, se puede imaginar un *polícoro regular (teseracto o octácoro)* construido con aristas $a + b$, éste contendrá dieciséis polícoros de hiperbase iguales a los poliedros de la **Ilustración 5**, de tal forma que cada uno tendrá un hipervolumen igual a algún término del binomio:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4(a^3 \cdot b) + 6(a^2 \cdot b^2) + 4(a \cdot b^3) + b^4.$$

Algunas estrategias para factorizar una expresión algebraica (o polinomio) van desde el reconocimiento o identificación de factores comunes dentro de la misma expresión; agruparlos y si es posible, aplicar alguna regla específica de las mencionadas anteriormente. Es importante no dejar a un lado las propiedades de los números reales, principalmente la distributividad; o las leyes de los signos. Finalmente, corroborar el resultado obtenido paso a paso para detectar errores.

Para poner esto en práctica es útil plantearse lo siguiente, no necesariamente en orden:

- ¿Existe algún factor común? ¿Es un monomio o un polinomio?

- La expresión algebraica ¿es o se compone de un producto notable?
- ¿Se pueden agrupar términos para factorizar por partes?
- ¿Es un trinomio cuadrado que puede descomponerse buscando dos números específicos?
- ¿Se puede aplicar alguna de las fórmulas de los productos notables?

Durante el desarrollo o posterior a él:

- ¿Se aplicaron correctamente las leyes de los signos en cada paso?
- Al expandir el producto obtenido, ¿se obtiene la expresión original o del paso anterior?
- Al proponer valores diferentes para las incógnitas presentes y evaluar el resultado y la expresión original, ¿se obtiene una igualdad?

1.7 Elementos básicos de geometría

Intuitivamente, se entiende por *punto* como aquel objeto *adimensional* que indica una posición. Ahora, se dice que una *línea* es un conjunto infinito de puntos y, particularmente, en una *línea recta* dicho conjunto está alineado en alguna dirección, esto la hace un objeto de *una dimensión*. Un *plano* es aquel conjunto infinito de puntos que se extiende a lo largo de dos direcciones, esto lo hace un conjunto de *dos dimensiones*. Así mismo, el *espacio*, se considera un conjunto de *tres dimensiones*, pues es un conjunto de puntos que se extiende sobre tres direcciones.

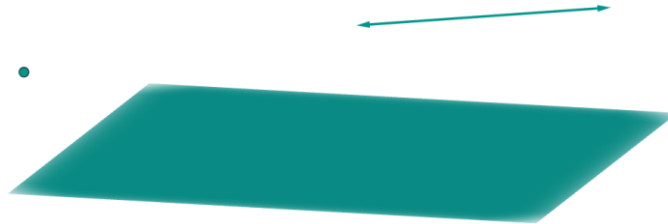


Ilustración 6. En la esquina superior derecha se muestra un punto, representado por un pequeño disco de color; la línea recta, ubicada en la esquina superior izquierda, se dibuja (convenientemente) con dos flechas en sus extremos para diferenciarlas de otros objetos; el plano, en la parte inferior, se dibuja como un cuadrilátero sombreado.

La geometría tiene cinco axiomas fundamentales, los cuales fueron postulados por *Euclides*, el padre de la geometría, en *Los elementos*:

- i. Cada par de puntos puede ser unido mediante una (y solo una) línea recta.
- ii. Cualquier segmento de línea recta puede ser extendido indefinidamente hacia cualquier dirección.
- iii. Hay exactamente un círculo para cualquier radio dado con cualquier centro dado.
- iv. Todos los ángulos rectos son congruentes unos con otros.
- v. Si una línea recta que cae sobre dos líneas rectas hace que los dos ángulos interiores del mismo lado sean menores a dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se intersecarán en el lado en que la suma de los dos ángulos es menor que dos ángulos rectos.

1.8 Líneas

Existen dos tipos de líneas; *líneas rectas* y *líneas curvas*. Se define una línea recta como el lugar geométrico de todos los puntos que están alineados en una sola dirección; una línea curva es aquella línea que se puede dibujar de cualquier otra forma.

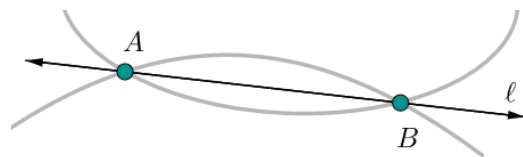


Ilustración 7. Líneas que pasan por A y B.

Dados dos puntos A y B, pueden pasar muchas líneas a través de ellos, sin embargo, solo una línea recta (o simplemente recta), denotada por ℓ . Esta divide al plano en tres partes; la misma recta y dos semiplanos en cada uno de sus lados. Una recta es indefinida por ambos lados, es por eso que comúnmente se dibuja con dos flechas en los extremos apuntando hacia su exterior, como en la **Ilustración 7**.

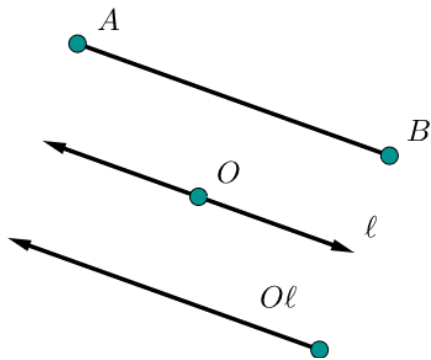


Ilustración 8. En orden descendente:
Segmento AB (\overline{AB}); recta l que pasa por O ;
semirrecta Ol .

Por otro lado, si se considera un punto O sobre una recta l , cada uno de los dos extremos resultantes de ella (separados por O) se conocen como *semirrectas* (o simplemente *rayos*), las cuales se dibujan con una flecha hacia alguna dirección, lo que indica que se extiende de manera indefinida, se denotan por Ol .

Para dos puntos del plano, A y B , es posible trazar una recta, pero en este caso solo se considera el pedazo de recta que está entre ambos puntos, a este objeto se le conoce como *segmento de recta* y se denota por \overline{AB} o segmento AB . Estos objetos geométricos se visualizan como pedazos de recta comprendidos entre dos puntos.

Por lo general, se considera que el segmento que va de A a B es el mismo que el que va de B a A , sin embargo, hay situaciones en donde el segmento posee una dirección previamente establecida, si este es el caso, se dice que $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

1.9 Ángulos

Se define un *ángulo* como la parte común de dos semiplanos resultantes de trazar dos rayos que se intersecan en el punto O . A los rayos OA y OB se les llama *lados del ángulo* y al punto O se le conoce como *vértice*. De acuerdo con la Ilustración 9, se denota al ángulo del vértice O como $\sphericalangle AOB$.

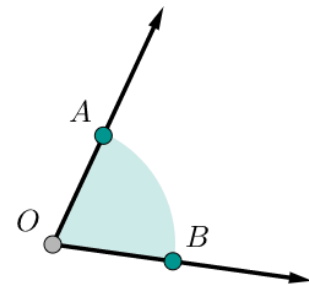


Ilustración 9. Ángulo AOB
($\sphericalangle AOB$).

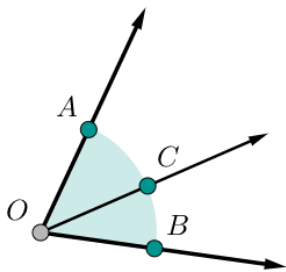


Ilustración 10. $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOC + \sphericalangle COB$.

Se dibuja el rayo OC , con O el vértice en común, de tal forma que OC se encuentre dentro del ángulo AOB . El ángulo AOB es igual a la suma de los ángulos AOC y COB , los cuales se conocen como *ángulos adyacentes* (Ver Ilustración 10). Más aún, si los ángulos AOB y BOC son iguales, entonces se dice que el rayo OB es *bisectriz* del ángulo AOC .

Ahora, considérese dos rectas que se intersecan en un punto O , de esta forma se crean cuatro ángulos. Los ángulos adyacentes suman 180° . Además, los pares de ángulos consecutivos se llaman *ángulos opuestos por el vértice* y son iguales.

Cuando las rectas no se intersecan, se dice que equidistan a la misma distancia, pues son paralelas; pero si su intersección existe (un punto), entonces puede pasar que las rectas sean *perpendiculares* o sean *convexas*. En cualquiera de estas últimas dos situaciones se formarán cuatro ángulos. Las perpendiculares formarán cuatro ángulos iguales a 90° , mientras que las convexas forman dos ángulos mayores a 90° y dos ángulos menores a 90° (Ver Ilustración 11).

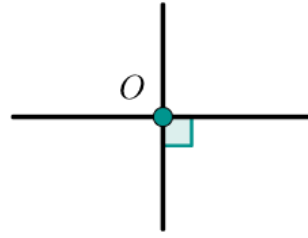
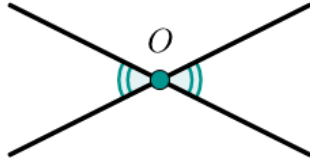


Ilustración 11. Izquierda: rectas convexas. Derecha: rectas perpendiculares. En ambos casos los ángulos opuestos son iguales. Los ángulos de 90° se dibujan con un cuadrado y se denominan ángulos rectos.

Cada ángulo puede nombrarse respecto a su medida. A continuación, se muestran los nombres con ejemplos representativos.

- Un ángulo menor que un ángulo recto se llama *ángulo agudo*.
 - $\alpha = 25^\circ$.
 - $\theta = 50^\circ$
- Un ángulo igual a 90° se conoce como *ángulo recto*.
 - $\beta = 90^\circ$.
- Un ángulo mayor a 90° y menor a 180° se conoce como *ángulo obtuso*.
 - $\gamma = 96^\circ$.
 - $\psi = 130^\circ$.
 - $\kappa = 178^\circ$.
- Un *ángulo convexo* mide menos de 180° .
 - $\delta = 65^\circ$.
 - $\lambda = 145^\circ$.
- Un *ángulo llano* es igual a 180° .
 - $\varepsilon = 180^\circ$.
- Un *ángulo cóncavo* mide entre 180° y 360° .
 - $\zeta = 197^\circ$.
 - $\mu = 215^\circ$.
 - $\nu = 359^\circ$
- Un *ángulo completo* mide 360° .
 - $\eta = 360^\circ$.

Además:

- Dos ángulos son *complementarios* cuando suman 90° .
 - Por ejemplo, $\alpha + \delta = 25^\circ + 65^\circ = 90^\circ$.
- Dos ángulos son *suplementarios* cuando suman 180° .
 - Por ejemplo, $\theta + \psi = 50^\circ + 130^\circ = 180^\circ$

1.10 Rectas

Dada una curva C en el plano (Ver **Ilustración 12**), se puede trazar su recta *tangente*, ésta la toca en un solo punto; o se puede trazar su recta *secante*, la cual interseca a la curva en dos o más puntos. En la **Ilustración 12** las rectas ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_4 son tangentes a C , mientras que ℓ_3 la atraviesa en dos puntos.

Al trazar un par de rectas en el plano sucede uno de los siguientes casos: las rectas se intersecan en un punto o son rectas paralelas. En el primer caso, las rectas pueden ser *convexas* o *perpendiculares* (Ver **Ilustración 11**). Por ejemplo, las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son convexas; mientras que las rectas ℓ_2 y ℓ_3 son perpendiculares, pues ℓ_3 pasa por el centro de la circunferencia y ℓ_2 es tangente a C ; además, las rectas ℓ_2 y ℓ_4 son paralelas, pues ambas forman ángulos rectos con ℓ_3 (Ver **Ilustración 12**).

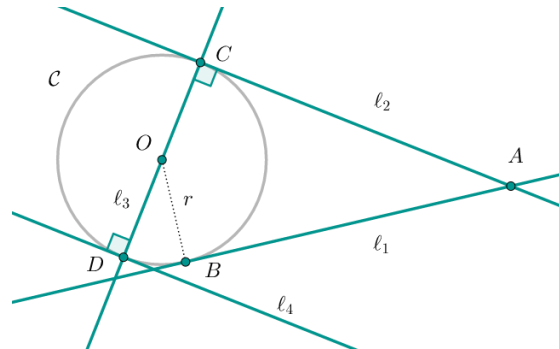


Ilustración 12. Circunferencia C con centro en O y de radio r .

Una recta ℓ que interseca a otras dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 , como en la

Ilustración 13, se conoce como *transversal* (a ellas). Se crea un sistema con ocho ángulos. Los ángulos β , δ , θ y ε están entre las rectas ℓ_1 y ℓ_2 , se conocen como *ángulos interiores*. Los ángulos α , γ , ϕ y ψ se conocen como *ángulos exteriores*. Los ángulos ubicados en lados opuestos por la transversal ℓ se llaman *ángulos alternos* (por ejemplo γ y θ). A los ángulos δ y θ se les llama *alternos internos*, mientras que los ángulos γ y ϕ se conocen como *alternos externos*.

A los ángulos que están en una posición correspondiente con respecto a la transversal ℓ se conocen como *ángulos correspondientes*, como γ y ε . Cuando las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas, entonces los ángulos correspondientes son iguales o congruentes, es decir,

$$\begin{aligned}\alpha &= \delta = \theta = \psi, \\ \beta &= \gamma = \phi = \varepsilon.\end{aligned}$$

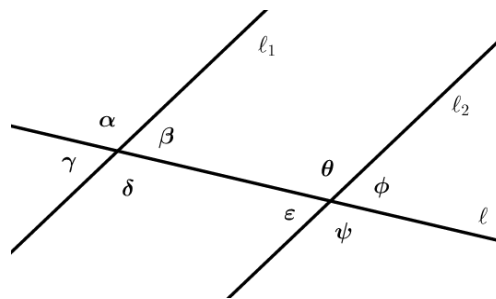


Ilustración 13. Sistema de ángulos con dos rectas y una secante a ellas.

Recíprocamente, si estas dos últimas condiciones se cumplen en un sistema de dos rectas atravesadas por una transversal, entonces se dice que ℓ_1 y ℓ_2 son rectas paralelas.

1.11 Triángulos

Aquel polígono de tres lados, tres vértices y tres ángulos internos se conoce como *triángulo*. Se clasifican en función de los ángulos que posea: el triángulo *rectángulo* posee un ángulo recto (90°); el *acutángulo* tiene todos sus ángulos agudos ($< 90^\circ$); el *obtusángulo* posee un ángulo obtuso ($> 90^\circ$). Ahora, respecto a los lados; se dice que un triángulo *escaleno* es aquel que no tiene un par de lados de igual medida; el triángulo *isósceles* tiene dos lados iguales; finalmente, el triángulo *equilátero* tiene sus tres lados iguales.

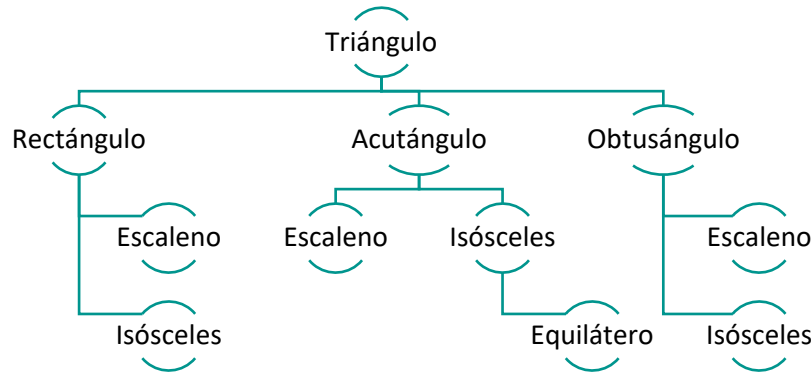


Ilustración 14. Existen triángulos que están en más de una categoría, por ejemplo, existen triángulos isósceles que tienen un ángulo recto.

Las siguientes tablas contienen algunos ejemplos de triángulos para las diferentes combinaciones entre categorías.

Triángulos rectángulos	
Escalenos	
Isósceles	

Tabla 5. Representación de triángulos rectángulos (tienen un ángulo de 90°), escalenos e isósceles. Estos últimos se pueden construir con ayuda de una circunferencia, los lados iguales del triángulo tienen la misma medida que el radio.

Triángulos acutángulos

<p>Escalenos</p>	
<p>Isósceles</p>	
<p>Equiláteros</p>	

Tabla 6. Representación de triángulos acutángulos (sus ángulos son agudos, es decir, menores a 90°). El vértice opuesto al lado de diferente medida en los isósceles es el centro de una circunferencia.

Triángulos obtusángulos

<p>Escalenos</p>	
<p>Isósceles</p>	

Tabla 7. Representación de los triángulos obtusángulos (tienen un ángulo obtuso, es decir, mayor a 90°).

Los triángulos rectángulos tienen la particularidad de nombrar al lado opuesto del ángulo recto como *hipotenusa*, mientras que los lados adyacentes se conocen como *catetos*.

El siguiente resultado fue expuesto en Los elementos de Euclides (Libro I, Teorema 47 y 48) y hasta la fecha tiene gran valor práctico en muchas disciplinas, principalmente en física.

Teorema (Teorema de Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

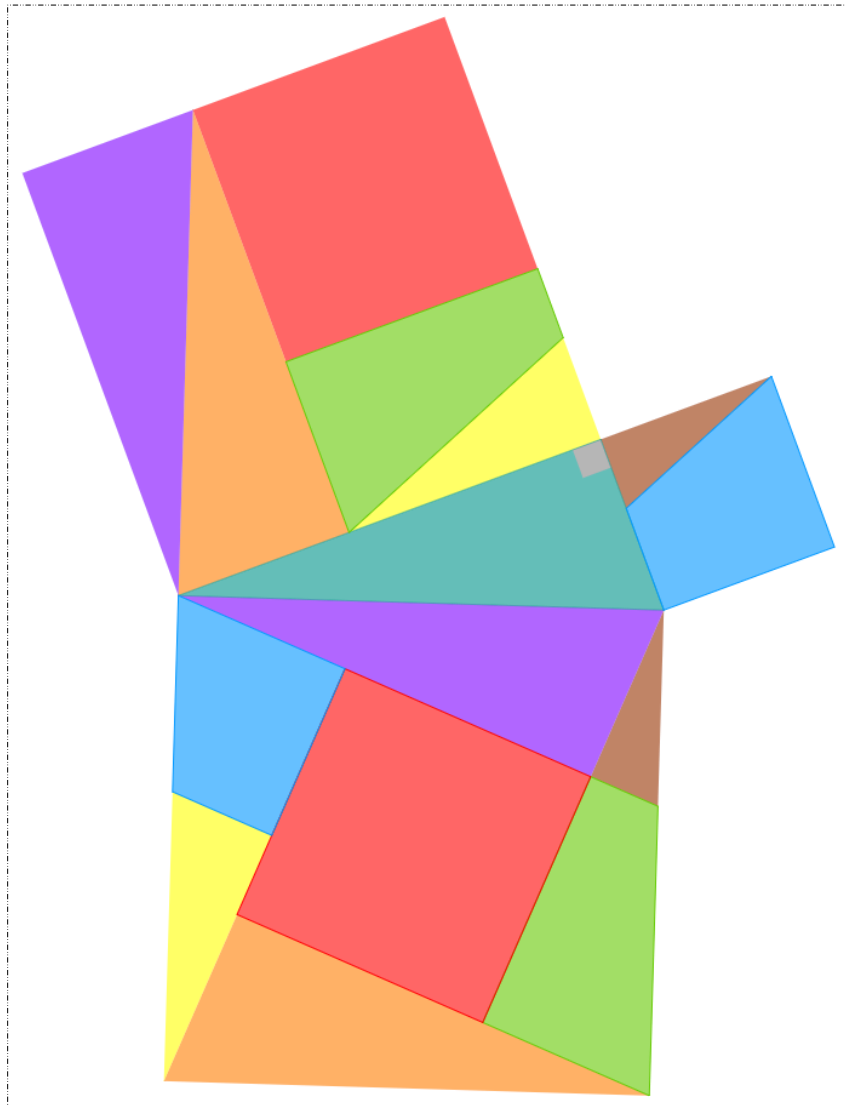


Ilustración 15. Representación virtual de un *rompecabezas de Bhaskara*, en donde se visualiza el teorema de Pitágoras, las piezas que arman los cuadrados más pequeños (sobre los catetos del triángulo rectángulo) son las mismas que se aprecian en el cuadrado que está sobre la hipotenusa. Esta imagen puede ser impresa y recortada para corroborar el teorema. Adaptado de *Puzzle Pitagórico de Bhaskara*, por Arce Sánchez, M., 2015, GeoGebra.org (<https://www.geogebra.org/m/pZFwdepU>). CC BY-SA 3.0 Deed.

Recíprocamente, se puede escribir el siguiente resultado.

Teorema (Recíproco del teorema de Pitágoras). *Si en un triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el triángulo es rectángulo.*

1.12 Congruencia y semejanza de triángulos

Se dice que dos triángulos son *congruentes* si tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño, esto es, las mismas medidas de los ángulos y los lados. Existen tres criterios de congruencia de triángulos, considere un par de triángulos como en la

Ilustración 16, se enuncia lo siguiente.

- *Lado – Ángulo – Lado*: tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales.
- *Ángulo – Lado – Ángulo*: tienen un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales.
- *Lado – Lado – Lado*: tienen sus tres lados iguales.

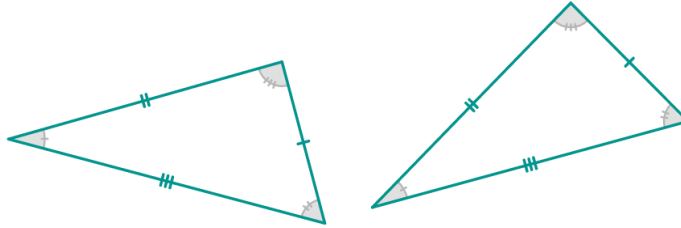


Ilustración 16. Dos triángulos congruentes tienen sus tres lados iguales y sus respectivos ángulos iguales.

Por otro lado, la *semejanza* de triángulos requiere de dos cosas: los ángulos correspondientes deben ser iguales y los lados correspondientes deben ser proporcionales. Para un par de triángulos como en la **Ilustración 17**, se puede enunciar lo siguiente.

- *Ángulo – Ángulo – Ángulo*: tienen sus ángulos correspondientes iguales.
- *Lado – Lado – Lado*: tienen sus tres lados correspondientes proporcionales.
- *Lado – Ángulo – Lado*: tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre éstos es igual.

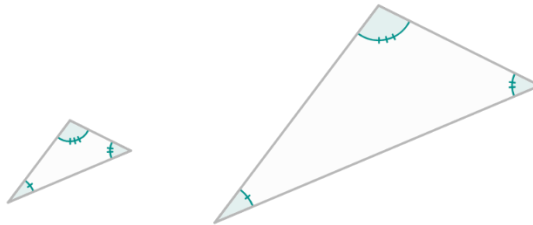


Ilustración 17. Dos triángulos que son semejantes tienen sus tres lados correspondientes proporcionales de acuerdo con los siguientes teoremas; además tienen sus tres ángulos respectivos iguales.

La proporción entre lados de un triángulo se establece con los siguientes resultados, postulados por Tales de Mileto en el siglo VI a. C.

Teorema (Primer teorema de Tales). En un triángulo ABC cualquiera, sean D y E puntos de AB y AC respectivamente, tales que DE es paralelo a BC . Entonces

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

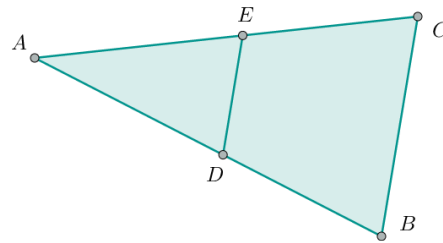


Ilustración 18. $\triangle ABC$ con $DE \parallel BC$.

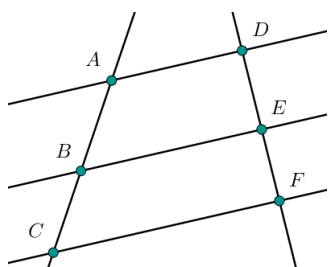


Ilustración 19. Construcción del segundo teorema de Tales.

Teorema (Segundo teorema de Tales). Considere tres rectas AD , BE y CF , y dos rectas transversales a éstas. Si AD , BE y CF son paralelas, entonces

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

Recíprocamente, si $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ y dos de las rectas AD , BE o CF son paralelas, entonces las tres rectas son paralelas.

1.13 Figuras geométricas

Si dos puntos extremos de una línea quebrada (tantas veces como sea necesario) coinciden, la figura que se obtiene es un **polígono**. La longitud de la recta quebrada es el **perímetro**, las partes en donde se quiebra la recta son los **vértices** del polígono. De esta forma, se dice que un polígono consta de un número finito de puntos llamados **vértices** y un número igual de segmentos llamados **aristas** (o **lados del polígono**).

Número de lados	Nombre del polígono
1	Henágon, Monógono
2	Dígono, Bígono
3	Trígono, Triángulo
4	Tetrágono, Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono, Exágono
7	Heptágono, Septágono
8	Octógono, Octágono
9	Eneágono, Nonágono
10	Decágono

Tabla 8. Si el polígono tiene n vértices y n lados se dice que es un n -ágono.

Los polígonos regulares son aquellos que tienen los lados de igual longitud. Por ejemplo: el **cuadrado** posee 4 lados y 4 ángulos de 90° y es el único cuadrilátero (polígono de 4 lados) regular; el **triángulo equilátero** posee 3 lados y 3 ángulos de 60° y es el único triángulo regular. Por otro lado, un triángulo escaleno (polígono de 3 lados) no es regular (Ver **Tabla 6**).

Las figuras de dimensión tres son **poliedros**, poseen aristas, vértices y caras, éstas últimas son polígonos. Los **sólidos platónicos** son poliedros tales que las caras de cada uno de ellos son polígonos regulares iguales entre sí, dichos poliedros cumplen con la fórmula

$$V + C - A = 2,$$

donde V es el número de vértices, C el número de caras y A el número de aristas. Por ejemplo, el **icosaedro** es un sólido platónico que posee 30 aristas, 12 vértices y 20 caras.

A continuación, se presentan algunos polígonos, poliedros y figuras clásicas junto con sus fórmulas para calcular el área, perímetro y el área superficial (para figuras de dimensión tres).

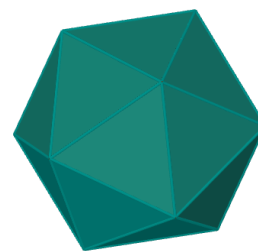


Ilustración 20. Icosaedro.

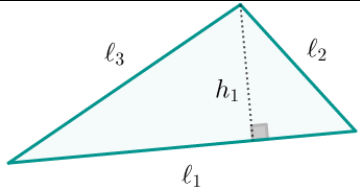
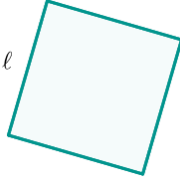
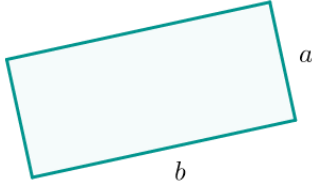
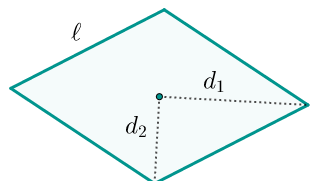
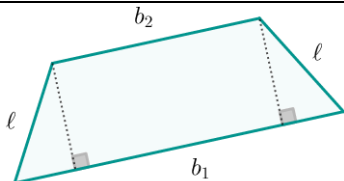
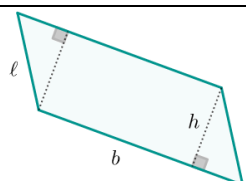
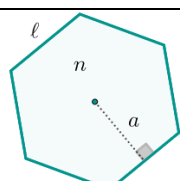
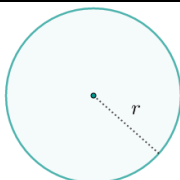
Nombre	Representación	Perímetro	Área
Triángulo		$l_1 + l_2 + l_3$	$\frac{1}{2} l_1 h_1$
Cuadrado		$4l$	l^2
Rectángulo		$2(a + b)$	ab
Rombo		$4l$	$\frac{1}{2} d_1 d_2$
Trapezio		$2l + b_1 + b_2$	$\frac{1}{2} (b_1 + b_2) h$
Paralelogramo		$2(b + l)$	bh
n -ágono regular		$n l$	$\frac{1}{2} n l a$
Circunferencia		πr	πr^2

Tabla 9. Figuras de dos dimensiones. El n -ágono mostrado es un hexágono ($n = 6$).

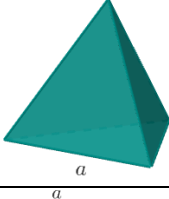
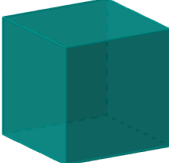
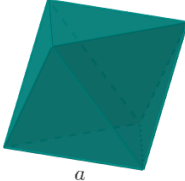
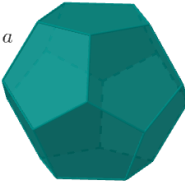
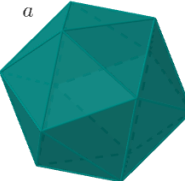
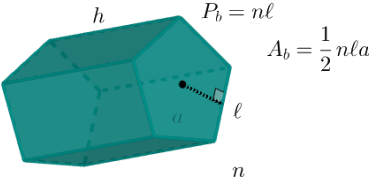
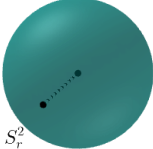
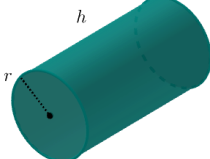
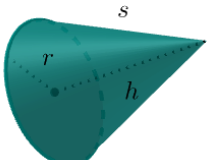
Nombre	Representación	Superficie	Volumen
Tetraedro		$\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
Cubo		$6a^2$	a^3
Octaedro		$2\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
Dodecaedro		$15\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}a^2$	$\frac{5}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}a^3$
Icosaedro		$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{5}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}a^3$
Prisma n -agonal		$2A_b + hP_b$	hA_b
Esfera (S_r^2)		$4\pi r^2$	$\frac{4\pi}{3}r^3$
Cilindro		$2\pi(r + h)$	$\pi r^2 h$
Cono		$\pi r(r + s)$	$\frac{\pi}{3}r^2 h$

Tabla 10. Figuras de tres dimensiones. El prisma mostrado es pentagonal ($n = 5$).

1.14 Trigonometría

Considere dos rectas perpendiculares en el plano, una horizontal y otra vertical, con O su punto de intersección, tal como se muestra en la **Ilustración 21**. Dado un punto P en el plano, se considera el segmento OP y a la distancia de P al centro O como la magnitud de \overline{OP} . El ángulo de inclinación del segmento OP se mide a partir del lado derecho de la recta horizontal y el segmento OP , se dice que el ángulo es *positivo* si se mide en sentido *antihorario* (opuesto al avance de las manecillas del reloj), por el contrario, el ángulo es *negativo* si se mide en el sentido contrario al avance de las manecillas del reloj. El valor del ángulo va desde 0° hasta los 360° *sexagesimales*, este último representa una vuelta completa.

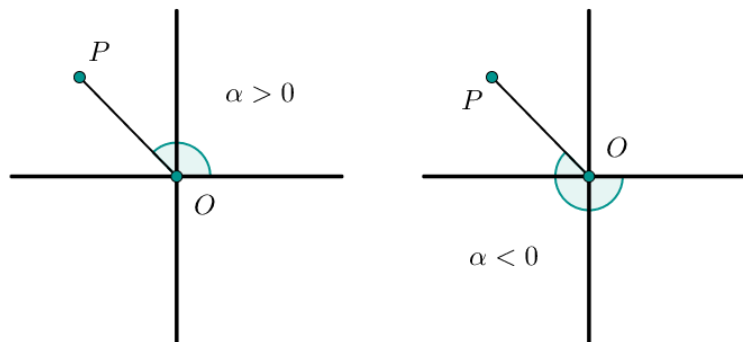


Ilustración 21. Interpretación geométrica de los signos que poseen los ángulos en trigonometría.

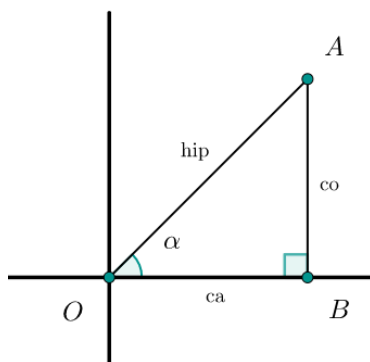


Ilustración 22. Triángulo AOB .

Sea A un punto cualquiera, ubicado a la derecha de la recta horizontal y arriba de la recta vertical (Ver **Ilustración 22**), se traza el segmento AO y la proyección de A sobre la horizontal (punto B). Así, el triángulo AOB es rectángulo, pues el ángulo del vértice B es recto (por construcción); el ángulo que está en el vértice O se nombra α . Se definen las *funciones trigonométricas seno*, *coseno* y *tangente* evaluadas en el ángulo α como

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}, \quad \tan(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$$

Adicionalmente, las funciones trigonométricas *cosecante*, *secante* y *cotangente* son

$$\csc(\alpha) = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}, \quad \sec(\alpha) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}, \quad \cot(\alpha) = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}$$

En el triángulo AOB (Ver **Ilustración 22**), el lado \overline{OB} se conoce como *cateto adyacente* al ángulo α , denotado comúnmente por *ca* o *CA*; mientras que \overline{AB} se conoce como *cateto opuesto* al ángulo α (*co* o *CO*); y el lado \overline{OA} es la *hipotenusa* (*hip* o *HIP*). Con esta notación, las funciones trigonométricas se escriben como

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{co}}{\text{hip}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{ca}}{\text{hip}}, \quad \tan(\alpha) = \frac{\text{co}}{\text{ca}}$$

La *circunferencia unitaria* S^1 es el conjunto de puntos del plano que equidistan una unidad del centro O . La ubicación de un punto p sobre S^1 está completamente determinada por un solo valor, el ángulo de inclinación α . Entonces, a cada ángulo $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$ le corresponde uno y solo un arco sobre S^1 . Para encontrar la medida de dicho arco se considera que el *perímetro de una circunferencia de radio r* es

$$2\pi r,$$

entonces el perímetro de la circunferencia S^1 es igual a 2π . Se define un *radián* (denotado por s) como la longitud del arco correspondiente a 1° medido desde la horizontal, es decir, $\frac{2\pi}{360}$. Entonces para un ángulo arbitrario α , la longitud en radianes es igual a

$$s(\alpha) = \left(\frac{2\pi}{360}\right) \cdot \alpha.$$

O bien, la medida sexagesimal de un radián s es

$$\alpha(s) = \left(\frac{360}{2\pi}\right) \cdot s.$$

Considere el triángulo AOB de la **Ilustración 22**, si la hipotenusa tiene un valor unitario, es decir, el lado AO mide 1, por el teorema de Pitágoras (Ver **Ilustración 15**) se puede escribir la identidad trigonométrica

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1,$$

pues su cateto adyacente mide $\cos(\alpha)$ y el cateto opuesto mide $\sin(\alpha)$. Más aún, considerando que $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ se obtiene la identidad $\sec^2(\alpha) - \tan^2(\alpha) = 1$.

1.15 Funciones trigonométricas

Las definiciones de las funciones trigonométricas son para ángulos positivos, pues toman valores a partir del cero, ahora considere el ángulo $-\alpha$. Entonces, geoméricamente (ver **Ilustración 22**) se puede ver que $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, pues es la base del triángulo AOB , mientras que $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ por ser la proyección de \overline{AB} sobre el eje vertical. Por lo tanto $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ ya que es la altura del triángulo AOB . Por otro lado, al considerar una reflexión del triángulo AOB respecto a la recta vertical, la altura del triángulo nuevo será la misma, mientras que la base cambia de signo, esto se representa como

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \sin(180^\circ - \alpha) \\ \cos(\alpha) &= -\cos(180^\circ - \alpha)\end{aligned}$$

pues la reflexión de \overline{OA} está inclinada respecto a la horizontal a $(180^\circ - \alpha)$ grados. De forma más general se tiene el resultado siguiente.

Teorema. Las siguientes dos relaciones son válidas para cualesquiera dos ángulos α y β :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta), \\ \sin(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha).\end{aligned}$$

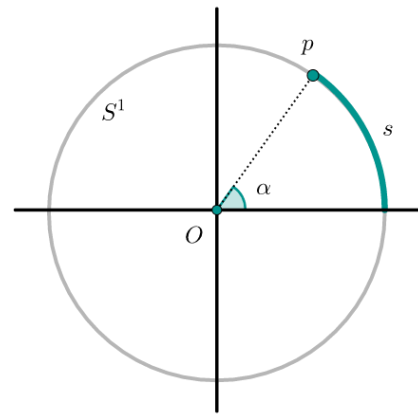


Ilustración 23. En la circunferencia unitaria, S^1 , un ángulo sexagesimal α es equivalente a s radianes.

1.16 Teoremas trigonométricos

El teorema de Pitágoras relaciona los valores de los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. En un triángulo cualquiera, sus lados y sus ángulos satisfacen los siguientes resultados.

Teorema (Ley de los cosenos). En un triángulo ABC cualquiera, donde a, b y c son las longitudes de los lados y α, β y γ son los ángulos opuestos a los lados a, b y c respectivamente, se tiene que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta),$$

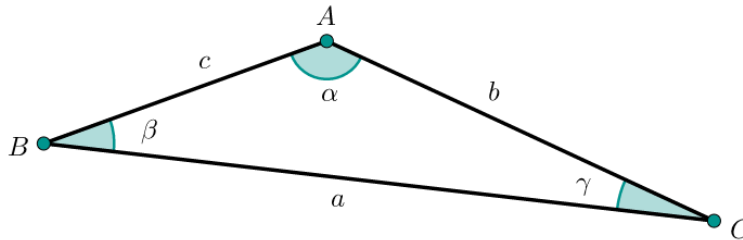


Ilustración 24. En el ΔABC también se cumple que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$, y $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$.

Teorema (Ley de los senos). Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia de radio r . Si a, b y c son los lados del triángulo opuestos a los vértices A, B y C respectivamente, entonces

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2r.$$

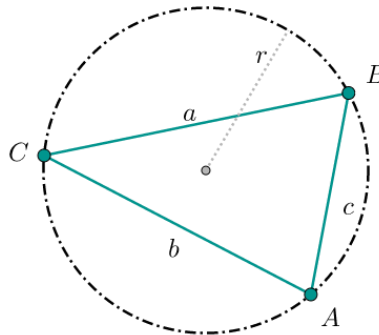


Ilustración 25. Triángulo ABC y su circunferencia circunscrita, su centro es el punto de intersección de las mediatrices (rectas perpendiculares a los lados del triángulo que pasan por sus puntos medios) y se conoce como circuncentro.

Se puede comprobar fácilmente que la ley de cosenos es la generalización del teorema de Pitágoras; al considerar el ángulo $\beta = 90^\circ$, pues $\cos(90^\circ) = 0$: se obtiene la ecuación $b^2 = a^2 + c^2$.

1.17 Coordenadas del plano

La *geometría analítica* estudia la geometría Euclidiana desde el punto de vista algebraico. El *plano cartesiano* está compuesto por dos *ejes coordenados* (perpendiculares), se conocen como *eje de las abscisas* y *eje de las ordenadas*. El eje de las abscisas (y sus coordenadas) se etiqueta con la letra x ; mientras que el eje de las ordenadas, con y . Se define una *orientación* en el plano de tal forma que la *dirección positiva* del eje x va de izquierda a derecha y, en el eje y , de abajo hacia arriba. Por tanto, el plano cartesiano se puede representar por el conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Las *parejas ordenadas* (x, y) son los *puntos del plano cartesiano* y los elementos que las componen, x y y , se llaman *coordenadas rectangulares* (o cartesianas). Los puntos del plano están bien definidos, ya que se determinan por el par de números mencionados anteriormente.

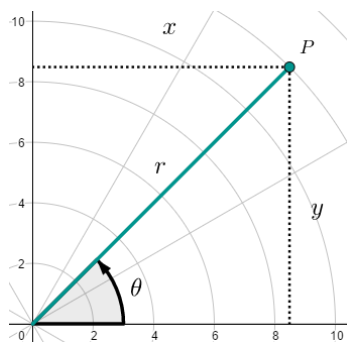


Ilustración 26. Punto P y la representación de sus coordenadas rectangulares y polares.

El *plano polar* se describe a partir de dos coordenadas llamadas *coordenadas polares*: la coordenada *radial*, denotada por r , toma valores en el intervalo $[0, \infty)$; y la coordenada *angular*, denotada por θ , toma valores dentro del intervalo $[0, 360^\circ)$ (si se consideran radianes, el intervalo es $[0, 2\pi]$). Entonces, un punto del plano polar se representa por la pareja (r, θ) .

Al considerar un punto polar (r, θ) , sus coordenadas rectangulares están dadas por las expresiones

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\theta), \\ y &= r \cdot \sin(\theta). \end{aligned}$$

Y un punto (x, y) del plano cartesiano \mathbb{R}^2 tiene coordenadas polares dadas por

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

1.18 Relaciones analíticas

Sean dos puntos cualesquiera $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ de \mathbb{R}^2 , la *distancia* entre P y Q (equivalente a la distancia de Q a P) está dada por

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

y el *punto medio* entre P y Q es

$$R = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

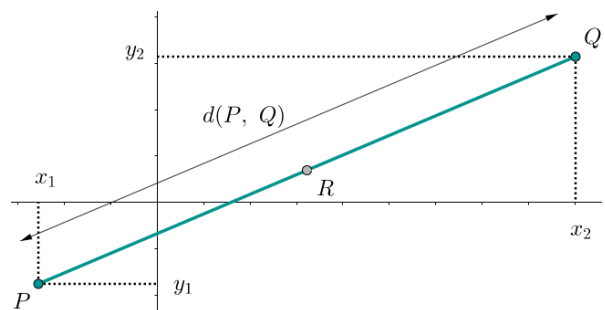


Ilustración 27. Segmento de recta \overline{PQ} con punto medio R y longitud $d(P, Q)$.

1.19 Ecuaciones de primer grado y su interpretación en geometría analítica

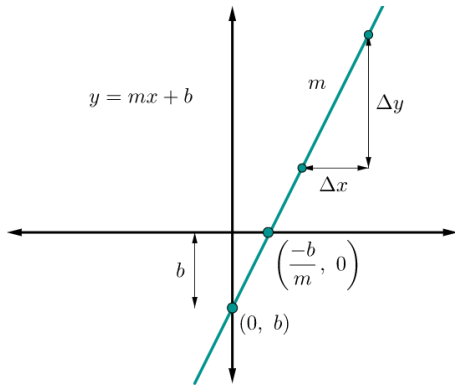


Ilustración 28. Recta ℓ que pasa por los puntos $(0, b)$ y $(-\frac{b}{m}, 0)$, de pendiente m y de ecuación $y = mx + b$.

Dada una recta ℓ y dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) sobre ella, se define la **pendiente** como

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

y el **desplazamiento** b como la altura a la cual ℓ atraviesa el eje y , es decir, cuando $x = 0$, $y = b$. De esta forma la ecuación de la recta ℓ es

$$y = mx + b,$$

donde b es negativo cuando ℓ se encuentra por debajo del origen de coordenadas, positivo cuando se encuentra por encima del origen y cero cuando ℓ pasa por el origen.

Considere dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 , de pendientes m_1 y m_2 con desplazamientos b_1 y b_2 respectivamente, entonces:

- Sí $m_1 = m_2$ y:
 - $b_1 \neq b_2$, las rectas son paralelas
 - $b_1 = b_2$, las rectas son coincidentes
- Sí $m_1 \cdot m_2 = -1$, entonces las rectas son perpendiculares, además:
 - sí b_1 y b_2 son ambos diferentes de cero, el punto de intersección es diferente del origen
 - sí $b_1 = b_2 = 0$, el punto de intersección es el origen de coordenadas
- Sí $m_1 \neq m_2$ y:
 - $b_1 = b_2 = 0$, las rectas se intersecan en el origen de coordenadas
 - b_1 y b_2 son ambos diferentes de cero, entonces las rectas se intersecan en un punto diferente al origen de coordenadas

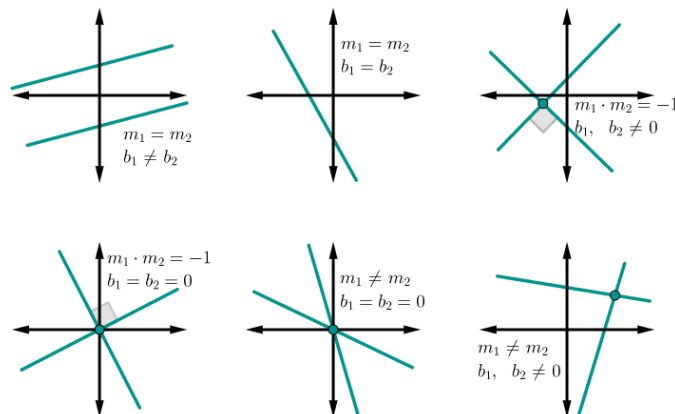


Ilustración 29. Dos rectas en el plano con pendientes m_1 y m_2 y desplazamientos b_1 y b_2 .

1.20 Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

Una recta ℓ del plano \mathbb{R}^2 es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen una ecuación general de la forma

$$ax + by = 0,$$

donde a, b y $c \in \mathbb{R}$ y $a^2 + b^2 \neq 0$. Así, dos rectas de ecuaciones $a_1x + b_1y - c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y - c_2 = 0$ son paralelas si a_1 y b_1 son múltiplos de a_2 y b_2 , y $c_1 \neq c_2$. Esto es $a_1 = k \cdot a_2$ y $b_1 = k \cdot b_2$. Ahora, considere el siguiente resultado.

Teorema. Si dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 son no paralelas en el plano \mathbb{R}^2 , entonces se intersecan en y solamente en un punto.

Este resultado nos afirma que el conjunto de intersección entre dos rectas distintas y no paralelas es un punto. Recíprocamente, si dos rectas no se intersecan, entonces son paralelas.

Si las rectas se intersecan, entonces se dice que su intersección corresponde a la solución del sistema de ecuaciones. Por el contrario, si no existe intersección entre ellas, es decir, son rectas paralelas, entonces se dice que el sistema de ecuaciones no tiene solución. Más aún, si las dos ecuaciones representan a la misma recta, entonces se puede operar una ecuación del sistema para obtener la otra.

La intersección de las rectas corresponde al punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que tienen en común, es decir, es el punto que satisface ambas ecuaciones.

Teorema. Las ecuaciones lineales simultáneas

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned}$$

tienen solución única (x, y) si y sólo si $ad - cb \neq 0$. Al conjunto anterior que contiene dos ecuaciones con dos incógnitas se le conoce como sistema de ecuaciones lineales.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede solucionarse con diferentes métodos, a veces, es más fácil proceder con alguno en específico.

- **Sustitución:** Dadas las dos ecuaciones del sistema, se puede despejar una variable de alguna ecuación para después sustituirla en la otra ecuación. De esta forma, se obtiene una nueva ecuación en términos de una sola variable, obteniendo así su valor. Para obtener el valor de la otra variable se sustituye el valor encontrado en la primera ecuación previamente despejada.
- **Reducción:** Se recomienda usar este método cuando algún término que contenga alguna variable sea proporcional en las dos ecuaciones. Identificando esa proporción, se puede operar una de las ecuaciones para obtener dos ecuaciones con un término similar, pero con signo contrario. Ambas ecuaciones se suman y se obtiene una nueva ecuación en términos de solo una variable. El valor de la otra variable se obtiene sustituyéndolo en alguna de las ecuaciones.
- **Igualación:** Se despeja una variable de ambas ecuaciones, se igualan los resultados obtenidos y así se obtiene una nueva ecuación escrita en términos de una sola variable, donde el valor de la misma se puede encontrar con un despeje. Para obtener el valor de la otra variable, se sustituye el valor encontrado en alguna de las ecuaciones.

- **Determinantes:** En este método se plantea el problema desde el álgebra de matrices. A partir de un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned}$$

se considera el determinante principal $\Delta p = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, y los determinantes auxiliares

$\Delta x = \begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix} = rd - bs$ y $\Delta y = \begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix} = as - rc$. De esta forma las soluciones están dadas por

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{rd - bs}{ad - bc}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta p} = \frac{as - rc}{ad - bc}.$$

Por ejemplo: dos familias cuentan con perros y gatos de mascotas y quieren estimar la cantidad de croquetas que consumen en una semana. La primera familia alimenta a un perro y siete gatos con 15 kg de croquetas, mientras que la segunda alimenta a tres perros y cuatro gatos con 11 kg de croquetas. La variable P representa la cantidad de alimento que consume cada perro y G , la cantidad de alimento que consume cada gato. El sistema de ecuaciones lineales se constituye de dos ecuaciones, una por familia:

$$\begin{aligned} P + 7G &= 15, \\ 3P + 4G &= 11. \end{aligned}$$

Entonces, la solución por medio de cada método se muestra a continuación.

- **Sustitución.** De la primera ecuación se despeja la variable P , obteniendo $P = 15 - 7G$; esta se sustituye en la segunda, se obtiene $3(15 - 7G) + 4G = 11$; se simplifica para obtener $G = 2$; este resultado se sustituye en la primera ecuación y se obtiene $P = 1$.
- **Reducción.** Se multiplica la primera ecuación por -3 , se obtiene $-3P - 21G = -45$; esta ecuación se suma a la segunda, eliminando el término que contiene la variable P , esto es, $(4 - 21)G = (11 - 45)$, se obtiene $G = 2$; la variable P se calcula directamente de la sustitución de G en cualquier ecuación, se obtiene $P = 1$.
- **Igualación.** De ambas ecuaciones se despeja P , obteniendo $P = 15 - 7G$ y $P = \frac{11}{3} - \frac{4}{3}G$; al igualarlas se obtiene la ecuación $15 - 7G = \frac{11}{3} - \frac{4}{3}G$; se simplifica para obtener $G = 2$; este resultado se sustituye en cualquier ecuación obtenida en el primer paso, se obtiene $P = 1$.
- **Determinantes.** Con la notación establecida previamente, se escribe $a = 1$, $b = 7$, $r = 15$, $c = 3$, $d = 4$ y $s = 11$; el determinante principal es $\Delta p = (1 \cdot 4) - (7 \cdot 3) = -17$; los determinantes auxiliares son $\Delta P = (15 \cdot 4) - (7 \cdot 11) = -17$ y $\Delta G = (1 \cdot 11) - (15 \cdot 3) = -34$; finalmente, $P = \frac{\Delta P}{\Delta p} = \frac{-17}{-17} = 1$ y $G = \frac{\Delta G}{\Delta p} = \frac{-34}{-17} = 2$.

Por lo tanto, cada perro consume 1 kg de croquetas y cada gato 2 kg de croquetas.

1.21 Ecuaciones de segundo grado

Considere un polinomio de segundo grado $p(x)$, al igualarse a cero se obtienen dos soluciones, no necesariamente diferentes, llamadas *ceros de la función* (pueden ser números reales o complejos). Gráficamente, se están encontrando los puntos donde la gráfica de $p(x)$ atraviesa el eje x . La ecuación resultante es de segundo grado, se puede escribir como

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde los valores x_1 y x_2 que dan solución a la ecuación están dados por la *fórmula general*

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}),$$

y cuando $b^2 < 4ac$, las soluciones a la ecuación son números complejos \mathbb{C} .

La gráfica de los polinomios de segundo grado es una parábola y las soluciones a la ecuación general representan los puntos en donde la parábola atraviesa el eje x , su *vértice* tiene coordenadas

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, p\left(\frac{-b}{2a}\right) \right).$$

Si el vértice se encuentra en el origen de coordenadas, entonces también es el único cero de la función que representa a la parábola. Una parábola se abre hacia alguna dirección, se dice entonces que es cóncava en esa dirección: por ejemplo, la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$ es cóncava hacia arriba (Ver **Ilustración 39**); mientras que la gráfica de $q(x) = -x^2$ es cóncava hacia abajo.

Por ejemplo, considere la siguiente ecuación cuadrática y su representación gráfica.

$$x^2 - 6x - 8y = 7.$$

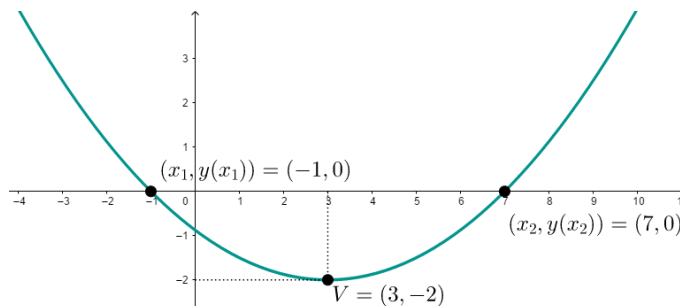


Ilustración 31. Elementos de la parábola.

Se busca escribir la variable y en función de x , es decir, $y(x)$. Se multiplica la ecuación por $\frac{1}{8}$, posteriormente se suma y de ambos lados de la ecuación y, finalmente, se resta $\frac{7}{8}$ por ambos lados de la ecuación; se obtiene la función

$$y(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}.$$

Con ayuda de la fórmula general se pueden obtener sus raíces, tomando $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{3}{4}$ y $c = -\frac{7}{8}$:

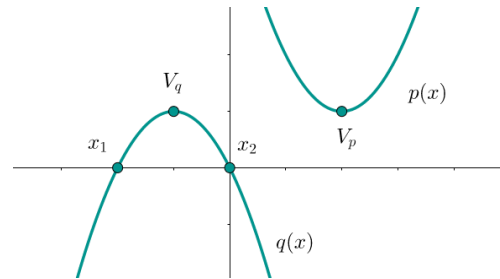


Ilustración 30. Dos parábolas $p(x)$ y $q(x)$ con sus respectivos vértices V_p y V_q . La parábola $q(x)$ tiene dos ceros, mientras que $p(x)$ no tiene.

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \frac{1}{2\left(\frac{1}{8}\right)} \left(-\left(-\frac{3}{4}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{7}{8}\right)} \right) \\
 &= 4 \left(\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{7}{16}} \right) \\
 &= 4 \left(\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{9+7} \right) = 3 \pm \sqrt{16}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_1 = 3 + 4 = 7$ y $x_2 = 3 - 4 = -1$ son los puntos donde la parábola cumple $y(x_1) = y(x_2) = 0$.

Las coordenadas del vértice son:

$$\begin{aligned}
 V_x &= -\frac{-\frac{3}{4}}{2\left(\frac{1}{8}\right)} = 3\left(\frac{8}{2 \cdot 4}\right) = 3, \\
 V_y &= y(3) = \frac{1}{8}(3)^2 - \frac{3}{4}(3) - \frac{7}{8} = -2,
 \end{aligned}$$

por lo tanto, $V = (3, -2)$ (ver Ilustración 31).

1.22 Secciones cónicas

1.22.1 Secciones cónicas como lugares geométricos

El *lugar geométrico* de los puntos P tales que su distancia a un punto fijo F es proporcional a su distancia a una recta fija ℓ , es llamado cónica. La constante de proporcionalidad e se conoce como *excentricidad*. Si $e = 1$ la cónica es una *parábola*, si $0 < e < 1$ es una *elipse* y si $e > 1$ se llama *hipérbola*. Además, la *circunferencia* es el lugar geométrico de los puntos que equidistan una distancia fija r a un punto fijo O .

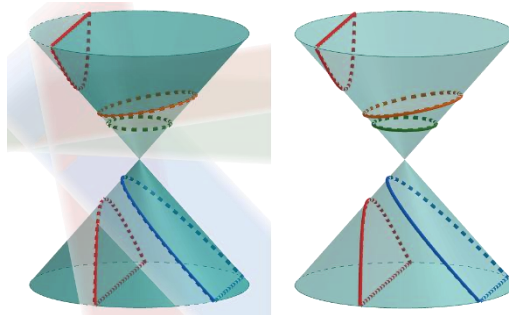


Ilustración 32. Se muestran cinco posibles planos que pueden cruzar un cono, formando cinco diferentes curvas, conocidas como *secciones cónicas*: de rojo, la hipérbola; de azul, la parábola; de verde, la circunferencia; de anaranjado, la elipse.

1.22.2 Elementos de las secciones cónicas

Ahora, considere las secciones cónicas inmersas en \mathbb{R}^2 , las ecuaciones implícitas de las secciones cónicas se exponen a continuación.

- **Parábola:**

Es el conjunto de todos los puntos que equidistan de una recta fija y de un punto fijo que no está sobre dicha recta.

- Cuando su eje es paralelo al eje x satisface la ecuación

$$(y - k)^2 = 4p \cdot (x - h),$$

tiene vértice $V = (h, k)$, foco $F = (h + p, k)$ y directriz $x - h = -p$. Si $p > 0$ el foco está a la derecha del vértice y la parábola se abre a la derecha, si $p < 0$, el foco está a la izquierda de vértice y la parábola se abre a la izquierda.

- Cuando su eje es paralelo al eje y satisface la ecuación

$$(x - h)^2 = 4p \cdot (y - k),$$

tiene vértice $V = (h, k)$, foco $F = (h, k + p)$ y directriz $y - k = -p$. Si $p > 0$ el foco está por encima del vértice y la parábola se abre hacia arriba, si $p < 0$, el foco está debajo del vértice y la parábola se abre hacia abajo.

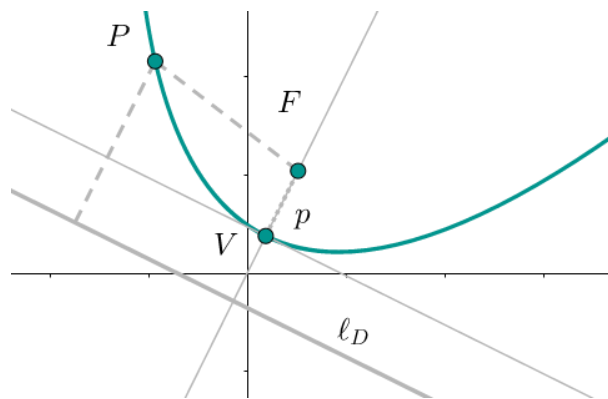


Ilustración 33. Parábola.

- **Elipse:**

Es el conjunto de todos los puntos con la propiedad de que la suma de las distancias de los puntos del conjunto a dos puntos fijos dados es una constante.

- Si su eje mayor es paralelo al eje x , satisface la ecuación

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1,$$

tiene centro $F_0 = (h, k)$, focos $F_1 = (h - c, k)$ y $F_2 = (h + c, k)$, vértices $V_1 = (h - a, k)$ y $V_2 = (h + a, k)$ y extremos del eje menor $B_1 = (h, k - b)$ y $B_2 = (h, k + b)$.

Particularmente, si $(h, k) = (0, 0)$ satisface la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- Cuando su eje mayor es paralelo al eje y satisface la ecuación

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1,$$

tiene centro $F_0 = (h, k)$, focos $F_1 = (h, k - c)$ y $F_2 = (h, k + c)$, vértices $V_1 = (h, k - a)$ y $V_2 = (h, k + a)$ y extremos del eje menor $B_1 = (h + b, k)$ y $B_2 = (h - b, k)$. Particularmente, si $(h, k) = (0, 0)$, satisface la ecuación $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

- En cualquier caso, $a^2 = b^2 + c^2$ ($a > b$) es el cuadrado de la distancia de B_2 a F_2 .

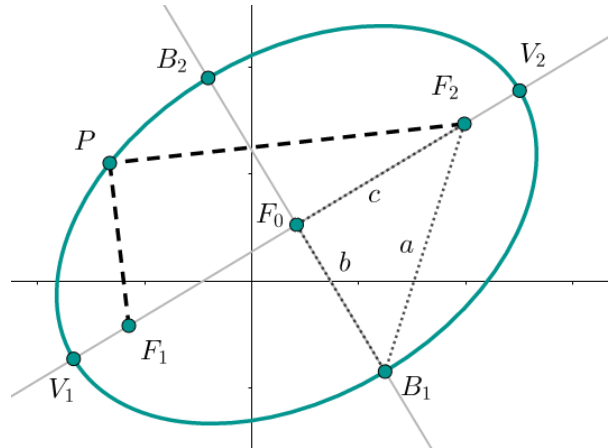


Ilustración 34. Elipse.

- **Hipérbola:**

Es el conjunto de todos los puntos con la propiedad de que la diferencia de las distancias de los puntos del conjunto a dos puntos fijos dados es, en valor absoluto, una constante.

- Cuando su eje es paralelo al eje x , Satisface la ecuación

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1.$$

tiene centro $F_0 = (h, k)$, focos $F_1 = (h - c, k)$ y $F_2 = (h + c, k)$, vértices $V_1 = (h - a, k)$ y $V_2 = (h + a, k)$, extremos de los ejes conjugados $B_1 = (h, k - b)$ y $B_2 = (h, k + b)$ y asíntotas $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$. Particularmente, si $(h, k) = (0, 0)$, entonces se tiene la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- Cuando su eje es paralelo al eje y , Satisface la ecuación

$$-\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1.$$

tiene centro $F_0 = (h, k)$, focos $F_1 = (h, k - c)$ y $F_2 = (h, k + c)$, vértices $V_1 = (h, k - a)$ y $V_2 = (h, k + a)$, extremos de los ejes conjugados $B_1 = (h + b, k)$ y $B_2 = (h - b, k)$ y asíntotas $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$. Particularmente, si $(h, k) = (0, 0)$, entonces se tiene la ecuación $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

- En cualquier caso, $c^2 = a^2 + b^2$ es el cuadrado de la distancia del centro a cualquier foco.

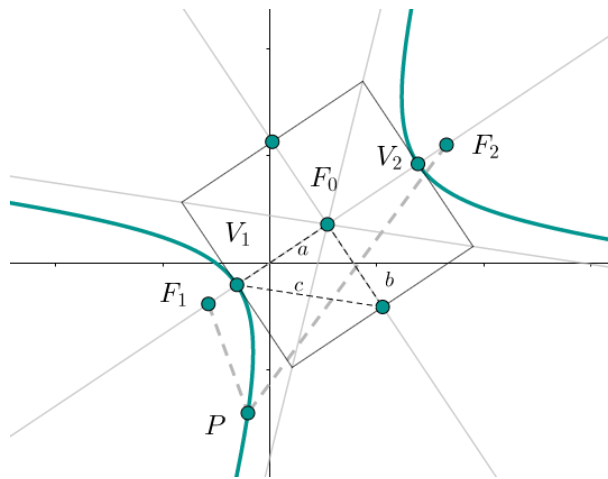


Ilustración 35. Hipérbola.

- **Circunferencia:**

Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan una distancia fija r a un punto fijo.

- Si $P_0 = (0, 0)$, entonces su ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$. Y si su centro es $P_0 = (h, k)$, el radio es r y un punto sobre ella $P = (x, y)$ satisface la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$.

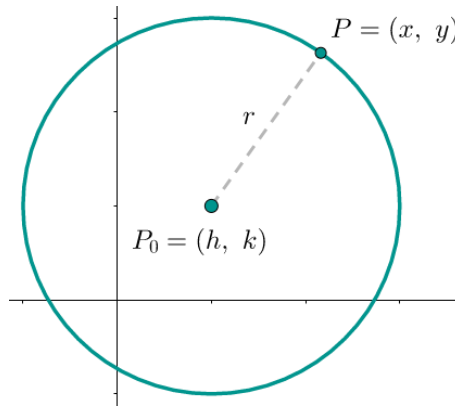


Ilustración 36. Circunferencia.

El siguiente resultado ayuda a analizar las secciones cónicas desde una ecuación general.

Teorema. *La ecuación cuadrática*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

*es la ecuación de una **elipse** si $B^2 - AC < 0$, una **parábola** si $B^2 - AC = 0$ y una **hipérbola** si $B^2 - AC > 0$, de dónde A, B y C no son todos cero. Además, si $A = C$ y $B = 0$, entonces es la ecuación de una **circunferencia**. Al número $I = B^2 - AC$ se le llama **discriminante**.*

Por ejemplo, considere la ecuación general

$$20x^2 - 20y^2 - 80x + 240y + 320 = 0.$$

Con la notación del teorema anterior se escribe $A = 20, B = 0, C = -20, D = 80, E = 240$ y $F = 320$; el discriminante está dado por $I = B^2 - 4AC = (0) - 4 \cdot (20) \cdot (-20) = 160 > 0$, entonces la ecuación

corresponde a una *hipérbola*. Para obtener la ecuación implícita y todos los elementos de la hipérbola se propone el siguiente procedimiento

1. Por practicidad, se reordena la ecuación como $(20x^2 - 80x) - (20y^2 - 240y) = -320$, de tal forma que los términos cuadráticos que se encuentran dentro de los paréntesis sean positivos.
2. De ambos paréntesis se puede factorizar 20, para obtener

$$20(x^2 - 4x) - 20(y^2 - 12y) = -320.$$

Note que ambos paréntesis contienen parcialmente una ecuación de segundo grado, entonces se busca completar los cuadrados, y así obtener dos números tales que ambas ecuaciones sean factorizables.

- Para ello, es útil recordar que el resultado que se busca es de la forma $(x + a)^2$, como se cuenta con los primeros dos términos de dicho polinomio, se puede escribir,

$$(x + a)^2 = \underbrace{x^2 - 4x}_{\text{paréntesis}} + a^2 = x^2 + 2 \underbrace{(-2)}_a x + a^2,$$

de esta forma se obtiene que $a = -2$; por lo que el primer paréntesis se puede escribir como $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$. Note que en el desarrollo anterior se utilizó la fórmula del binomio cuadrado (Ver ejemplo en **Procedimientos algebraicos**)

- Análogamente, se puede escribir $y^2 - 12y = (y - 6)^2 - 36$.

La ecuación $20(x^2 - 4x) - 20(y^2 - 12y) = -320$ es equivalente a $20((x - 2)^2 - 4) - 20((y - 6)^2 - 36) = -320$, de donde se pueden extraer los términos numéricos para obtener $20(x - 2)^2 - 20(y - 6)^2 - 80 + 720 = -320$. Por lo tanto, se obtiene

$$20(x - 2)^2 - 20(y - 6)^2 = -960.$$

Para obtener la ecuación de la cónica en su forma simplificada se divide la ecuación anterior por -960 , obteniendo

$$\frac{20(x - 2)^2}{-960} - \frac{20(y - 6)^2}{-960} = \frac{-960}{-960},$$

$$-\frac{(x - 2)^2}{48} + \frac{(y - 6)^2}{48} = 1.$$

A partir de la ecuación anterior se puede deducir que la hipérbola tiene su eje mayor paralelo al eje y , pues el término que contiene a la variable x es negativo (Ver **Hipérbola**:).

3. De la ecuación $-\frac{(x-2)^2}{48} + \frac{(y-6)^2}{48} = 1$ se rescatan los valores numéricos:
 - $h = 2$,
 - $k = 6$,
 - $a = b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$,
 - $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.

Y los elementos de la hipérbola se calculan como sigue:

- Centro:
 - $F_0 = (h, k) = (2, 6)$.
- Focos:
 - $F_1 = (h, k - c) = (2, 6 - 4\sqrt{6})$,
 - $F_2 = (h, k + c) = (2, 6 + 4\sqrt{6})$.
- Vértices:
 - $V_1 = (h, k - a) = (2, 6 - 4\sqrt{3})$,

- $V_2 = (h, k + a) = (2, 6 + 4\sqrt{3})$.
- Extremos de los ejes conjugados:
 - $B_1 = (h + b, k) = (2 + 4\sqrt{3}, 6)$,
 - $B_2 = (h - b, k) = (2 - 4\sqrt{3}, 6)$.
- Asíntotas, $y = \pm \frac{a}{b}(x - h) + k = \pm(x - 2) + 6$
 - $y = x + 4$,
 - $y = -x + 8$.

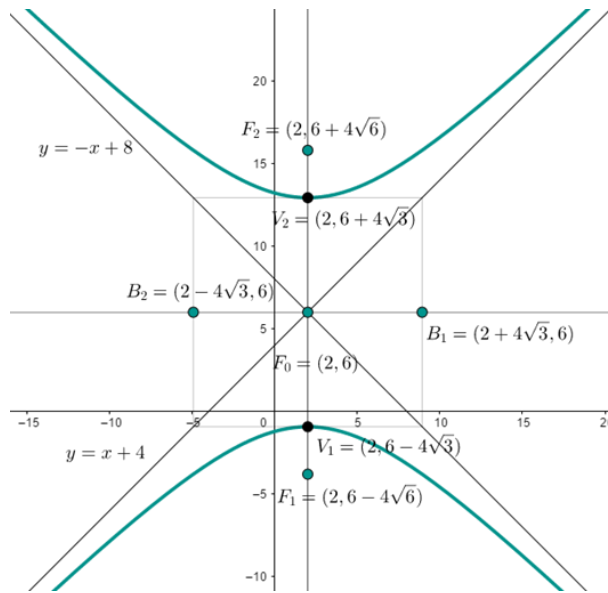


Ilustración 37. Elementos obtenidos de la hipérbola de ecuación $-\frac{(x-2)^2}{48} + \frac{(y-6)^2}{48} = 1$.

1.23 Funciones reales de variable real

1.23.1 Elementos de una función

Una función f es una *regla de correspondencia* entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primer conjunto un único elemento del segundo conjunto. Se define:

- El *dominio* de f , denotado por Dom_f , como el conjunto de todos los a para los que existe un único número b tal que $b = f(a)$.
- El *condominio* de f , denotado por Cod_f , como aquel conjunto donde caen los elementos de la función.
- La *imagen* de f , denotada por Im_f , como el conjunto dado por todos los $b = f(a)$.

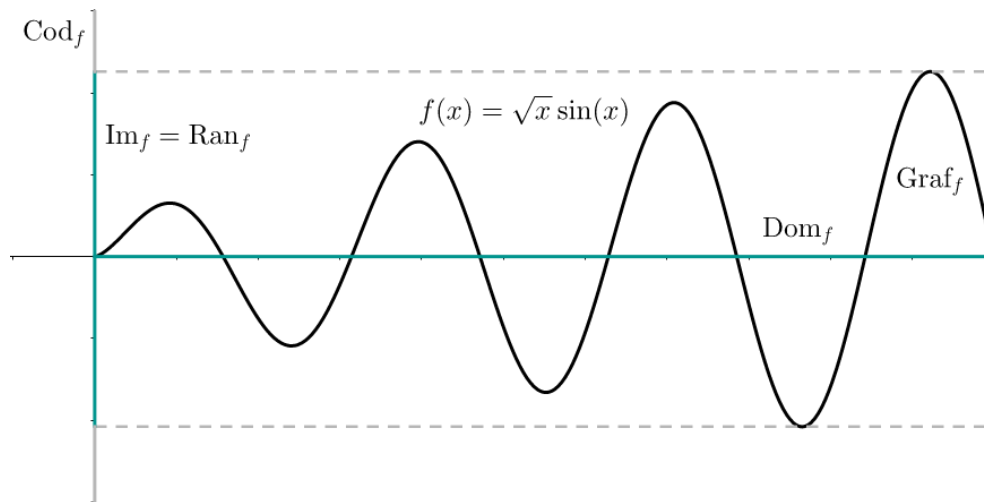


Ilustración 38. Función $f(x) = \sqrt{x} \sin(x)$, en donde se muestra: dominio, $(0, \infty)$; codominio, \mathbb{R} ; imagen (o rango), y gráfica. Esta función está definida para todo número real mayor o igual a cero, pues la raíz cuadrada de un número negativo no está definida dentro del conjunto de los números reales.

En resumen, una función sigue la regla de correspondencia

$$f: \text{Dom}_f \rightarrow \text{Im}_f \subseteq \text{Cod}_f.$$

Una función f es *real y de variable real* si toma valores en el conjunto de los números reales y devuelve un número real, es decir, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces:

- La *gráfica* de f es

$$\text{Graf}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

- El *rango* de f es

$$\text{Ran}_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x)\}.$$

Note que el rango es igual a la imagen para funciones reales de variable real.

1.23.2 Simetría, funciones crecientes y decrecientes

Se dice que una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- Es **par** si $f(x) = f(-x)$.

Por ejemplo, $p(x) = x^2$ es par, ya que $p(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2 = p(x)$. La gráfica es simétrica respecto al eje y (una reflexión sobre el eje y).

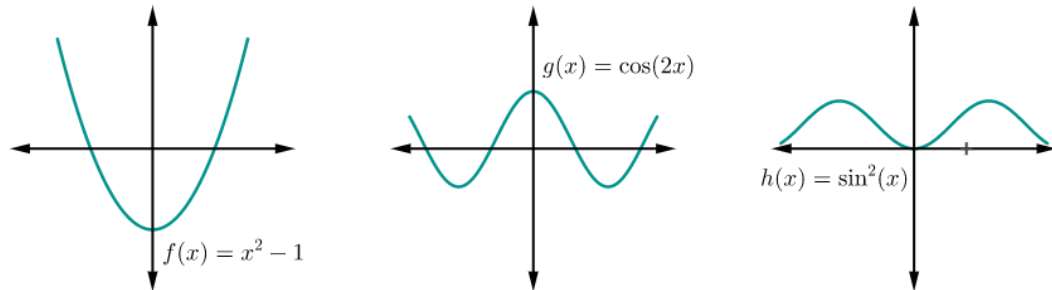


Ilustración 39. Ejemplos de funciones pares. De acuerdo con la Ilustración 22, el coseno representa el valor de cateto adyacente, el cual no cambia si se cambia el signo del ángulo, es decir, $\cos(-x) = \cos(x)$, entonces $g(-x) = \cos(2(-x)) = \cos(-2x) = \cos(2x) = g(x)$.

- Es **impar** si $f(x) = -f(-x)$.

Por ejemplo, $q(x) = x^3$ es impar, ya que $-q(-x) = -(-x)^3 = -(-1)^3 x^3 = -(-1)x^3 = x^3 = q(x)$. La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas (una doble reflexión; una sobre el eje y y otra sobre el eje x).

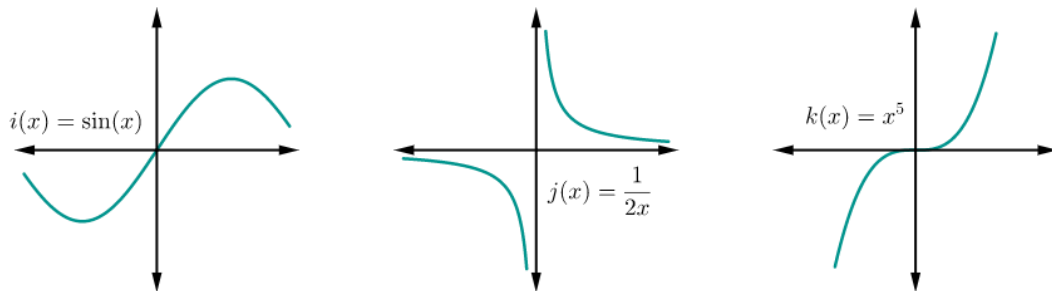


Ilustración 40. Ejemplos de funciones impares. A partir de la Ilustración 22, el seno de x representa el valor del cateto adyacente, el cual es negativo, pues se encuentra debajo del eje horizontal, esto es, $\sin(-x) = -\sin(x)$, entonces, $-i(-x) = -2 \sin(-x) = -2(-\sin(x)) = 2 \sin(x) = i(x)$.

Ahora se considera una función definida sobre un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, es decir, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, además sean $p, q \in (a, b)$ tales que $p < q$. La función f es **creciente** en el intervalo si $f(p) < f(q)$, por el contrario, se dice que es **decreciente** si $f(p) > f(q)$.

Por ejemplo (Ver Ilustración 39 y Ilustración 40).

- $k(x) = x^5$ es creciente en todos los reales.
- $j(x) = \frac{1}{2x}$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- $f(x) = x^2 - 1$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.

1.23.3 Tipos de funciones

Las funciones se clasifican en dos grupos, las algebraicas y las trascendentales.

Funciones *algebraicas*: la variable es manipulada con operaciones algebraicas, tales como la suma, multiplicación, etc.

- **Polinomios de grado n** : Son aquellas sumas de potencias de la variable, es decir, $p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

donde a_0, a_1, \dots, a_n se llaman coeficientes del polinomio.

- $n = 0$. Corresponden a las funciones constantes, es decir, $f_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ para todo x .
 - $n = 1$. Son aquellas de la forma $f(x) = a_0 + a_1x$. Comúnmente, se les llama funciones lineales.
 - Sí $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ entonces se trata de la *función identidad* $\text{Id}(x) = x$.
 - Sí $a_0 = 0$ entonces se trata de una *función de proporcionalidad* (Ver 1.5), $f(x) = a_1x$, donde la constante de proporcionalidad es a_1 .
 - $n = 2$. Se conocen como funciones cuadráticas $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
- **Racionales**: Son de la forma $\frac{f(x)}{g(x)}$ donde $g(x) \neq 0$ para algunos valores de x .
- **Irracionales**: Son aquellas funciones que son de tipo polinomial, tienen a la variable involucrada con una raíz, por lo menos una vez, es decir, son de la forma $\sqrt[n]{f(x)}$ para algún $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. A n se le conoce como el índice de la raíz y a la función $f(x)$ se le conoce como radicando, esta puede ser una función de cualquier tipo.

Funciones *trascendentales*, la variable se opera mediante exponenciales, logaritmos, valores trigonométricos, etc.

- **Trigonométricas.**
 - *Clásicas*. Alguna de las funciones trigonométricas, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\csc(x)$, $\cot(x)$ o $\sec(x)$, es operada algebraicamente o donde la x también sea operada algebraicamente.
 - *Arcos*: Alguna de las funciones trigonométricas inversas, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, $\text{arccsc}(x)$, $\text{arccot}(x)$ o $\text{arcsec}(x)$, es operada algebraicamente o donde la variable también es operada algebraicamente.
- **Exponenciales**: Están dadas por $f_a(x) = a^x$ para algún $a \in \mathbb{R}$.
 - Particularmente, la *función exponencial* es aquella donde

$$a = e \approx 2.718281828 \dots \in \mathbb{I},$$
 es decir, $f_e(x) = \exp(x) = e^x$.
- **Logarítmicas**: Aparece algún logaritmo con base $a \in \mathbb{R}$, es decir, $f_a(x) = \log_a(x)$.
 - El *logaritmo base 10* es $f_{10}(x) = \log_{10}(x) = \log(x)$.
 - Si $a = e$, entonces se trata de la función *logaritmo natural* $\ln(x) = \log_e(x)$.
 - Las funciones exponenciales y logarítmicas son inversas una de la otra, es decir,

$$\log_a(a^x) = \text{Id}(x) \Leftrightarrow a^{\log_a(x)} = \text{Id}(x).$$
 - Las propiedades algebraicas de los logaritmos son las siguientes:
 - Producto de números: $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$.
 - División de números: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$.

- Potencia: $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$.
- $\log_a(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

1.23.4 Logaritmos como funciones de procesos naturales

Considere las siguientes situaciones.

- Una población de 36 capibaras (*Hydrochoerus hydrochaeris*) siguió el patrón de crecimiento poblacional 6^t , donde el tiempo t está medido en años. Para saber la antigüedad de la población se realiza lo siguiente:

1. Como $36 = 6^2$, se puede escribir la ecuación $6^t = 6^2$.

2. Se aplica la función logaritmo (base 6) de ambos lados, es decir,

$$\log_6(6^t) = \log_6(6^2).$$

3. Al usar la propiedad de la potencia y considerando que $\log_a(a) = 1$ se obtiene que $t = 2$ años es el tiempo de antigüedad de la población de capibaras, en efecto:

$$\log_6(6^t) = \log_6(6^2) \Rightarrow t \cdot \underbrace{\log_6(6)}_{=1} = 2 \cdot \underbrace{\log_6(6)}_{=1}.$$

Note que la última ecuación también se puede simplificar dividiendo de ambos lados por $\log_6(6)$, pero se hace énfasis en el uso de la propiedad $\log_6(6) = 1$.

- Los planetas, estrellas e incluso galaxias pueden ser visibles desde la Tierra debido a su brillo en el cielo. Para medir este brillo, se utiliza un sistema de magnitudes (m) definido en una escala logarítmica.

En el siglo II a.C., Hiparco de Nicea definió seis clases de brillo (actualmente magnitudes aparentes) para clasificar el brillo de 1 000 estrellas. En esta escala, la clase uno agrupaba a las estrellas más brillantes en el cielo, mientras que la clase seis incluía a las estrellas de brillo más tenue. Posteriormente, en 1859, Norman Robert Pogson estableció que la diferencia de brillo entre dos magnitudes es equivalente a $\sqrt[5]{100} = 2.512$, que actualmente se redondea a 2.5.

La magnitud aparente (m) de un objeto astronómico se define en términos de su brillo percibido desde la Tierra. Sin embargo, este brillo depende de la distancia a la que se encuentra el objeto. Por lo tanto, se introduce la magnitud absoluta (M), que indica el brillo intrínseco de un objeto, es decir, el brillo que tendría a una distancia igual a 10 parsecs (pc). Un Parsec se define como una distancia igual a 3.085×10^{13} km.

El *Sol* tiene una magnitud aparente $m_{\odot} = -26.74$ y una magnitud absoluta $M_{\odot} = 4.83$, mientras que la estrella *Betelgeuse* (α *Orionis*) tiene $m_{\alpha O} = 0.5$ y $M_{\alpha O} = -5.47$.

Ambas magnitudes (m y M) están relacionadas con la distancia a la que se encuentra un objeto (d), medida en Parsecs, por medio de la ecuación conocida como *módulo de distancia*:

$$m - M = 5 \cdot \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right).$$

La distancia se obtiene de la siguiente manera.

1. El logaritmo de la fracción se simplifica como

$$\log_{10} \left(\frac{d}{10} \right) = \log_{10}(d) - \underbrace{\log_{10}(10)}_{=1} = \log_{10}(d) - 1$$

donde el último término es igual a 1, pues la base es igual a la cantidad a la cual se aplica la función logarítmica. Entonces, como $m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10} \right)$, se satisface la ecuación

$$m - M = 5 \log_{10}(d) - 5.$$

2. Se libera la función logarítmica sumando de ambos lados un 5 y dividiendo por 5 (estrictamente en ese orden), esto es

$$m - M = 5 \log_{10}(d) - 5$$

$$\Rightarrow \frac{m - M + 5}{5} = \frac{5 \log_{10}(d) - 5 + 5}{5},$$

y simplificando, se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{5}(m - M) + 1 = \log_{10}(d).$$

3. Finalmente, se aplica la función exponencial 10^x

$$\frac{1}{5}(m - M) + 1 = \log_{10}(d)$$

$$\Rightarrow 10^{\frac{1}{5}(m-M)+1} = \underbrace{10^{\log_{10}(d)}}_{=Id(d)=d}$$

y se obtiene la expresión buscada

$$d = 10^{\frac{1}{5}(m-M)+1}.$$

El Sol tiene magnitud aparente $m_{\odot} = -26.7$ y magnitud absoluta $M_{\odot} = 4.8$, entonces su distancia a la tierra está dada por la cantidad

$$d_{\odot} = 10^{\frac{1}{5}(m_{\odot}-M_{\odot})+1}$$

$$= 10^{\frac{1}{5}(-26.74-4.83)+1}$$

$$\approx 5.011 \times 10^{-7} \text{ pc.}$$

Para escribir el resultado en kilómetros se considera que $1 \text{ pc} = 3.085 \times 10^{13} \text{ km}$:

$$d_{\odot} \approx 5.011 \times 10^{-7} \text{ pc}$$

$$\approx 5.011 \times 10^{-7} \cdot \underbrace{(3.085 \times 10^{13} \text{ km})}_{1 \text{ pc}}$$

$$\approx 1.497 \times 10^8 \text{ km.}$$

Note que los cambios de unidades, tanto en la física o en cualquier otra disciplina, consisten en sustituir el valor unitario de la unidad que se desea cambiar (en este caso, 1 pc) a partir de su definición en las unidades en las que se desea ver el resultado ($3.085 \times 10^{13} \text{ km}$), sin importar si la unidad se encuentra dentro de una fracción (en el denominador o el numerador).

1.24 Límites de funciones

Sea $f: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en algunos puntos del intervalo abierto, es decir, $\text{Dom}_f \subseteq (a, b)$. Se considera $c \in (a, b)$ (no necesariamente en el dominio de f) y sea $l \in \mathbb{R}$. Si *la función f se aproxima al límite l cerca de $x = c$* , entonces $f(x)$ se aproxima tanto como se quiera a l siempre y cuando x se aproxime a c , siendo distinto de c . Este hecho se escribe como:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l.$$

Cuando la función no se aproxima a ningún número, se dice que *el límite no existe*. Note que no necesariamente debe de estar definido el valor $f(c)$, como se puede apreciar a continuación. En las tres gráficas superiores las funciones están definidas de tal forma que $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe y es igual a l , sin embargo, dicho límite no existe para las tres funciones inferiores.

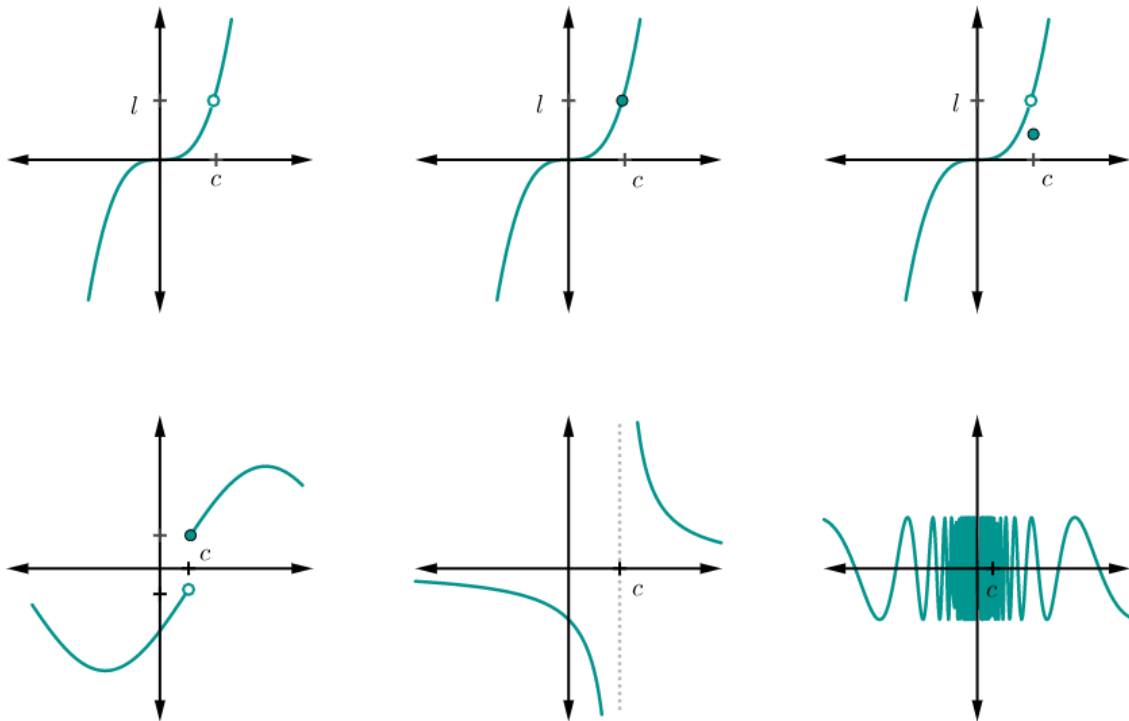


Ilustración 41. Se presentan seis posibles casos para el límite de una función, donde el punto vacío representa un hueco en la gráfica de la función, mientras que los puntos rellenos si están definidos. *Izquierda superior*, la función no está definida para $x = c$, sin embargo, los límites derecho e izquierdo de la función cuando $x \rightarrow c$ existen y son iguales a l ; *centro superior*, la gráfica es continua en c ; *derecha superior*, la función si está definida en $x = c$, pero no es continua en dicho punto, sin embargo, los límites derecho e izquierdo de la función cuando $x \rightarrow c$ existen y son iguales a l . *Izquierda inferior*, los límites derecho e izquierdo de la función son diferentes, por lo que no existe; *centro inferior*, la función tiende a $+\infty$ o $-\infty$ cuando $x \rightarrow c$ por la derecha o la izquierda respectivamente; *derecha inferior*, la función no se aproxima a ningún límite para un valor muy pequeño de c .

Sean b y c dos números reales y n un entero positivo, además, considere f y g funciones: la siguiente tabla las reglas más importantes para la resolución de límites.

Situación	Límite	
Función continua	Si la función f es continua en c $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$	
Función constante	$\lim_{x \rightarrow c} a = a$	
Función identidad	$\lim_{x \rightarrow c} \text{Id}(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = \text{Id}(c) = c$	
Linealidad de límites	$\lim_{x \rightarrow c} [b \cdot f(x) \pm g(x)] = b \cdot \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x) = b \cdot l + r$	
Producto de límites	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = l \cdot r$	
Cociente de límites	$\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{l}{r}$	
Potencia de un límite	$\lim_{x \rightarrow c} f^n(x) = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^n = l^n$	
Radical de un límite	$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f^{\frac{1}{n}}(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} \\ &= \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$	
Casos comunes (Si $k \in \mathbb{R}$)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^n} = 0$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k^x = \pm\infty$

Tabla 11. Reglas para operar límites de funciones y algunos límites que conviene recordar.

De los ejemplos de funciones mostrados anteriormente, se puede afirmar lo siguiente.

- La función $j(x) = \frac{1}{2x}$ (Ver **Ilustración 40**). El $\lim_{x \rightarrow 0} j(x)$ no existe, pero si se toma cualquier otro límite, por ejemplo $x = 6$ se tiene que el $\lim_{x \rightarrow 6} j(x) = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2(6)} = \frac{1}{12}$.
- La función e^{-x} . El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$. En particular se cumple que, para cualquier número $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^{-x} = 0$.
- La función $s(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (Ver **Ilustración 41**, gráfica a la derecha y abajo). El límite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe, pues la función no se aproxima a ningún valor del intervalo $[-1, 1]$.

1.25 Razón de cambio y derivada de una función

La *razón de cambio promedio* es una magnitud que expresa qué tanto se modifica una variable (y) respecto a otra variable (x), es decir, es una medida de proporción que compara dos cantidades a partir de sus módulos de cambio Δy y Δx ; en el intervalo $[x_1, x_2]$ está dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si se considera que y es función de x , es decir, $y = f(x)$, se escribe la razón de cambio promedio de la función $f(x)$ en el intervalo $[x_1, x_2]$ como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Por ejemplo: la velocidad es una razón de cambio entre la distancia recorrida por un cuerpo y el tiempo que este se tardó en recorrer dicha distancia, esto es, $v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$; la aceleración corresponde a la razón de cambio entre la velocidad que un cuerpo posee respecto al tiempo que transcurre para llevar a cabo dicho cambio de velocidad, se tiene que $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

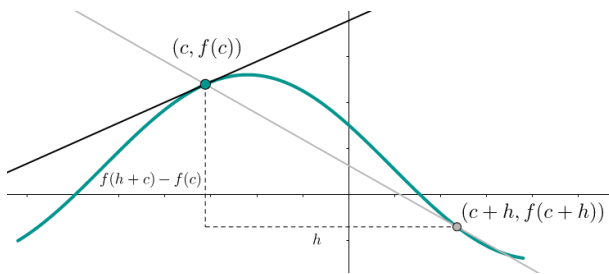


Ilustración 42. Gráfica de la función f y su recta tangente, ubicada en el punto $(c, f(c))$. Cuando $h \rightarrow 0$, el punto $(c+h, f(c+h))$ se aproxima a $(c, f(c))$, ocasionando que la recta gris se convierta en la recta tangente.

El concepto de derivada nace a partir de la obtención de una recta tangente a una función dada, para ello se considera la ecuación de la pendiente de una recta, la cuál es la razón de cambio entre el aumento en la variable x y el aumento en la variable y . Sea $f: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in (a, b)$. Entonces la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(c, f(c))$ está dada por la expresión

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

De esta forma se define la *derivada* de la función, denotada por $f'(x)$, como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

para todo valor x en donde el límite existe. La notación

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

representa a la derivada como la razón entre los cambios infinitesimales de las cantidades x y y . En otras disciplinas se acostumbra a representar a la derivada de una función con un punto “.” encima, es decir, $\dot{f}(x)$.

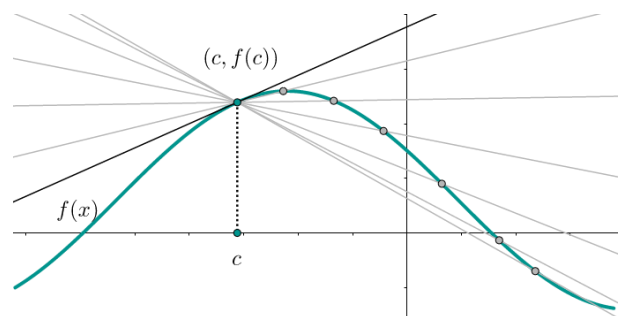


Ilustración 43. Derivada como caso límite de las rectas grises.

Para derivar funciones es conveniente utilizar las reglas de derivación que se muestran a continuación, para ello, considere f y g dos funciones reales de variable real.

Nombre	Derivada
Regla de la constante	Dado un número $c \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}(c) = 0$
Regla de la función identidad	$\frac{d}{dx}(\text{Id}(x)) = \frac{d}{dx}(x) = 1$
Regla de la potencia	Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
Linealidad de la derivada	Dado un número $c \in \mathbb{R}$ $\frac{d}{dx}(c \cdot f(x) \pm g(x)) = c \cdot \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$
Regla del producto	$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{df}{dx} \cdot g(x) + \frac{dg}{dx} \cdot f(x)$
Regla del cociente	$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{df}{dx} \cdot g(x) - \frac{dg}{dx} \cdot f(x)}{g^2(x)}$
Regla de la cadena	$\frac{d}{dx}((f \circ g)(x)) = \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Tabla 12. Formulaciones para realizar derivadas de funciones

Funciones	Derivada
Trigonométricas	$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x), \quad \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x),$ $\frac{d}{dx} \sec(x) = \sec(x) \cdot \tan(x), \quad \frac{d}{dx} \csc(x) = -\csc(x) \cdot \cot(x),$ $\frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x).$
Trigonométricas inversas	$\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Exponencial de b	<p>Para dos números cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$</p> $\frac{d}{dx} b^{ax} = a \cdot b^{ax}$
Función exponencial	<p>En particular, si $b = e$</p> $\frac{d}{dx} e^{ax} = a \cdot e^{ax}$
Logaritmo base a	$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
Logaritmo natural (logaritmo base e)	$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$

Tabla 13. Funciones especiales y sus reglas de derivación.

Por ejemplo, considere las funciones:

- $q(x) = 2x^5 - 5x^{-2} + 10$. Para derivarla, se utilizará la regla de la constante, de la potencia y la linealidad de la derivada (Ver **Tabla 12**)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (2x^5 - 5x^{-2} + 10) &= \frac{d}{dx} (2x^5) + \frac{d}{dx} (-5x^{-2}) + \underbrace{\frac{d}{dx} (10)}_{=0} \\ &= 2 \frac{d}{dx} (x^5) - 5 \frac{d}{dx} (x^{-2}) \\ &= 2(5x^4) - 5(-2x^{-3}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $q'(x) = 10(x^4 + x^{-3})$.

- $a(x) = e^{p(x)}$, para alguna función $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para derivar a la función $a(x)$, se identifica que hay dos funciones involucradas: $b(x) = e^x$ y $p(x)$. La regla de composición es

$$a(x) = b(p(x)),$$

Note que la función que está más “adentro” de la expresión mostrada es el polinomio $p(x)$, pues es la primera en evaluarse; seguida de la función exponencial $b(x)$. Con la regla de la cadena se escribe la derivada de $a(x)$ como:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dx} &= \frac{d}{dx} [b(p(x))] \\ &= b'(p(x)) \cdot p'(x). \end{aligned}$$

Como $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ y $\frac{dp}{dx} = p'(x)$, se escribe $a'(x) = p'(x) \cdot e^{p(x)}$.

- Sea $p(x) = \sin(x)$, como $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$, entonces se puede escribir la función $a(x) = e^{\sin(x)}$ y su derivada:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dx} &= p'(x) \cdot e^{p(x)} \\ &= \left(\frac{d}{dx} \sin(x) \right) \cdot e^{\sin(x)} \\ &= \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}. \end{aligned}$$

- Ahora, sea $p(x) = 2x^2 + 1$, entonces $\frac{dp}{dx} = 4x$, luego $a(x) = e^{2x^2+1}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{da}{dx} &= p'(x) \cdot e^{p(x)} \\ &= \frac{dp}{dx} \cdot e^{2x^2+1} \\ &= 4x \cdot e^{2x^2+1}. \end{aligned}$$

En general, cuando se deriva una función escrita como composición de otras funciones, es indispensable identificar las funciones involucradas, de tal forma de aplicar la regla de la cadena; posterior a dicha regla, se procede a aplicar las demás reglas de derivación. Para dominar dichas reglas, es necesario practicar con diferentes tipos de funciones

Una aplicación común de las derivadas o razones de cambio consiste en encontrar qué tanto cambia una cantidad respecto a su variable o a qué ritmo lo hace. Considere el siguiente ejemplo.

El fenómeno de la *radioactividad* fue descubierto por *Antoine Henri Becquerel* (1852 - 1908) en 1896, observando que las sales de uranio emiten radiación espontáneamente, a esta radiación se le conoció como rayos de Becquerel. Posteriormente, *Manya Sklodowska*, o mejor conocida como *Marie Curie* (1867 - 1934), junto con su esposo *Pierre Curie* (1859 - 1906) estudiaron los rayos de Becquerel del Uranio (U) contenido en un mineral de nombre *pechblenda* (UO_2); de esta forma lograron extraer dos elementos químicos desconocidos para la época: el Polonio (Po) y el Radio (Ra), ambos más *radioactivos* que el Uranio. Actualmente, se sabe que la *radioactividad*, o *desintegración radiactiva*, se debe a que los *núcleos atómicos inestables* pierden energía al emitir *radiación*.

En un material radioactivo, la cantidad de núcleos inestables está dada por la función $N(t)$, donde t es el tiempo, esto es, dicha función dictamina cuantos núcleos radioactivos se encuentran presentes dentro de un material en un instante determinado. Entonces, el *ritmo* (o *velocidad*) de la *desintegración radiactiva* corresponde al cambio en la cantidad de núcleos radioactivos respecto al tiempo, lo cual se representa con la expresión

$$\frac{dN}{dt}.$$

Mediante experimentos se ha comprobado que el ritmo al que ocurre la desintegración de los núcleos atómicos es negativo, esto se debe a que el núcleo está perdiendo energía, es decir,

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N(t) < 0,$$

donde λ es una constante de proporcionalidad; entonces $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ con N_0 la cantidad inicial de núcleos inestables.

Uno de los principales núcleos inestables que ha ayudado al desarrollo del conocimiento arqueológico y geológico es el *Carbono 14* (^{14}C), pues con su ayuda es posible conocer la antigüedad de los organismos fósiles que vivieron en el planeta. Las investigaciones proponen que la función que modela la desintegración radiactiva del ^{14}C está dada por

$$C(t) = c_0 \cdot e^{-0.000121 \cdot t},$$

donde el tiempo t se mide en años y c_0 es la cantidad inicial de átomos de ^{14}C , el cual depende de cada organismo o material orgánico. Mediante experimentos, es posible saber cuántos átomos de ^{14}C tiene un fósil y, de esta forma, conocer su antigüedad.

Si un fósil contiene el 66.82% de ^{14}C (contiene lo equivalente al 66.82% de c_0) se puede escribir la relación: $C(t) = 0.6682 \cdot c_0$, pues $C(t)$ representa la cantidad de ^{14}C . Entonces, de la definición de la función $C(t)$ se escribe

$$0.6682 \cdot c_0 = c_0 \cdot e^{-0.000121 \cdot t}.$$

Eliminando c_0 y considerando que $\ln(0.6682) = -0.403168$ y $\ln(e^{-a \cdot t}) = -a \cdot t$ se obtiene la antigüedad del fósil: $t = 3\,331.96$ años. Ahora, como

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{d}{dt}(c_0 \cdot e^{-0.000121 \cdot t}) \\ &= c_0 \frac{d}{dt}(e^{-0.000121 \cdot t}) \\ &= -0.000121 \cdot c_0 \cdot e^{-0.000121 \cdot t} = -0.000121 \cdot C(t), \end{aligned}$$

se puede afirmar que el ritmo de la desintegración es

$$\begin{aligned} \left. \frac{dC}{dt} \right|_{t=3331.96} &= -0.000121 \cdot C(3\,331.96) \\ &= -0.000121 \cdot 0.6682 \cdot c_0 \\ &= -8.08 \times 10^{-5} c_0. \end{aligned}$$

Con experimentos se encontró que la cantidad inicial de ^{14}C en el fósil es $c_0 = 6 \times 10^{26}$, entonces

$$\frac{dC}{dt} = (-8.08 \times 10^{-5})(6 \times 10^{26}) \approx -49 \times 10^{21} \frac{\text{átomos}}{\text{año}};$$

esto significa que, por cada año que pasa, el fósil pierde 49×10^{21} átomos.

1.26 Puntos críticos de una función

Dada una función $f: A \subset \text{Dom}_f \rightarrow \mathbb{R}$ con A un subconjunto del dominio de f . Se dice que $x \in A$ es un punto **máximo** de f en A si $f(x) \geq f(y)$ para todo $y \in A$, entonces el número $f(x)$ es el valor máximo de f en A . Análogamente, $z \in A$ es un punto **mínimo** de f en A si $f(z) \leq f(y)$ para todo $y \in A$, en este caso el número $f(z)$ es el valor mínimo de f en A . En ambos casos se cumple que $f'(x) = 0$, sin embargo, existen otros puntos que no son ni máximos o mínimos que lo cumplen. De forma general, un punto crítico de una función f es un número x tal que $f'(x) = 0$, siendo este último número el valor crítico de f . Esto motiva el siguiente resultado.

Teorema. *Supóngase que $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a ; por el contrario, si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a .*

En consecuencia, se puede escribir el siguiente resultado.

Teorema. *Supóngase que $f''(a)$ existe. Si f tiene un mínimo local en a , entonces $f''(a) \geq 0$; si f tiene un máximo local en a , entonces $f''(a) \leq 0$.*

Los resultados anteriores permiten establecer el criterio de la segunda derivada para hallar los puntos críticos de una función y, más aún, sus valores. El procedimiento es el siguiente

- I. Dada una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se obtiene su primera y segunda derivada, es decir, $f'(x)$ y $f''(x)$.
- II. Se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$, para encontrar los puntos críticos de la función.
- III. Se evalúa la segunda derivada de f en los puntos críticos, es decir, si $a \in A$ es un punto crítico, se calcula $f''(a)$.
 - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un **mínimo** local en $a \in A$.
 - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un **máximo** local en $a \in A$.
- IV. Las coordenadas de los valores críticos de la función están dadas por $(a, f(a))$, se encuentran sobre la gráfica de la función, es decir, $(a, f(a)) \in \text{Gráf}_f$.

Por ejemplo, considere las funciones mostradas previamente.

- $f(x) = x^2 - 1$ (Ver **Ilustración 39**).
 - $f'(x) = 2x$ y $f''(x) = 2$.
 - El punto crítico de la función satisface $f'(x) = 0$, es decir, $2x = 0$, por lo que $x = 0$ es el punto crítico de la función.
 - Por lo tanto, $f(0) = 2(0)^2 - 1 = -1$ es el valor crítico de la función y este representa un mínimo debido a que $f''(0) = 2 > 0$.
 - El mínimo tiene coordenadas $(0, -1)$.
- $k(x) = x^5$ (Ver **Ilustración 40**).
 - $k'(x) = 5x^4$ y $k''(x) = 20x^3$.
 - Sus puntos críticos se obtienen con la ecuación $k'(x) = 0$, esto es, $5x^4 = 0$, siendo $x = 0$ el único punto crítico de la función. Como $k''(0) = 0$, no se trata de un máximo ni de un mínimo, este se conoce como punto de inflexión. El valor crítico es $k(0) = 0$.
 - El punto de inflexión tiene coordenadas $(0, 0)$.

Además, considere el siguiente polinomio.

- $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
 - $g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$ y $g''(x) = 6x - 12$.
 - Los puntos críticos de la función satisfacen $g'(x) = 0$, es decir, $3(x - 1)(x - 3) = 0$; por lo que $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ son los puntos buscados.
 - $g''(x_1) = 6(1) - 12 < 0$, por lo que $(x_1, g(x_1))$ es un máximo de la función, donde $g(x_1) = g(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 1 = 5$.
 - $g''(x_2) = 6(3) - 12 > 0$, por lo que $(x_2, g(x_2))$ es un mínimo de la función, donde $g(x_2) = g(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 1 = 1$.

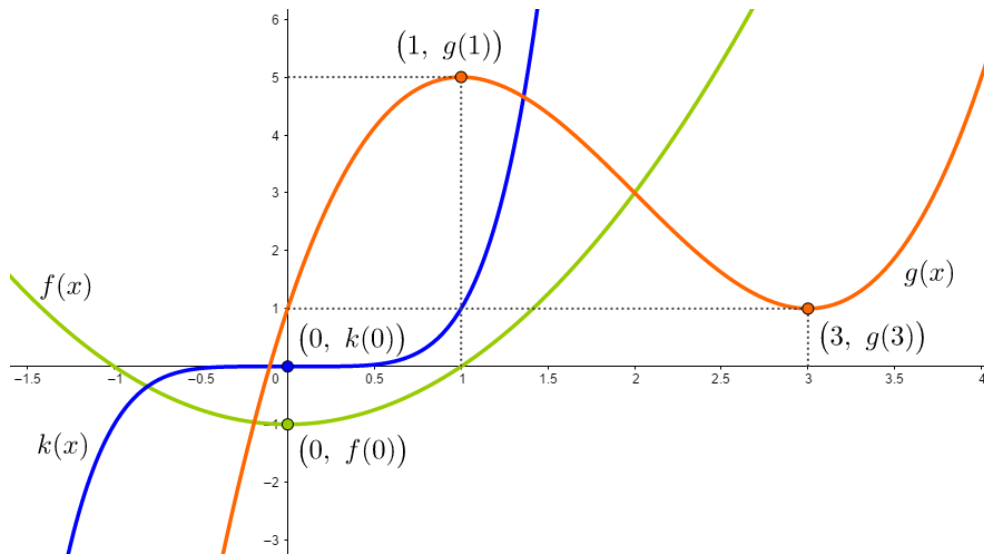


Ilustración 44. Se muestran los puntos críticos de las funciones $f(x) = x^2 - 1$, $k(x) = x^5$ y $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1.27 Cálculo integral

La definición formal de integral nace a partir de la necesidad de calcular el área bajo la gráfica de una función $f(x) \geq 0$, esto se consigue por medio de una agrupación de rectángulos que cubren parcialmente dicha área (**verdes**) y rectángulos que la sobrepasan (**grises**). Sumando las áreas de los rectángulos verdes se obtiene la cantidad L , conocida como *suma inferior*, mientras que al sumar los rectángulos grises se obtiene la cantidad U , conocida como *suma superior*, ambas dependen del número de rectángulos que se construyan, del intervalo $[a, b]$ y de la función.

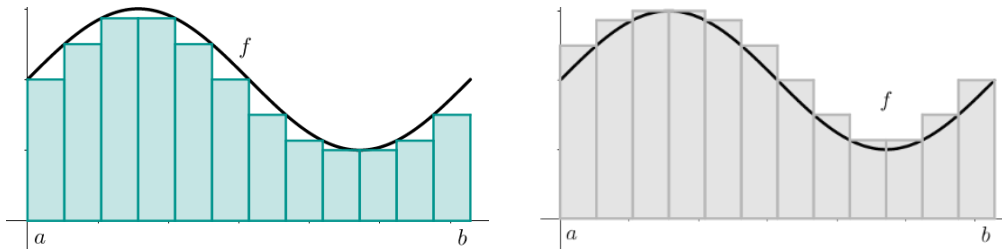


Ilustración 45. Suma inferior L (izquierda) y suma superior U (derecha), satisfacen la desigualdad $L \leq \int_a^b f(x) dx \leq U$.

Conforme se van integrando más rectángulos a cada agrupación, los números L y U se van aproximando a un número particular, a dicho número se le denomina la *integral de f en $[a, b]$* y se representa mediante

$$\int_a^b f(x) dx,$$

también se conoce como *integral definida en el intervalo $[a, b]$* . El símbolo \int se conoce como *signo integral*, originalmente se escribió como una “S” alargada que significaba suma; a los números a y b se les conoce como *límites de integración inferior* y *superior* respectivamente. Cuando $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, la integral $\int_a^b f(x) dx$ representa el *área bajo la curva*.

Además, la integral y la derivada de una función están relacionadas mediante la antiderivada F de una función f mediante de la ecuación $F(x) + c = \int f(x) dx$, o desde otra perspectiva $\frac{dF}{dx} = f(x)$. Esta relación nace a partir de los siguientes resultados.

Teorema (Primer teorema fundamental del cálculo). Sea f integrable en $[a, b]$, se define F en $[a, b]$ mediante $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es diferenciable en c , y $F'(c) = f(c)$.

Teorema (Segundo teorema fundamental del cálculo). Si f es integrable en $[a, b]$ y $f = F'$ para alguna función F , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Al igual que la derivada, la integral tiene muchas reglas y fórmulas útiles para su resolución, la siguiente tabla contiene algunas de ellas.

Nombre	Integral
Regla de la constante	Dado un número $a \in \mathbb{R}$, $\int a \, dx = ax + c$
Regla de la potencia	Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\int x^n \, dx = \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot x^{n+1} + c$
Regla del radical	Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\int x^{\frac{1}{n}} \, dx = \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot x^{\frac{1}{n}+1} + c$
Linealidad de la integral	Si $a \in \mathbb{R}$ y además $f, g; \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\int a \cdot f(x) \pm g(x) \, dx = a \cdot \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$
Cambio de límites de integración	Si $a < b$, se cumple $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$
Separación de los límites de integración	Para $a < c < b$ números reales, $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$

Tabla 14. Integrales básicas

Así mismo, las funciones trascendentales tienen sus propias formas de integración, algunas de ellas se muestran a continuación.

Funciones	Integral
Trigonómicas	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c, \quad \int \sin(x) dx = -\cos(x) + c, \quad \int \tan(x) dx = -\ln \cos(x) + c,$ $\int \sec(x) dx = \ln \sec(x) + \tan(x) + c, \quad \int \csc(x) dx = \ln \csc(x) - \cot(x) + c,$ $\int \cot(x) dx = \ln \sin(x) + c.$
Exponencial de b	Para dos números cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ $\int b^{ax} dx = \frac{1}{a \cdot \ln(b)} \cdot b^{ax} + c$
Función exponencial	En particular, si $b = e$ $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$
Logaritmo base a	$\int \log_a(x) dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot x \cdot (\ln(x) - 1) + c$
Definición de logaritmo natural	$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x)$
Logaritmo natural (logaritmo base e)	$\int \ln(x) dx = x \cdot (\ln(x) - 1) + c$

Tabla 15. Reglas de integración para funciones particulares.

Los libros de cálculo diferencial e integral contienen una serie de reglas y fórmulas que no se muestran aquí, para más detalles sobre éstas consulte la bibliografía sugerida al final o los libros de cálculo preferidos.

En la práctica se emplean los siguientes resultados.

Teorema (La fórmula de sustitución). Si f y g' son funciones continuas, entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g',$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx,$$

con $u = g(x)$.

El cual se emplea para resolver la integral de una función compuesta, como $f(x) = \sqrt{3x^3 + 2x}$. Por otro lado, el siguiente resultado es útil cuando se requiere integrar una función que es producto de otras dos.

Teorema (Integración por partes). Si f' y g' son funciones continuas, entonces

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g,$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Por ejemplo, considere las funciones $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ y $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x+5}$.

- Para calcular $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ se usa el método de cambio de variable.
 - Se define $u(x) = x^2 + 1$, entonces $du = 2x dx$.
 - Los elementos que aparecen en $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ son:

$$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{u}, \quad x = \sqrt{u-1}, \quad dx = \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2\sqrt{u-1}} du.$$

Entonces

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{\sqrt{u-1}}{\sqrt{u}} \frac{1}{2\sqrt{u-1}} du$$

$$= \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du,$$

aplicando la regla de la potencia se obtiene

$$\frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\frac{1}{2} + 1} \right) u^{-\frac{1}{2} + 1}$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + c.$$

Finalmente, se sustituye $u = x^2 + 1$, para obtener

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + c.$$

- Sea $g(x) = x\sqrt[3]{x+5}$ definida en el intervalo $[0, 1]$. Para calcular su integral se realiza el cambio de variable y , posteriormente, se emplea el segundo teorema fundamental del cálculo.
 - Se define $u(x) = \sqrt[3]{x+5} = (x+5)^{\frac{1}{3}}$, se tiene $x = u^3 + 5$. Entonces $dx = 3u^2 du$.
 - Los elementos que aparecen en $\int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x+5} dx$ son $x = u^3 + 5$, $\sqrt[3]{x+5} = u$ y $dx = 3u^2 du$.

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x+5} dx &= \int_{u(0)}^{u(1)} (u^3 + 5) \cdot u \cdot 3u^2 du \\ &= \int_{u(0)}^{u(1)} 3u^6 + 15u^3 du, \end{aligned}$$

aplicando la linealidad de la integral y la regla de la potencia se obtiene la integral en términos de u

$$\begin{aligned} \int_{u(0)}^{u(1)} 3u^6 + 15u^3 du &= 3 \int_{u(0)}^{u(1)} u^6 du + 15 \int_0^1 u^3 du \\ &= 3 \left(\frac{1}{6+1} \right) u^{6+1} \Big|_{u(0)}^{u(1)} + 15 \left(\frac{1}{3+1} \right) u^{3+1} \Big|_{u(0)}^{u(1)} \\ &= \frac{3}{7} u^7 \Big|_{u(0)}^{u(1)} + \frac{15}{4} u^4 \Big|_{u(0)}^{u(1)}. \end{aligned}$$

En este punto, se puede proceder de dos formas:

- a. Se calcula $u(0) = \sqrt[3]{5}$ y $u(1) = \sqrt[3]{6}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{u(0)}^{u(1)} 3u^6 + 15u^3 du &= \frac{3}{7} u^7 \Big|_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt[3]{6}} + \frac{15}{4} u^4 \Big|_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt[3]{6}} \\ &= \frac{3}{7} \left(6^{\frac{7}{3}} - 5^{\frac{7}{3}} \right) + \frac{15}{4} \left(6^{\frac{4}{3}} - 5^{\frac{4}{3}} \right) \\ &\approx 18.54. \end{aligned}$$

- b. Se sustituye el valor de $u = (x+5)^{\frac{1}{3}}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x+5} dx &= \frac{3}{7} (x+5)^{\frac{7}{3}} \Big|_0^1 + \frac{15}{4} (x+5)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{7} \left((1+5)^{\frac{7}{3}} - (0+5)^{\frac{7}{3}} \right) + \frac{15}{4} \left((1+5)^{\frac{4}{3}} - (0+5)^{\frac{4}{3}} \right) \\ &= \frac{3}{7} \left(6^{\frac{7}{3}} - 5^{\frac{7}{3}} \right) + \frac{15}{4} \left(6^{\frac{4}{3}} - 5^{\frac{4}{3}} \right) \approx 18.54. \end{aligned}$$

Note que el procedimiento mostrado en el inciso b. es más largo, pues se realiza nuevamente un cambio de variable (de u a x) para regresar a la variable original (x) y así usar el segundo teorema fundamental del cálculo. Sin embargo, en el primer desarrollo se substituyó directamente sobre la variable u , lo cual ayudo a acortar el número de pasos para llegar al resultado. En resumen, se cumple la igualdad

$$\int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x+5} \, dx \quad \stackrel{u(x)=\sqrt[3]{x+5}}{\cong} \quad \int_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt[3]{6}} 3u^6 + 15u^3 \, du.$$

Para más información sobre los demás métodos de integración, consulte los libros de cálculo de las lecturas recomendadas al final. Considere el siguiente ejemplo.

Las *estrellas* son uno de los principales objetos de estudio de la astrofísica, se encuentran a miles de kilómetros de la tierra, son objetos muy luminosos y se pueden representar matemáticamente como una esfera. Están compuestas de fluido caliente, donde sus fuerzas de gravedad y de presión se encuentran en *equilibrio hidrostático*. Su estructura se encuentra en constante cambio debido a diferentes factures, como su evolución o el medio interestelar.

Los astrofísicos modelan las estrellas con funciones termodinámicas que dependen de su coordenada radial r (medida en m), la cual toma valores desde el cero (centro de la estrella) hasta un número R (que representa el radio de la estrella). Una de estas funciones es la densidad de materia (denotada por ρ) y representa la cantidad de materia por cada unidad de volumen (en unidades convencionales $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$):

$$\rho: [0, R] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

que se define con ayuda de diferentes modelos astrofísicos. Para inferir la cantidad de masa que tiene una estrella (medida en kg) se puede emplear una *integral definida* que toma valores desde $r = 0$ hasta $r = R$, esto es

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) \, dr.$$

Supóngase que una estrella de radio R tiene densidad constante, es decir, $\rho_c(r) = c$ para todo $r \in [0, R]$. Entonces, su masa se puede calcular de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} M_c &= 4\pi \int_0^R r^2 \rho_c(r) \, dr \\ &= 4\pi c \int_0^R r^2 \, dr \\ &= 4\pi c \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^R \right), \end{aligned}$$

y con ayuda del segundo teorema fundamental del cálculo se obtiene el resultado:

$$M_c = 4\pi c \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^R \right) = \frac{4\pi c}{3} (R^3 - 0^3) = \frac{4\pi c}{3} R^3.$$

1.28 Estadística

1.28.1 Elementos de la estadística

Un evento o experimento es *aleatorio* si al repetirlo en condiciones análogas no se puede predecir el resultado; en caso contrario, el experimento es *determinista*. Por ejemplo:

- Lanzar una moneda y sacar un naipe de una baraja son eventos aleatorios;

- Al medir la temperatura del agua en ebullición a nivel del mar se obtendrá siempre el mismo valor, aproximadamente 100 °C, por lo que se trata de un experimento determinista.

La *estadística* es el estudio de *fenómenos aleatorios*, lo cual hace que tenga una amplia gama de aplicaciones, como en las ciencias, la ingeniería, la medicina, la economía, etc. El objetivo primordial de la estadística es obtener conclusiones a partir de datos o hechos resultantes de un experimento, a esto se le conoce como *inferencia estadística*. Es utilizada para realizar predicciones útiles en la toma de decisiones basadas en los datos recopilados. Por ejemplo, a partir de encuestas, las empresas pueden hacer inferencias en toda una población para obtener información relevante de sus productos que ofrecen.

La inferencia estadística implica analizar una *población* específica. Para llevar a cabo este proceso, se selecciona una *muestra representativa* de esa población en la que se llevará a cabo el experimento. Esta muestra es un subconjunto de la población. Antes de realizar el experimento, es importante definir qué se va a *medir* o investigar, es decir, hay que determinar las *variables de estudio*.

Las variables son características que los miembros de la población poseen y que se quieren examinar. Los resultados de las mediciones u observaciones se denominan *datos*, y su organización depende de la variable en cuestión y de cómo se lleva a cabo el experimento. Por último, para facilitar la interpretación de los datos, se utilizan *tablas de frecuencia* y *diagramas gráficos* que simplifican esta tarea.

Las variables se clasifican en dos grupos, las *cualitativas* (o *categorías*) y las variables *cuantitativas*.

- Las variables *cualitativas* no adoptan valores numéricos y pueden ser *ordinales* o *no ordinales*, esto sí dependen de un orden establecido o no. Por ejemplo:
 - Al realizar una encuesta de satisfacción se pueden encontrar *calificaciones* como variable, las cuales se contestan con Malo, Regular, Bueno, Excelente. Son variables *ordinales*, pues tienen un orden preestablecido.
 - Si se pregunta el *sabor favorito de helado* se considera variable cualitativa *no ordinal*, algunas de sus respuestas serían: Sandía, Limón, Chocolate, etcétera.
- Las variables *cuantitativas* adoptan valores numéricos y pueden ser *discretas* o *continuas*, por ejemplo:
 - La *cantidad de mascotas* que posee una persona es una variable cualitativa *discreta*, pues solo podría contestar con un número natural (\mathbb{N}).
 - La *estatura*, el *peso*, el *índice de masa corporal*, etc. se consideran variables cuantitativas *continuas*, pues se contestan con números que pueden contener varios decimales.

Para analizar los datos obtenidos en un experimento se utiliza una tabla de frecuencias o *distribución de frecuencias*. Considere un conjunto de n observaciones, las cuales fueron obtenidas después de realizar un experimento. Supóngase que dichos datos están clasificados en diferentes categorías. Se define lo siguiente

- El número de individuos de la i -ésima categoría se denota por n_i y se denomina *frecuencia absoluta*.
 - La *frecuencia relativa*, denotada por f_i es la proporción dada por el cociente de la frecuencia relativa de la i -ésima categoría y el total de observaciones, es decir

$$f_i = \frac{n_i}{n}.$$

- El número de individuos acumulado hasta la categoría i se conoce como *frecuencia acumulada* o *frecuencia absoluta acumulada* y está dada por

$$N_i = n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1} + n_i.$$

- La *frecuencia relativa acumulada*, denotada por F_i está dada por el cociente de la frecuencia acumulada de la i -ésima categoría con el total de observaciones, esto es,

$$F_i = \frac{N_i}{n}.$$

En las distribuciones de frecuencias se puede observar el comportamiento de las variables de estudio a partir de las categorías definidas para ello. Por ejemplo, considere la siguiente situación.

Los **alumnos deportistas** de una universidad desean obtener mejores resultados, para ello se les hará una serie de análisis médicos. Los resultados proporcionarán herramientas a los entrenadores para que tomen decisiones encaminadas a un mejor rendimiento deportivo de los alumnos. Los análisis consisten en medir, tanto en hombres como en mujeres, **el porcentaje de masa muscular, el porcentaje de grasa en el cuerpo, el nivel de colesterol en sangre y su nivel de satisfacción dentro del equipo**. Para ello, se convocó a 20 deportistas de cada uno de los siguientes deportes: **fútbol, atletismo, natación y rugby**.

Los elementos estadísticos involucrados son los siguientes

- La población está compuesta por los alumnos deportistas de la universidad
- La muestra son los 20 alumnos convocados de cada deporte, 80 en total
- Las variables de estudio son
 - Cualitativas: el sexo de los deportistas, ya que tiene dos posibles valores (Hombre o Mujer) y es no ordinal; el nivel de estudios de cada deportista (bachillerato, licenciatura, etc.) es ordinal; el nivel de satisfacción dentro del equipo es de tipo ordinal.
 - Cuantitativas: el porcentaje de masa muscular, el porcentaje de grasa del cuerpo y el nivel de colesterol en sangre.

Posterior a la medición del colesterol en sangre, los datos obtenidos se agruparon en la *distribución de frecuencias* mostrada en la **Tabla 16**. A partir de estos datos se puede afirmar que un 94% ($F_4 = 0.941$) de individuos a los que se les realizó la prueba tiene un nivel de colesterol inferior a $270 \frac{\text{mg}}{100 \text{ mL}}$.

Nivel de colesterol (mg/100 mL)	Frecuencia absoluta n_i	Frecuencia relativa f_i	Frecuencia absoluta acumulada N_i	Frecuencia relativa acumulada F_i
150 a 180	10	0.083	10	0.083
180 a 210	36	0.300	46	0.383
210 a 240	42	0.350	88	0.733
240 a 270	25	0.208	113	0.942
270 a 300	7	0.058	120	1.000

Tabla 16. Distribución de frecuencias de la variable *nivel de colesterol en sangre*, agrupadas en diferentes rangos. 10 personas tienen un nivel de colesterol de 150 a $180 \frac{\text{mg}}{100 \text{ mL}}$ ($n_1 = 10$), y estos representan un 8.3% de los datos ($f_1 = 0.083$).

Esta información permite construir el siguiente *histograma*.

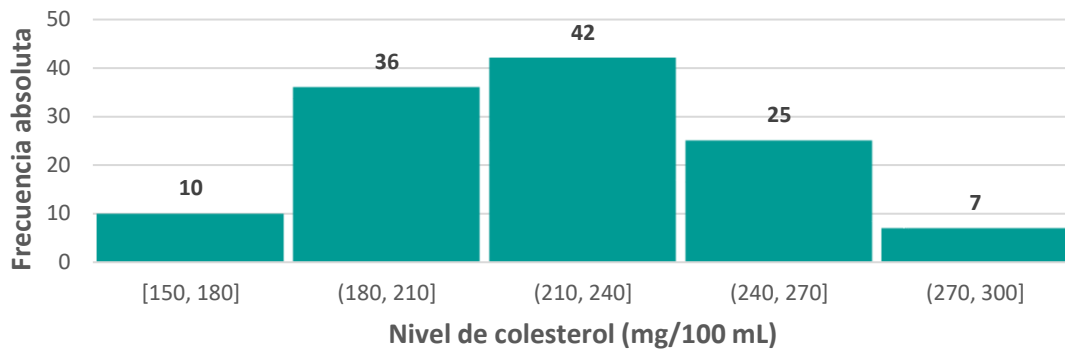


Ilustración 46. El eje vertical muestra los intervalos sobre los cuales se realizó en análisis; mientras que el eje vertical muestra la cantidad de personas que tienen su nivel de colesterol dentro de los valores de dichos intervalos.

1.28.2 Medidas de tendencia central y dispersión

Cuando se tienen variables cuantitativas se puede realizar un análisis más profundo con ayuda de las *medidas de tendencia central* y las *medidas de dispersión*. Las medidas de tendencia central dan información sobre la posición o localización de los datos observados: son la *media*, la *mediana* y la *moda*. Mientras que las medidas de dispersión dicen que tan dispersos están los datos o que tanta variabilidad poseen; son la *varianza* y la *desviación estándar*, por mencionar algunas.

Considere un conjunto de n observaciones con valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, entonces:

- La *media* de las observaciones es su promedio aritmético, denotado por \bar{x} :

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i.$$

- La *mediana* de las observaciones es el valor para el cual, cuando todas las observaciones se ordenan de manera creciente, la mitad de éstas es menor que este valor y la otra mitad mayor. Si n es impar, entonces la mediana es el valor de las observaciones que se encuentra a la mitad del conjunto ordenado. Si n es par, la mediana es el promedio aritmético de los valores de las dos observaciones que se encuentran a la mitad del conjunto, previamente ordenado de forma creciente.
- La *moda* de las observaciones es el valor que ocurre con mayor frecuencia, es decir, el valor que se observó más veces en el experimento.
- La *varianza* de las observaciones, denotada por S , corresponde al promedio de los cuadrados de las distancias entre cada observación y la media del conjunto de observaciones:

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

- La *desviación estándar* de las observaciones, denotada por σ , corresponde a la raíz cuadrada positiva de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

La varianza y la desviación estándar están relacionadas mediante la relación $S = \sigma^2$. Por otro lado, en ambas cantidades se expone la fórmula para una muestra, cuando se quiera calcular la varianza poblacional o desviación estándar poblacional se toma n en lugar de $n - 1$. A continuación, se muestran dos ejemplos para calcular las medidas de tendencia central y las medidas de dispersión.

- Un futbolista jugó 15 partidos en el torneo de apertura 2023, donde los minutos de cada uno son los siguientes: 64, 54, 82, 76, 75, 90, 64, 55, 71, 69, 73, 78, 74, 80, 75.

- Los datos ordenados de forma ascendente son:

$$54, 55, 64, 64, 69, 71, 73, 74, 75, 75, 76, 78, 80, 82, 90.$$

- La media aritmética representa el tiempo promedio que jugó durante un partido del torneo, está dada por:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{15} (64 + 54 + 82 + 76 + 75 + 90 + 64 + 55 + 71 + 69 + 73 + 78 \\ &\quad + 74 + 80 + 75) = \frac{1\ 080}{15} = 72. \end{aligned}$$

- Para la mediana se considera el conjunto de datos ordenados, como el número de datos es impar, solo se toma el valor central, por lo que la mediana es 74.
- Se puede observar que 64 y 75 se repiten dos veces, entonces la moda corresponde al conjunto {64, 75}.

- Una reserva ecológica tropical alberga dos poblaciones de anfibios: las ranas de árbol (*Hylidae*) y las ranas dardo venenosas (*Dendrobatidae*). A cada miembro de las poblaciones se les midió el peso (g): los datos de seis ranas de árbol son 8, 12, 9, 13, 7 y 11; mientras que el peso de siete ranas venenosas es 4, 5, 3, 6, 4, 2 y 4.

- Para calcular las medidas de dispersión, es necesario conocer la media aritmética de cada población de ranas.

$$\bar{x}_A = \frac{1}{12} (8 + 12 + 9 + 13 + 7 + 10) = \frac{60}{6} = 10,$$

$$\bar{x}_{DV} = \frac{1}{13} (4 + 5 + 3 + 6 + 4 + 2 + 4) = \frac{28}{7} = 4.$$

- Se toma la fórmula muestral de la varianza.

- Para las ranas árbol:

$$\begin{aligned} S_A &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_A)^2 \\ &= \frac{(8-10)^2 + (12-10)^2 + (9-10)^2 + (13-10)^2 + (7-10)^2 + (10-10)^2}{6-1} \\ &= \frac{(-2)^2 + (2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 + (-3)^2}{5} = \frac{4+4+1+9+9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6. \end{aligned}$$

- Para las ranas dardo venenosas:

$$\begin{aligned} S_{DV} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{DV})^2 \\ &= \frac{(4-4)^2 + (5-4)^2 + (3-4)^2 + (6-4)^2 + (4-4)^2 + (2-4)^2 + (4-4)^2}{7-1} \\ &= \frac{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}{6} = \frac{1+1+4+4}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1.\bar{6}. \end{aligned}$$

- Dada la ecuación $S = \sigma^2$, es posible calcular la desviación estándar.

- Para las ranas árbol:

$$\sigma_A = \sqrt{S_A} = \sqrt{5.6} \approx 2.37.$$

- Para las ranas dardo venenosas:

$$\sigma_{DV} = \sqrt{S_A} = \sqrt{1.6} \approx 1.29.$$

En conclusión, se puede observar que la población de ranas de árbol tiene una varianza más grande, esto significa que las ranas de esta población cubren un rango más amplio de pesos; por el contrario, las ranas dardo venenosas, al tener un valor de varianza más pequeño, se traduce en que todas tienen pesos muy parecidos.

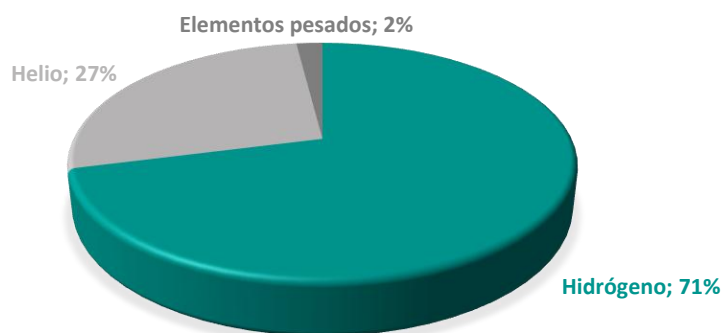
1.28.3 Gráficos estadísticos

Los datos obtenidos en una distribución de frecuencias se visualizan con ayuda de diferentes *gráficos estadísticos*, es decir, también contribuyen a la comprensión de los fenómenos aleatorios estudiados. Los hay de varios tipos: *diagramas de sectores* (o gráficas de pastel), *gráficos de barras*, *gráficos de dispersión*, *histogramas* y *diagramas de cajas y bigotes*.

Los *diagramas de sectores* y de *barras* ayudan a visualizar frecuencias absolutas o relativas, principalmente con variables cualitativas, en casos donde las variables cuantitativas sean discretas y de pocos valores o variables cuantitativas continuas agrupadas en un número reducido de intervalos también son útiles. El *histograma* y el *diagrama de cajas y bigotes* contienen información sobre variables cuantitativas continuas, sin embargo, también ayudan a representar variables cuantitativas discretas con una gama de valores muy amplia. A continuación, se muestran algunos ejemplos.

- *Diagrama de sectores.*

El *Sol* está compuesto de los mismos elementos químicos que los demás planetas del sistema solar, sin embargo, no posee las mismas cantidades de estos. La composición del *Sol* es principalmente hidrógeno (H), con el 71% de su masa; seguido de helio (He), con un 27%; otros elementos más pesados como el oxígeno (O), carbono (C), nitrógeno (N), etcétera, juntan el 2% de la masa solar restante.

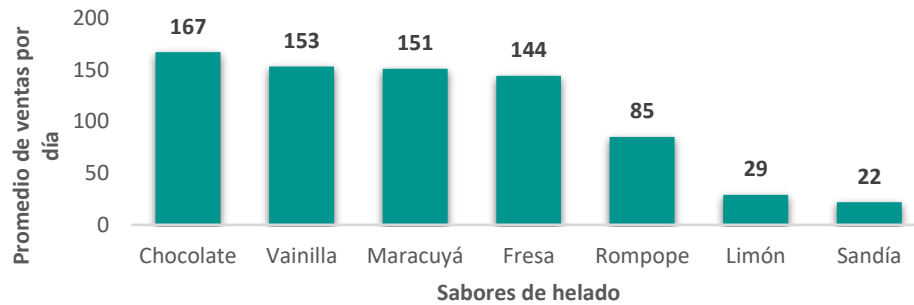


Los diagramas de sectores consisten en dividir un disco en tantas partes como sea necesario, de tal forma que el 100% de los datos corresponda a todo el disco y cada uno de los sectores contenga la proporción que le corresponda a cada variable. A diferencia de los demás gráficos estadísticos, estos no se acompañan de elementos como el eje vertical u horizontal.

Los segmentos del disco presentado tienen un tamaño proporcional a la cantidad de cada elemento que el *Sol* contiene, esto es, se puede apreciar la abundancia de los elementos químicos mencionados.

- **Gráfico de barras.**

Una heladería realizó un registro de ventas para conocer los sabores preferidos de sus clientes, se obtuvo el promedio diario de ventas de un mes para los sabores más vendidos.

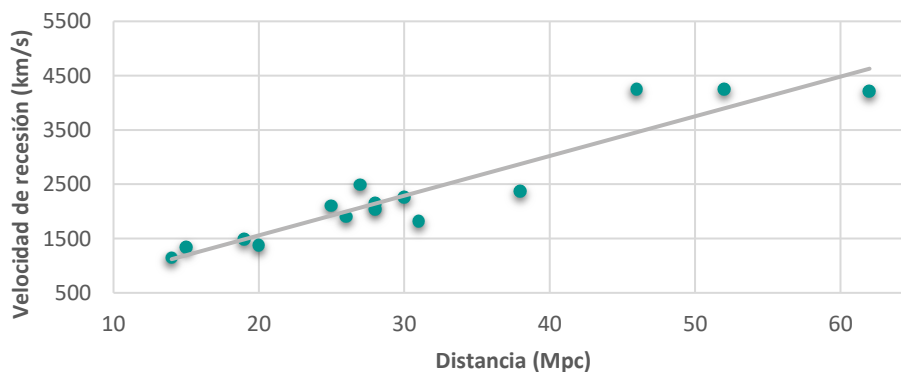


Los gráficos de barras pueden mostrar las frecuencias absolutas o relativas a partir de diferentes categorías. El eje horizontal contiene dichas categorías, mientras que el eje vertical marca la cantidad de veces que cada valor aparece en el estudio, donde la altura de la barra representa la frecuencia con la que aparecen.

El eje horizontal del gráfico anterior muestra los sabores ofrecidos por la heladería (variable cualitativa no ordinal) y el eje vertical marca el promedio de ventas. Se observa que el helado de chocolate se vende, en promedio, 167 veces por día; el helado de limón solo se vende 29 veces en un día, etcétera.

- **Gráfico de dispersión.**

La *Ley de Hubble-Lemaître* es una relación astronómica postulada por el astrónomo *Georges Lemaître* en 1927 y dos años más tarde por *Edwin Hubble*. Establece que *la velocidad a la que una galaxia se aleja de nosotros (km/s) es directamente proporcional a su distancia (Mpc)*. Esta ley ha tenido un impacto significativo en la cosmología, pues se infiere que el universo se está expandiendo aceleradamente.



En este tipo de gráficos se analiza la correlación en un conjunto de datos, cada punto del gráfico posee dos coordenadas, que son los valores de dos variables diferentes que pueden estar relacionadas.

En este caso, cada punto representa una galaxia, de las cuales se conoce la distancia (en mega parsec, Mpc, donde $1 \text{ Mpc} = 3.086 \times 10^{19} \text{ km}$) y la velocidad de alejamiento desde la tierra (km/s). La línea muestra la tendencia que siguen los datos en función de la distancia (la ecuación de la línea recta se puede obtener con métodos estadísticos. Para más información véase la bibliografía complementaria.). Se dice entonces que, estadísticamente, la velocidad de recesión

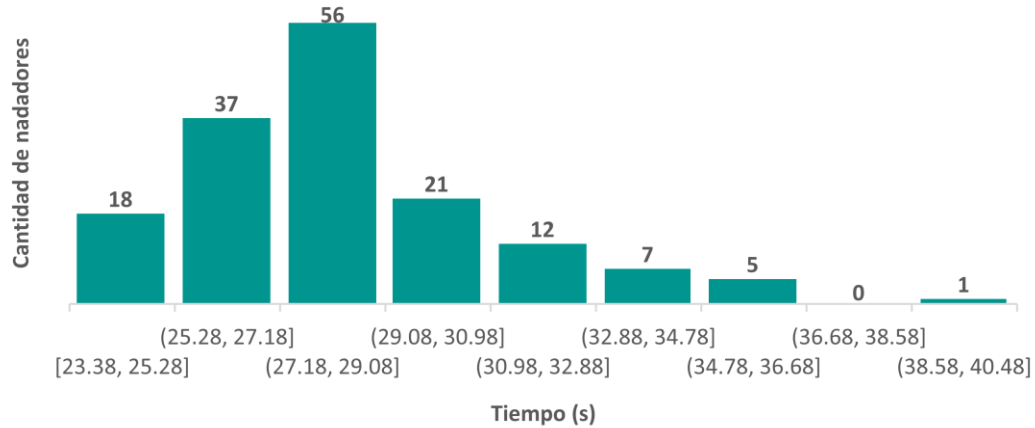
de las galaxias depende linealmente de la distancia a la que se encuentran de nosotros y eso se puede ver mediante la relación

$$v(D) = H_0 \cdot D,$$

donde la pendiente de la recta es la constante de Hubble H_0 .

- **Histograma.**

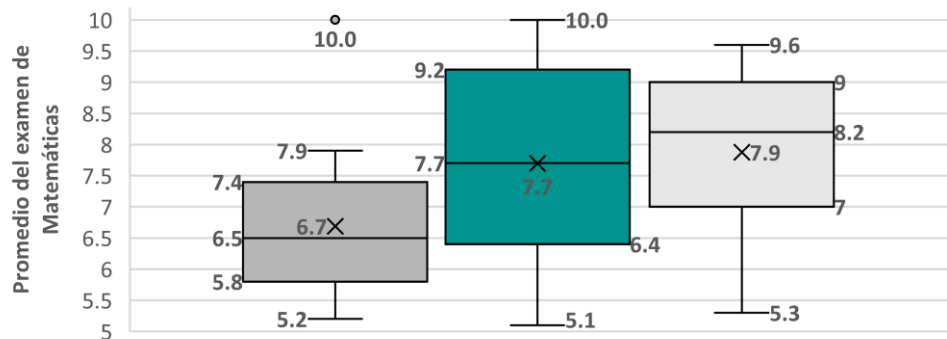
En la temporada 2023 de Curso Largo se registró el tiempo (s) de 157 nadadores de la CDMX en la prueba de 50 m libres, se obtuvo el siguiente gráfico.



Un histograma contiene la distribución de las frecuencias sobre diferentes clases o intervalos. Sobre el eje horizontal del gráfico anterior se presentan los intervalos de tiempo en los que están distribuidos los datos; cada barra muestra la cantidad de nadadores que marco un tiempo dentro de dicho intervalo. Por ejemplo, 56 nadadores marcaron un tiempo mayor a 27.18 s, pero menor o igual a 29.08 s.

- **Diagrama de cajas y bigotes.**

Se compararon los promedios (1/10) de tres grupos diferentes que hicieron un examen de matemáticas, obteniendo lo siguiente.



Cada caja con bigotes representa un conjunto de datos; en cada caja se encuentra el 50% de todos los valores obtenidos, siendo la parte inferior de la caja el primer cuartil (Q_1) y la parte superior el tercer cuartil (Q_3); la línea (—) que divide la caja marca la mediana y la (X) marca la media de los datos. Por encima y por debajo de la caja se encuentran los bigotes, cada uno de ellos encierra el 25% de los datos superiores ($> q_3$) e inferiores ($< q_1$) respectivamente. Los valores atípicos se encuentran fuera del bigote.

Entonces, en el diagrama anterior, cada caja con bigotes representa un grupo de estudiantes, donde los datos que se exponen son los promedios. El grupo central tiene a su 50% de población

con un promedio entre 6.4 y 9.2; mientras que el grupo de la izquierda tiene a su 50% de población con un promedio menor a 7.4 y mayor a 5.8, además tiene un único alumno con 10 de promedio.

1.29 Probabilidad

1.29.1 Conceptos de probabilidad

Ahora, recuérdese que se conoce como evento o experimento *aleatorio* a todo aquél en el que no están garantizados los mismos resultados a partir de las mismas *condiciones iniciales*, es decir, son experimentos en los cuales no se puede predecir el resultado, sin embargo, si se puede inferir qué opción es *más probable* que suceda. Los eventos o experimentos *deterministas* son aquellos en los cuales se garantiza el mismo resultado dadas las mismas condiciones iniciales.

La *probabilidad* es una rama de las matemáticas que describe y permite comprender los experimentos aleatorios o sujetos al azar. Cuantifica la ocurrencia de un suceso en un experimento, asociándole un número del 0 al 1, el cual se obtiene dividiendo el número de casos favorables (para que ocurra el suceso) entre el número total de casos (resultados posibles del experimento).

$$P = \frac{\text{Núm. de casos favorables para que ocurra un suceso}}{\text{Núm. de casos posibles en el experimento}} \leq 1.$$

1.29.2 Aplicación de la teoría de conjuntos al cálculo de probabilidades

Para entender los conceptos básicos de la probabilidad y analizar los eventos probabilísticos de manera precisa, es esencial conocer las nociones básicas de la *teoría de conjuntos*. Esta teoría ofrece las herramientas necesarias para organizar y relacionar los eventos, facilitando así un análisis más claro y efectivo de las interacciones entre ellos.

La teoría de conjuntos comprende aquella rama de las matemáticas, formulada por *Georg Cantor*, que estudia los *conjuntos*, sus propiedades y operaciones entre ellos, tales como la *unión*, *intersección*, *diferencia*, *complemento*, etc.

Intuitivamente, se dice que un conjunto es una *colección de objetos*, dichos objetos son los *elementos* del conjunto; un *subconjunto* es un conjunto en sí mismo que está contenido en otro conjunto. Cuando un conjunto no contiene elementos se dice que es el *conjunto vacío* (\emptyset) y, por formalidad matemática, se dice que el conjunto vacío es un elemento de cualquier conjunto. Respecto a la notación, un conjunto se denota con corchetes y sus elementos son aquellos que se encuentran dentro de dichos corchetes. Por ejemplo

- El conjunto de los números naturales \mathbb{N} , contiene al 10 y 24, es decir, $10, 24 \in \mathbb{N}$; el conjunto de números impares $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ también está contenido el conjunto de los números naturales \mathbb{N} , esto es, $\{1, 3, 5, 7, \dots\} \subset \mathbb{N}$.
- La clasificación de los seres vivos es un proceso dinámico que ha evolucionado considerablemente a lo largo de la historia, y hasta la fecha no está completamente definida ni es unívoca. Diferentes enfoques y teorías han sido propuestos, lo que refleja la complejidad de los organismos y las interacciones entre ellos. Uno de los pioneros en este campo fue *Carl von Linné* (1707 - 1788), un naturalista sueco que revolucionó la taxonomía al introducir el sistema de nomenclatura binomial y establecer una *jerarquía taxonómica* organizada en *categorías* que van de lo general a lo particular: *Reino*, *Phylum*, *Clase*, *Orden*, *Familia*, *Género* y *Especie*. Esta estructura se convirtió en la base para la clasificación de los organismos y fue fundamental para el desarrollo de la biología moderna. En el siguiente diagrama se puede apreciar cómo se relacionan dichas categorías.

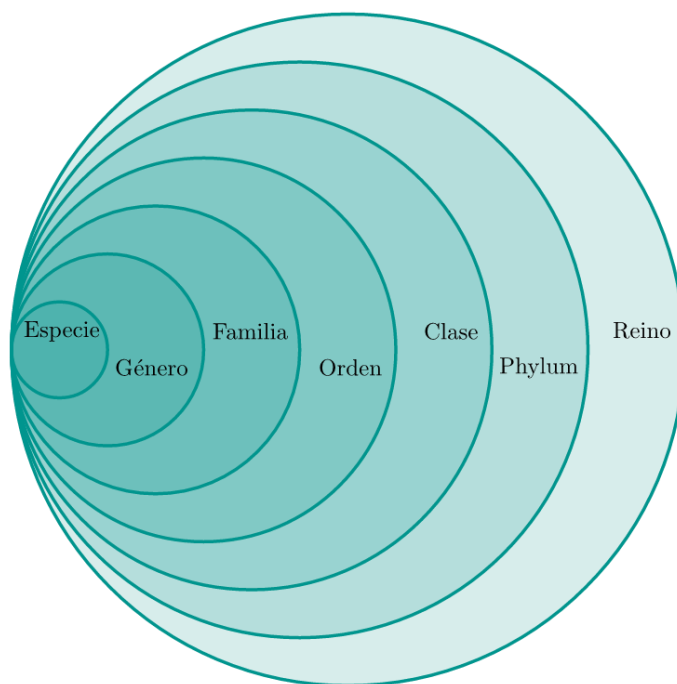


Ilustración 47. Diagrama de Venn de las categorías taxonómicas. En notación de la teoría de conjuntos se puede escribir $\{Especie\} \subset \{Género\} \subset \{Familia\} \subset \{Orden\} \subset \{Clase\} \subset \{Phylum\} \subset \{Reino\}$.

Los animales pertenecen al reino *Animalia*, el cual se divide en muchos Filos, como *Chordata*. En éste se encuentran varias clases, una de ellas se compone de los animales que poseen glándulas mamarias, conocido como clase *Mammalia*. Dentro de ella, se encuentra el orden de los animales carnívoros, denominado *Carnívora*, el cual contiene alrededor de 296 especies divididas en diferentes familias. A continuación, se muestran algunas de estas familias, con algunos de sus géneros y algunas de sus especies.

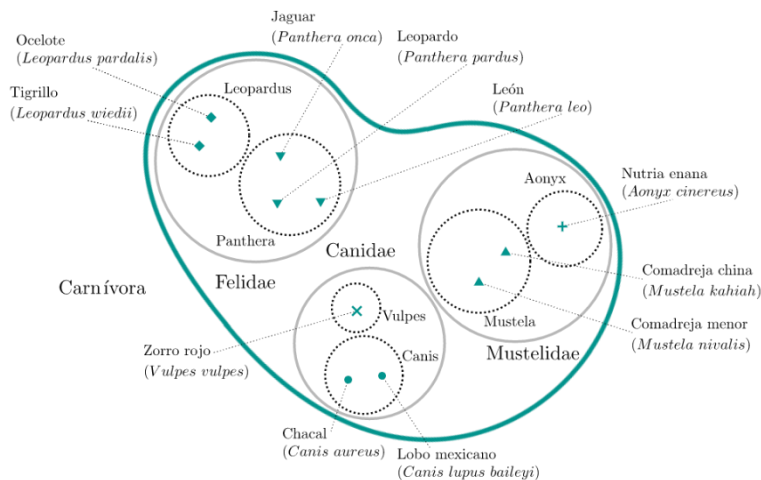


Ilustración 48. En el lenguaje de la teoría de conjuntos: El jaguar, el león y el leopardo (especies) son elementos del conjunto Panthera (género); el cual es un subconjunto de Felidae (Familia); además, éste último junto con los conjuntos Mustelidae y Canidae son subconjuntos de Carnívora (Orden).

El **espacio muestral** de un experimento o evento aleatorio es el **conjunto** que contiene todos los resultados posibles, cada uno de los resultados posibles es un **punto muestral**. En experimentos aleatorios el espacio muestral tiene más de dos elementos, por otro lado, en experimentos deterministas el espacio muestral contendrá un solo elemento.

Un **suceso** de un experimento o evento aleatorio es un **subconjunto** de un espacio muestral, además, se dice que un suceso determinado se ha verificado cuando el resultado del experimento pertenece a dicho conjunto. El **espacio de sucesos** es aquel que contiene todos los sucesos posibles de un espacio muestral, se denota por U_E ; y si E contiene n elementos, U_E contiene 2^n elementos. Un **suceso imposible** es aquel que no se puede verificar, se denota por el conjunto vacío. Por ejemplo, considere los siguientes experimentos.

- Lanzar una moneda una vez (aleatorio).
 - El espacio muestral es $E = \{Cara, Cruz\} = \{C, X\}$.
 - Un suceso es $A = \{X\}$, si en el lanzamiento sale X , se ha verificado el suceso A . El espacio de sucesos es $U = \{\emptyset, \{C\}, \{X\}, \{C, X\}\}$.
 - La probabilidad de obtener C es $P(C) = \frac{1}{2}$, pues, en un lanzamiento, hay dos posibilidades.

- Medir la temperatura del agua al hacer ebullición (determinista).
 - El espacio muestral es $E = \{100\text{ °C}\}$, el único suceso es $A = \{100\text{ °C}\}$ y el espacio de sucesos es $U = \{\emptyset, \{100\text{ °C}\}\}$.

- Lanzar una moneda dos veces (aleatorio).
 - El espacio muestral es $E = \{CC, CX, XC, XX\}$
 - Uno de sus sucesos es $A = \{XX, CC\}$. Si al realizar el experimento, en el primer lanzamiento se obtiene X y en el segundo X entonces el suceso A se ha verificado.
 - El espacio de sucesos contiene $2^4 = 16$ sucesos: $\{CC\}, \{CX\}, \{XC\}, \{XX\}, \{CC, CX\}, \{CC, XC\}, \{CC, XX\}, \{CX, XC\}, \{CX, XX\}, \{XC, XX\}, \{CC, CX, XC\}, \{CC, CX, XX\}, \{CC, XC, XX\}, \{CX, XC, XX\}, \{CC, CX, XC, XX\}, \{\emptyset\}$.
 - La probabilidad de obtener dos caras es $P(CC) = \frac{1}{4}$, pues es un suceso que se puede llevar a cabo mediante un solo caso favorable y hay cuatro posibles resultados.

- Lanzar un dado una vez (aleatorio).
 - El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 - Un suceso es $A_{\text{impar}} = \{1, 3, 5\}$. Si al realizar el lanzamiento se obtiene un número impar, se ha verificado el suceso A_{impar} . El conjunto U contiene $2^6 = 64$ sucesos.
 - La probabilidad de obtener un número impar es $P(n_{\text{impar}}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, pues tres de los seis números del dado son impares.

Considere dos sucesos A y B de un espacio muestral E , entonces se define lo siguiente.

- El suceso A **incluye** al suceso B , denotado por $B \subset A$, si siempre que se verifica B , se verifica también A .
- Son **iguales**, $A = B$, si siempre que se verifica uno de ellos se verifica también el otro.
- La **unión** de los sucesos A y B , denotada por $A \cup B$, es el suceso que se verifica cuando se verifica al menos uno de los sucesos A o B .

- La **intersección** de los sucesos A y B , denotada por $A \cap B$, es el suceso que se verifica cuando se verifican simultáneamente los sucesos A y B .
- Son **incompatibles** cuando $A \cap B = \emptyset$.
- Son **complementarios** cuando $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = E$, en este caso se denota por A^C al suceso complementario del suceso A .
- La **diferencia** de los sucesos A y B , denotada por $A \setminus B$, es el suceso que se verifica cuando A se verifica, pero no B , es decir, $A \setminus B = A \cap B^C$.

Por ejemplo, considere como experimento lanzar un dado de seis caras, el espacio muestral esta dado por el conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Sea A es el suceso que se verifica cuando salen números pares y B el suceso que se verifica cuando aparece el 2 o el 6, es decir, $A = \{2, 4, 6\}$ y $B_1 = \{2, 6\}$. De esta forma $B \subset A$, pues $2, 6 \in \{2, 4, 6\}$.
- Si se define el suceso $B_2 = \{2, 6, 4\}$ se tiene que todos los elementos de dicho suceso están en el suceso $A = \{2, 4, 6\}$ ($B \subset A$) y, de forma análoga, los elementos del suceso A se encuentran dentro del suceso B_2 ($A \subset B$). Por lo tanto, $A = B_2$.
- Sea los sucesos $C = \{1, 3, 5\}$, $D_1 = \{1, 2\}$, entonces la unión de los dos sucesos está dada por $C \cup D_1 = \{1, 2, 3, 5\}$ y este se verifica cuando aparece alguno de dichos números (verificándose C o D_1).
- Los sucesos $B_1 = \{2, 6\}$ y $D_1 = \{1, 2\}$ se verifican al mismo tiempo cuando aparece un 2, es decir, se verifica el suceso $B_1 \cap D_1 = \{2\}$.
- Los sucesos $A = \{2, 4, 6\}$ y $C = \{1, 3, 5\}$ son complementarios. En efecto, $A \cap C = \emptyset$ ya que no comparten ningún elemento; además, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$.
- Sea $D_2 = \{3, 6\}$, entonces el suceso $A \setminus D_2 = \{2, 4, 6\} \setminus \{3, 6\} = \{2, 4\}$ se verifica cuando sale 2 o 4 en un lanzamiento, de esta forma, se verifica A y no se verifica D_2 .

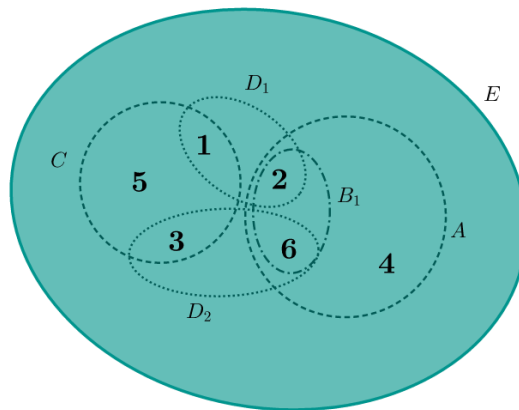


Ilustración 49. Diagrama de Venn de los sucesos $A = \{2, 4, 6\}$, $B_1 = \{2, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\}$, $D_1 = \{1, 2\}$ y $D_2 = \{3, 6\}$ correspondientes al lanzamiento de un dado de seis caras, cuyo espacio muestral E los contiene.

Considere A y B dos sucesos cualesquiera de un espacio muestral E no necesariamente incompatibles. Para el cálculo de las probabilidades de los sucesos se tienen los siguientes resultados

- En general, $P(A) \leq 1$ y $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.
- La probabilidad del suceso $A \cup B$ es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
 - Si A y B son incompatibles, es decir, $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cap B) = 0$, y

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- La probabilidad del suceso complementario de A es

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$
- La probabilidad de la diferencia de A y B es

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$
- Si $P(A) \neq 0$, la probabilidad del suceso B condicionada por el suceso A , denotada por $P(B|A)$, está dada por la fórmula

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$
 - Si B y C son incompatibles, es decir, $B \cap C = \emptyset$, entonces

$$P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A).$$
 - Si $P(A) \neq 0$, entonces

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$
 - Para tres sucesos, tales que $P(A) \neq 0$, se cumple que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B).$$
- Si $P(A) \neq 0$, B es independiente del suceso A si $P(B|A) = P(B)$. En caso contrario, si $P(B|A) \neq P(B)$, el suceso B es dependiente del suceso A .
 - Cuando A y B son independientes, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Considere el siguiente ejemplo.

La *baraja inglesa* contiene 52 naipes; está dividida en cuatro palos (en inglés, *suit*), dos de color rojo y dos de color negro: Picas (o espadas) de color negro (\spadesuit); Tréboles (o flores) de color negro (\clubsuit); Corazones (o copas) de color rojo (\heartsuit); y Diamantes (o rombos) de color rojo (\diamondsuit). Cada palo se compone de 13 naipes siendo 9 numerales y 4 literales: \mathcal{A} (*ace*), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \mathcal{J} (*Jack*), \mathcal{Q} (*Queen*), \mathcal{K} (*King*). A continuación, se describen varios experimentos, de los cuales se expone su espacio muestral. Si se cuenta con una baraja inglesa, se puede comprobar el resultado directamente contando los naipes y con la fórmula.

- En el experimento, sacar un naipe, el espacio muestral es

$$E = \{\mathcal{A}\spadesuit, 2\spadesuit, \dots, 10\spadesuit, \mathcal{J}\spadesuit, \mathcal{Q}\spadesuit, \mathcal{K}\spadesuit, \mathcal{A}\clubsuit, 2\clubsuit, \dots, 10\clubsuit, \mathcal{J}\clubsuit, \mathcal{Q}\clubsuit, \mathcal{K}\clubsuit, \\ \mathcal{A}\heartsuit, 2\heartsuit, \dots, 10\heartsuit, \mathcal{J}\heartsuit, \mathcal{Q}\heartsuit, \mathcal{K}\heartsuit, \mathcal{A}\diamondsuit, 2\diamondsuit, \dots, 10\diamondsuit, \mathcal{J}\diamondsuit, \mathcal{Q}\diamondsuit, \mathcal{K}\diamondsuit\},$$
 y contiene 52 elementos (total de naipes de la baraja inglesa) y el espacio U contiene $2^{52} \approx 4.5 \times 10^{15}$ sucesos.

La probabilidad de sacar la carta $\mathcal{A}\diamondsuit$ es $P = \frac{1}{52}$, pues hay un único naipe de la baraja con $\mathcal{A}\diamondsuit$ y hay 52 posibilidades en total.

- Los sucesos de palos rojos son

$$N_{\heartsuit} = \{A_{\heartsuit}, 2_{\heartsuit}, \dots, 10_{\heartsuit}, J_{\heartsuit}, Q_{\heartsuit}, K_{\heartsuit}\},$$

$$N_{\diamondsuit} = \{A_{\diamondsuit}, 2_{\diamondsuit}, \dots, 10_{\diamondsuit}, J_{\diamondsuit}, Q_{\diamondsuit}, K_{\diamondsuit}\},$$

y los de palos negros son

$$N_{\spadesuit} = \{A_{\spadesuit}, 2_{\spadesuit}, \dots, 10_{\spadesuit}, J_{\spadesuit}, Q_{\spadesuit}, K_{\spadesuit}\},$$

$$N_{\clubsuit} = \{A_{\clubsuit}, 2_{\clubsuit}, \dots, 10_{\clubsuit}, J_{\clubsuit}, Q_{\clubsuit}, K_{\clubsuit}\}.$$

donde cada uno contiene 13 elementos. Se puede observar que los sucesos son incompatibles, pues sus intersecciones dos a dos son vacías.

- Si $p_{\spadesuit} = \{2_{\spadesuit}, 4_{\spadesuit}, 6_{\spadesuit}, 8_{\spadesuit}, 10_{\spadesuit}\} \subset N_{\spadesuit}$ es el suceso de numerales pares de Picas negras, es menos probable sacar una pica par que sacar cualquier naipe con pica de la baraja, esto es $P(p_{\spadesuit}) < P(N_{\spadesuit})$, esto es, $\frac{5}{52} < \frac{13}{52}$.
- Si $N_{\spadesuit} \setminus p_{\spadesuit} = \{A_{\spadesuit}, 3_{\spadesuit}, 5_{\spadesuit}, 7_{\spadesuit}, 9_{\spadesuit}, J_{\spadesuit}, Q_{\spadesuit}, K_{\spadesuit}\}$, la probabilidad de dicho suceso está dada por la fórmula $P(N_{\spadesuit} \setminus p_{\spadesuit}) = P(N_{\spadesuit}) - P(N_{\spadesuit} \cap p_{\spadesuit}) = \frac{13}{52} - \frac{5}{52} = \frac{8}{52}$.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un naipe rojo?

Nótese que el conjunto $N_{\heartsuit} \cup N_{\diamondsuit}$ contiene todos los naipes rojos, entonces, la probabilidad de sacar un naipe rojo es igual a la probabilidad de sacar un naipe de corazones o un naipe de diamantes, esto es,

$$P(\text{naipe}_{\text{rojo}}) = P(N_{\heartsuit} \cup N_{\diamondsuit})$$

y como los sucesos son incompatibles se puede escribir

$$P(N_{\heartsuit} \cup N_{\diamondsuit}) = P(N_{\heartsuit}) + P(N_{\diamondsuit}),$$

siendo $P(N_{\heartsuit}) = \frac{13}{52}$ y $P(N_{\diamondsuit}) = \frac{13}{52}$, pues ambos palos contienen 13 naipes y la baraja es de 52. Finalmente,

$$P(\text{naipe}_{\text{rojo}}) = P(N_{\heartsuit} \cup N_{\diamondsuit}) = P(N_{\heartsuit}) + P(N_{\diamondsuit}) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52}.$$

Y, directamente, la probabilidad de sacar un naipe negro es $P(\text{naipe}_{\text{negro}}) = \frac{26}{52}$. Nótese que el resultado se puede simplificar.

- El suceso de numerales de la baraja es

$$M = \{2_{\spadesuit}, \dots, 10_{\spadesuit}, 2_{\clubsuit}, \dots, 10_{\clubsuit}, 2_{\heartsuit}, \dots, 10_{\heartsuit}, 2_{\diamondsuit}, \dots, 10_{\diamondsuit}\}$$

el cual contiene 36 naipes; el suceso de literales de la baraja

$$L = \{A_{\spadesuit}, J_{\spadesuit}, Q_{\spadesuit}, K_{\spadesuit}, A_{\clubsuit}, J_{\clubsuit}, Q_{\clubsuit}, K_{\clubsuit}, A_{\heartsuit}, J_{\heartsuit}, Q_{\heartsuit}, K_{\heartsuit}, A_{\diamondsuit}, J_{\diamondsuit}, Q_{\diamondsuit}, K_{\diamondsuit}\}$$

contiene 16 naipes.

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un naipe que contenga un numeral o sea negro? El suceso de naipes negros $N_{\text{negro}} = N_{\spadesuit} \cup N_{\clubsuit}$ contiene 26 naipes. Entonces, la probabilidad de extraer un naipe de la baraja que sea un numeral o sea negro está dada por $P(M \cup N_{\text{negro}})$. Como

$$M \cap N_{\text{negro}} = \{2_{\spadesuit}, \dots, 10_{\spadesuit}, 2_{\clubsuit}, \dots, 10_{\clubsuit}\} \neq \emptyset$$

y contiene 18 elementos (9 numerales de cada palo negro), se puede escribir

$$P(M \cup N_{\text{negro}}) = P(M) + P(N_{\text{negro}}) - P(M \cap N_{\text{negro}}),$$

de donde $P(M) = \frac{36}{52}$, $P(N_{\text{negro}}) = \frac{26}{52}$ y $P(M \cap N_{\text{negro}}) = \frac{18}{52}$. Finalmente,

$$P(M \cup N_{\text{negro}}) = \frac{36}{52} + \frac{26}{52} - \frac{18}{52} = \frac{44}{52},$$

es decir, de 52 naipes en la baraja, 44 son numerales o son negros y la probabilidad de extraer una con alguna de las condiciones mencionadas es igual a $\frac{44}{52}$.

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un literal de la baraja?

El suceso de literales de la baraja está dado por el conjunto $L = M^c$, es decir, contiene todos los naipes de la baraja que no son numerales. Entonces

$$P(L) = P(M^c) = 1 - P(M) = 1 - \frac{36}{52} = \frac{52}{52} - \frac{36}{52} = \frac{52 - 36}{52} = \frac{16}{52}.$$

Esto es, de 52 naipes, 36 son numerales y, por lo tanto, 16 son literales.

- Ahora, considere los sucesos de números pares de los palos rojos

$$p_{\heartsuit} = \{2\heartsuit, 4\heartsuit, 6\heartsuit, 8\heartsuit, 10\heartsuit\},$$

$$p_{\spadesuit} = \{2\spadesuit, 4\spadesuit, 6\spadesuit, 8\spadesuit, 10\spadesuit\},$$

los sucesos de números pares de los palos negros

$$p_{\clubsuit} = \{2\clubsuit, 4\clubsuit, 6\clubsuit, 8\clubsuit, 10\clubsuit\},$$

$$p_{\diamondsuit} = \{2\diamondsuit, 4\diamondsuit, 6\diamondsuit, 8\diamondsuit, 10\diamondsuit\}.$$

y el suceso de números pares $p = p_{\heartsuit} \cup p_{\spadesuit} \cup p_{\clubsuit} \cup p_{\diamondsuit}$.

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un naipe que contenga un número rojo que sea par?

La probabilidad solicitada se refiere a una probabilidad condicionada, es decir, al momento de sacar el naipe este debe de ser rojo y está condicionado a ser un número par. Para ello se recuerda que $P(N_{\text{rojo}}) = \frac{26}{52}$ y como el suceso

$$p \cap N_{\text{rojo}} = \{2\heartsuit, 4\heartsuit, 6\heartsuit, 8\heartsuit, 10\heartsuit, 2\spadesuit, 4\spadesuit, 6\spadesuit, 8\spadesuit, 10\spadesuit\},$$

entonces $P(p \cap N_{\text{rojo}}) = \frac{10}{52}$. Por lo tanto

$$P(N_{\text{rojo}} | p) = \frac{P(p \cap N_{\text{rojo}})}{P(N_{\text{rojo}})} = \frac{10/52}{26/52} = \frac{10}{26}$$

esto es, de los 26 posibles naipes rojos hay 10 con un número par.

- Análogamente, como $P(p) = 20/52$, la probabilidad de sacar un número par que sea rojo está dada por

$$P(p | N_{\text{rojo}}) = \frac{P(p \cap N_{\text{rojo}})}{P(p)} = \frac{10/52}{20/52} = \frac{10}{20}$$

esto es, de 20 naipes con un número par, 10 son rojos.

- Al sacar naipes al azar,

- ¿Cuál es la probabilidad de que tres consecutivos sean rojos?

La probabilidad de sacar un naipe rojo es $P(N_{\text{rojo}}) = 26/52$. Supóngase que se llevo a cabo el experimento con éxito, ahora la baraja cuenta con 25 naipes rojos de 51 naipes en total. En este momento, la probabilidad de sacar un segundo naipe rojo es $P(N_{2\text{rojo}}) = \frac{25}{51}$. Análogamente, para el tercer naipe rojo $P(N_{3\text{rojo}}) = \frac{24}{50}$. Entonces la probabilidad de que ambos eventos ocurran al mismo tiempo es

$P(N_{\text{rojo}} \cap N_{2\text{rojo}} \cap N_{3\text{rojo}}) = P(N_{\text{rojo}}) \cdot P(N_{2\text{rojo}} | N_{\text{rojo}}) \cdot P(N_{3\text{rojo}} | N_{\text{rojo}} \cap N_{2\text{rojo}})$, es decir, se calcula la probabilidad de sacar un naipe, multiplicada por la probabilidad de sacar el segundo, condicionada a que se saque el primer naipe. El resultado es

$$P(N_{\text{rojo}} \cap N_{2\text{rojo}}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} = \frac{15\,600}{132\,600} \approx 0.12.$$

- ¿Cuál es la probabilidad de uno sea rojo y otro negro?

Como se vio anteriormente $P(N_{\text{rojo}}) = 26/52$ y $P(N_{\text{negro}}) = 26/52$. Sin embargo, el segundo naipe se sacará de una baraja con 51 cartas, entonces

$$P(N_{\text{rojo}} \cap N_{\text{negro}}) = P(N_{\text{rojo}}) \cdot P(N_{\text{negro}}|N_{\text{rojo}}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{26}{51} = \frac{676}{2652} = 0.25.$$

1.29.3 Aplicación de la teoría combinatoria al cálculo de probabilidades

Supóngase que en un experimento se puede hablar de éxito si se verifica un determinado suceso, y de fracaso si se verifica el suceso contrario. Considere el suceso en donde, al llevar a cabo n ensayos, los primeros k son éxitos y los siguientes $(n - k)$ son fracasos, su probabilidad está dada por el número $p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$. El orden en el que se llevan a cabo (o se obtienen) los éxitos y fracasos no importa para el cálculo de la probabilidad, sin embargo, es necesario calcular de cuántas maneras (número de ordenaciones) se puede obtener el resultado. Para ello, se toman *las combinaciones posibles de n elementos tomados de k en k*

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

entonces, la *probabilidad de obtener k éxitos en n ensayos* está dada por la cantidad

$$\left(\frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} \right) \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Teorema (Distribución binomial). Sea X una variable aleatoria discreta que representa el número de éxitos en n intentos y que, por lo tanto, puede tomar los valores $0, 1, \dots, n$, y sea p la probabilidad de un éxito independiente. Entonces, la colección de valores de una variable aleatoria X está distribuida de forma binomial si:

$$P_B(X = k; n, p) = \begin{cases} C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, & 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases},$$

de donde C_n^k son las combinaciones de n elementos tomados de k en k .

Por ejemplo, considere una caja con n bolas, donde hay x bolas blancas y $(n - x)$ bolas negras. Al sacar una bola de la caja sin ver hay dos posibilidades, que sea blanca o que sea negra. En este experimento, el suceso extraer una bola blanca será considerado como éxito; el contrario, sacar una bola negra, como fracaso. Si se repite el experimento, pero devolviendo la bola en cada extracción, la probabilidad de éxito es constante e igual a $\frac{x}{n}$. Sin embargo, si se mantienen afuera las bolas con cada extracción, la probabilidad va cambiando conforme salen negras o blancas. Ahora considere que la caja contiene 20 bolas, de las cuales 11 son blancas y 9 son negras, la probabilidad de sacar 10 bolas blancas en 15 intentos se calcula como sigue: el número de éxitos buscado es $k = 10$; el número de intentos permitidos para ello es $n = 15$; la probabilidad de un éxito independiente es $p = \frac{\text{bolas blancas}}{\text{bolas}} = \frac{11}{20} = 0.55$ y $1 - p = 1 - \frac{11}{20} = 0.45$ es la probabilidad de un fracaso independiente; las combinaciones de 15 elementos tomados de 10 en 10 son

$$\begin{aligned} C_{15}^{10} &= \binom{15}{10} = \frac{15!}{10! \cdot (15 - 10)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)} \\ &= \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{11 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 13 \cdot (7 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 5)}{2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5} = 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 7 = 3\,003; \end{aligned}$$

finalmente,

$$\begin{aligned}P\left(X = 10; 15, \frac{11}{20}\right) &= \binom{15}{10} \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{11}{20}\right)^{15-10} \\&= (3\,003) \cdot (0.0025) \cdot (0.0185) \\&= 0.1389.\end{aligned}$$

Bibliografía sugerida

- Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams, T. A. (2008). Estadística para administración y economía. Cengage Learning Editores, S.A.
- Aguilar Marqués, A., Bravo Vázquez, F. V., Cerón Villegas, M., Gallegos Ruiz, H. A., & Reyes Figueroa, R. (2014). Aritmética y Álgebra, Matemáticas Simplificadas (2da ed.). Pearson.
- Anfossi, A. (1954). Cálculo, diferencial e integral, para preparatoria. Progreso, S.A.
- Balan Novelo, J., Chin Moreno, M., Cuenca Villamonte, S. A., Salas López, N., & Zavala Centeno, B. (2020). Compilación de ejercicios de la unidad de aprendizaje, álgebra básica. URL: <https://prepaermilo.uacam.mx/view/download?file=162/ANTOLOGIA%20ALGEBRA%20BASICA%202019.pdf&tipo=paginas>
- Baldor, A. (2019). Álgebra (4ta ed.). Patria.
- Baldor, A. (2019). Geometría y trigonometría (4ta ed.). Patria.
- Barrantes, M. C., Zamora, V., & Barrantes, M. (2021). Las demostraciones dinámicas del Teorema de Pitágoras. Revista de Educación Matemática, 36(1), 27-42.
- Bulajich-Manfrino, R., & Gómez-Ortega, J. A. (2002). Geometría: Cuadernos de Olimpiadas Matemáticas. Instituto de Matemáticas UNAM.
- Cálculo Diferencial e Integral I (2023). Portal Académico del CCH, UNAM. URL: <https://portalacademico.cch.unam.mx/calculo1>
- Cálculo Diferencial e Integral II (2023). Portal Académico del CCH, UNAM. URL: <https://portalacademico.cch.unam.mx/calculo2>
- Cuéllar Carvajal, J. A. (2004). Álgebra. Mc Graw Hill Interamericana.
- Dowling, E. T. (1991). Teoría y problemas de cálculo para administración, economía y ciencias sociales. Santafé de Bogotá, Colombia: Mc Graw Hill Interamericana.
- Fuenlabrada de la Vega Trucíos, S. (2004). Geometría y Trigonometría. Mc Graw Hill Interamericana.
- Gutiérrez González, E. (2014). Probabilidad y estadística, aplicaciones a la ingeniería y las ciencias. Grupo Editorial Patria.
- Guzmán Herrera, A. (2017). Geometría y Trigonometría. Grupo Editorial Patria S.A. de C.V.
- Hasser, N. B., La Salle, J., & Sullivan, J. (2009). Análisis matemático Vol. 1. Editorial Trillas.
- Hemmerling, E. M. (2005). Elementos básicos de la geometría. Limusa S.A. De C.V.
- Hernández, S. L. (2010). Trigonometría Preuniversitaria. Limusa S.A. De C.V.
- Hertzer, K. (2019). Funciones y Cálculo Diferencial, Nivel Medio Superior con aplicación de simulador Graphmatica (1ra ed.). Grupo Editorial Uribe-GC SA de CV
- Kindle, J. H. (2007). Geometría Analítica (1ra ed.). McGraw-Hill Interamericana.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2016). Cálculo (Tomo I, 10ma ed.). Cengage Learning.

Larson, R., & Hostetler, R. (2018). Precálculo. Reverté.

Lehmann, H. C. (2001). Álgebra. Limusa.

Matemáticas 1 (2023). Portal Académico del CCH, UNAM. URL:
<https://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas1>

Matemáticas 2 (2023). Portal Académico del CCH, UNAM. URL:
<https://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas2>

Moncho Vasallo, J. (2015). Estadística aplicada a las ciencias de la salud. Elsevier.

Pérez-Seguí, M. L., Bulajich-Manfrino, R., & Gómez-Ortega, J. A. (2000). Combinatoria: Cuadernos de Olimpiadas Matemáticas. Instituto de Matemáticas UNAM.

Rees, P. K., & Sparks, F. W. (2011). Algebra. McGraw-Hill.

Rodríguez Wilhelmi, M. (2004). Combinatoria y probabilidad. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. URL:
<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/librowhilhelmi.pdf>

Ross, S. M. (2018). Introducción a la estadística. Reverté.

Soto, S. J. (2005). Curso de matemáticas IV. Bachillerato. México: Dirección general ENP. UNAM.

Spivak, M. (2006). Calculus. Cambridge University Press.

Stewart, J. (2002). Cálculo de una variable. Trascendentes y Tempranas (4ta ed.). Thomson.

Weimer, R. C. (2002). Estadística. Compañía Editorial Continental, S.A. De C.V.

2. Humanidades

2.1 La Filosofía como Disciplina

La intensa vida política de la antigua Grecia, sus intercambios comerciales con diversos pueblos, el contacto con diferentes formas de vida y conocimientos de otras culturas, la observación de los fenómenos naturales y el deseo de ofrecer explicaciones racionales para estos, contribuyeron a la formación de una visión particular del universo, que dio lugar al surgimiento de la filosofía. Esta disciplina se centra en el estudio de cuestiones fundamentales sobre la existencia, el conocimiento, la verdad, la moral, la mente y el lenguaje, buscando entender y explicar los principios que rigen la realidad y nuestra percepción de ella. Los filósofos desarrollan teorías y conceptos que permiten cuestionar y comprender mejor nuestras propias ideas y prejuicios. De este modo, la filosofía se convierte en una herramienta clave no solo en el ámbito académico, sino también en la vida diaria, promoviendo la reflexión y el compromiso con el conocimiento.

2.1.1 Diferencias entre mito, filosofía y ciencia

Muchos eventos a nuestro alrededor nos parecen misteriosos, por lo que buscamos explicaciones, a menudo fantásticas, a través de mitos que tratan de resolver grandes enigmas sobre el origen del universo, el ser humano y sus costumbres. Con el tiempo, el pensamiento mítico fue reemplazado por una visión más racional de la realidad, basada en la causa y efecto, y en la idea de que los fenómenos son producto de cambios naturales, no de intervenciones sobrenaturales. Los primeros filósofos buscaron la verdad mediante la razón, reflexionando sobre lo correcto e incorrecto, mientras que la ciencia, mediante la observación y la experimentación, trata de describir el mundo de manera objetiva, desarrollando hipótesis que se prueban a través del método científico.

2.1.2 Características de la filosofía

La filosofía es una forma de pensamiento que busca comprender profundamente el mundo, a nosotros mismos y nuestras relaciones con los demás. Entre sus características principales está su actitud crítica, ya que cuestiona todo, incluso lo que parece obvio, para llegar a la verdad. También es reflexiva, porque invita a pensar con calma sobre temas como el conocimiento, la moral o la existencia. Otra característica es su universalidad: se interesa por cuestiones que afectan a todos los seres humanos, como el sentido de la vida o la justicia. Además, es sistemática, porque organiza sus ideas de manera lógica y coherente. Finalmente, la filosofía no busca respuestas simples ni inmediatas, sino que fomenta el diálogo y el análisis constante, ayudándonos a entender mejor el mundo y nuestro lugar en él.

2.1.3 Ramas de la filosofía

Son las distintas áreas de estudio que nos ayudan a cuestionar y reflexionar sobre los diferentes aspectos de la realidad. Cada una de estas ramas aborda preguntas fundamentales que nos permiten comprender mejor el mundo, nuestra vida y nuestro pensamiento.

- **Metafísica.** Se ocupa de las preguntas más profundas sobre la existencia. Trata de entender qué es el ser, qué significa existir y cuál es la naturaleza de todo lo que existe.
- **Epistemología.** Busca responder cómo sabemos lo que sabemos, qué es la verdad y cuáles son los límites del conocimiento.
- **Lógica.** Nos enseña a razonar sin caer en errores o contradicciones. Gracias a esta podemos distinguir entre argumentos válidos y falsos, lo cual es esencial para pensar con claridad y tomar decisiones razonadas.

- Ética. estudia la conducta humana desde el punto de vista del bien y del mal. Su objetivo es ayudarnos a vivir de manera justa, responsable y respetuosa con los demás.
- Estética. nos invita a apreciar y comprender el valor de las experiencias artísticas en la vida humana.

2.1.4 Métodos de la filosofía

Son las diversas herramientas intelectuales que los filósofos han utilizado a lo largo de la historia del pensamiento humano para acercarse al conocimiento, permitiendo investigar, razonar, construir argumentos sólidos e interpretar y evaluar ideas filosóficas.

- Mayéutico. Consiste en hacer preguntas para que la otra persona descubra por sí misma el conocimiento que lleva dentro.
- Dialéctico. Se basa en la confrontación de ideas opuestas para llegar a una verdad más profunda. Primero se plantea una idea (tesis), luego se presenta una contraria (antítesis) y finalmente se busca una síntesis que las supere.
- Lógico. Se enfoca en el razonamiento correcto. Usa reglas y principios que permiten llegar a conclusiones válidas a partir de premisas verdaderas.
- Hermenéutico. Se aplica sobre todo a textos, símbolos o discursos para descubrir su sentido profundo.
- Fenomenológico. Propone estudiar las cosas tal como se presentan a la conciencia, sin prejuicios. Busca describir las experiencias humanas tal como se viven, antes de hacer juicios o explicaciones científicas.
- Escolástico. Fue característico de la Edad Media y combinó la fe con la razón. Los filósofos escolásticos, como Santo Tomás de Aquino, trataban de explicar racionalmente las verdades religiosas, usando argumentos lógicos y teológicos.
- Cartesiano. Creado por René Descartes, parte de la duda metódica: poner en duda todo aquello que no sea completamente cierto, hasta encontrar una verdad indudable.
- Empirista. Sostiene que todo conocimiento proviene de la experiencia. Filósofos como John Locke y David Hume afirmaban que la mente humana al nacer es como una hoja en blanco que se llena con lo que percibimos a través de los sentidos

2.2 Ética

La ética es una disciplina filosófica que estudia la moralidad, el comportamiento humano y los principios que orientan las acciones de los individuos. Su propósito es fomentar la responsabilidad moral y guiar hacia el bien individual y colectivo, dotando de sentido a la existencia. Como ciencia normativa, se enfoca en los valores éticos, la conciencia y la libertad, que son esenciales para la toma de decisiones conscientes y responsables.

2.2.1 Diferencia entre ética y moral.

La ética y la moral son ideas muy parecidas que a menudo se confunden, pero en realidad tienen significados diferentes. Ambas nos ayudan a saber cómo debemos comportarnos y lo que está bien o mal, pero lo hacen de maneras distintas. Entender esta diferencia es importante para saber de dónde vienen nuestros valores y cómo tomamos decisiones en el día a día.

Ética	Moral
<p>*Proviene del vocablo griego <i>ethos</i>, que significa costumbre, hábito, carácter.</p> <p>*Abre preguntas que han acompañado a los seres humanos en su devenir histórico y su proceso de consciencia de sí y para sí.</p> <p>*Disciplina filosófica que estudia la moral.</p>	<p>*Proviene del latín <i>moralis</i>, que significa costumbre o hábito.</p> <p>*La moral se entiende como el conjunto de reglas, normas y principios que rigen el comportamiento interior y exterior de los individuos en la dinámica social.</p> <p>*No existe comunidad sin moral pues todo grupo humano cuenta con un conjunto de reglas y/o principios para la convivencia.</p>

2.2.2 Principales conceptos de la ética (virtudes).

Aristóteles, propone una visión de la virtud como el camino hacia la vida plena, que define como *eudaimonía* (felicidad o florecimiento humano). Para él, la virtud (*areté*) no es un simple hábito, sino una excelencia que permite a una persona cumplir con su función propia como ser humano racional. Este concepto se relaciona profundamente con otros términos como *aghatós* y *ethos*, que ayudan a entender su filosofía ética.

El *ethos* no es algo con lo que se nace, sino una cualidad que se forma a través de la práctica constante de acciones virtuosas. El carácter moral de un individuo se configura en relación con su entorno, influido por la sociedad, la educación y las vivencias personales. Además, el *ethos* tiene un componente social y cultural, ya que las virtudes se desarrollan dentro de una comunidad que puede tanto incentivar como obstaculizar el camino hacia la excelencia.

El término *aghatós* hace referencia a "lo bueno" o "lo virtuoso" y está estrechamente vinculado con la *eudaimonía*. Aristóteles afirma que todas las acciones humanas están orientadas hacia un fin último: el bien supremo que otorga significado a la vida. Este bien, identificado como la felicidad en términos de autorrealización, se logra viviendo de acuerdo con la virtud. De esta manera, quien cultiva la *areté* y desarrolla un *ethos* adecuado se convierte en una persona *aghatós*.

2.2.3 Teorías éticas

Desde el ámbito de la filosofía, uno de los grandes retos del sujeto moral es distinguir entre lo bueno y lo malo, basándose en los principios éticos y morales que ha desarrollado a lo largo de su vida. Estos principios se forman mediante la interacción y socialización con su entorno, como la familia y la comunidad, que influyen en sus juicios de valor y en su identidad moral. La evolución de este sujeto —su formación, consolidación y posibles crisis— puede entenderse desde diversas perspectivas éticas, lo que permite una mejor comprensión de su desarrollo moral.

- Eudemonismo. Considera que el fin último del saber es la felicidad. Su principal representante es Aristóteles, quien afirmaba que una vida buena es aquella en la que la persona actúa con virtud y equilibrio.
- Hedonismo. Sostiene que lo bueno es aquello que produce placer y evita el dolor. Para los filósofos hedonistas, como Epicuro, el placer no significa solo disfrutar de cosas materiales, sino alcanzar la tranquilidad del alma y una vida sin sufrimientos innecesarios.

- Estoicismo. Enseña que la virtud consiste en controlar las pasiones y aceptar con serenidad lo que no podemos cambiar.
- Contractualismo. Propone que la moral surge de un acuerdo o contrato social entre las personas.
- Ética formal. Afirma que lo importante no son las consecuencias de las acciones, sino la intención con la que se actúa.
- Utilitarismo. Considera que lo correcto es lo que produce el mayor bien para el mayor número de personas.
- Vitalismo. Valora la vida como la base ética.
- Multiculturalismo. Promueve el respeto y la convivencia entre distintas culturas.
- Existencialismo. Centra la ética en la libertad y responsabilidad individual.

2.2.4 La satisfacción de las necesidades humanas frente a los derechos de otros seres vivos

El hombre es un ser social por naturaleza y, en su interacción con otros seres vivos, se diferencia de ellos en el grado de inteligencia para transformar su entorno en beneficio propio, generando bienes de consumo que le permiten subsistir y produciendo valores culturales, como la tolerancia, la justicia y la solidaridad, esenciales para la vida en comunidad. Como individuo en sociedad, el hombre construye normas, principios, valores y leyes que regulan su conducta y su relación con los demás, con el fin de garantizar el bien común. Así, el desafío es encontrar un equilibrio ético y sostenible que permita satisfacer las necesidades humanas de una manera que no solo garantice el respeto por otros seres vivos, sino que también preserve el ambiente en su totalidad.

Existen diferentes enfoques que buscan equilibrar el bienestar humano con el respeto hacia la vida de otros seres. El enfoque antropocéntrico sitúa al ser humano en el centro de todo lo que lo rodea, considerando que el entorno está al servicio de sus intereses. En contraste, el biocentrismo establece que todos los seres vivos son merecedores de respeto por ser otras formas de vida y tienen derecho a existir y desarrollarse.

2.2.5 El ejercicio de la libertad frente al respeto a los demás en las relaciones interpersonales

El ejercicio de la libertad requiere equilibrar conceptos como la autonomía, el determinismo, la heteronomía y la responsabilidad. El ser humano es libre porque puede autodeterminarse y construir su propio destino, no solo por moverse conscientemente, sino porque tiene la capacidad de pensar, expresarse, reunirse y decidir quién quiere ser y quién lo representa. Para los griegos, la libertad se definía como no pertenecer a otro, siendo soberano de uno mismo y de sus actos. Esta facultad es esencial en la ética, pues sin libertad no tendría sentido hablar de moralidad o de la forma en que adoptamos y respondemos a las normas. Así, la verdadera libertad implica responsabilidad: la capacidad de responder por nuestras decisiones.

2.3 Filosofía política

La Filosofía Política se ocupa del estudio y análisis de los fenómenos políticos desde una perspectiva normativo-prescriptiva. Entre los temas que abarca se incluyen el origen y las formas de organización del poder político, el análisis de las instituciones sociales y la consideración de las normas, principios y valores que las fundamentan.

Asimismo, tiene como tarea la construcción, clasificación y esclarecimiento de conceptos fundamentales como la justicia, la libertad, la democracia, la nacionalidad y la pluralidad cultural, los cuales conforman el universo político.

Entre los problemas más relevantes abordados históricamente se encuentran: la naturaleza de la política, el análisis de las distintas formas de gobierno que se ejercen en las naciones y sus condiciones de legitimidad, las teorías de la justicia, la teoría del contrato social y cuestiones relacionadas con la igualdad, la libertad, la democracia, la justicia, así como los límites de las dinámicas de poder.

2.3.1 El interés del individuo frente al interés de la colectividad en la toma de decisiones políticas

La cultura está compuesta por elementos interconectados que forman una unidad en la que los actos, acontecimientos y objetos adquieren sentido, valor y función. Estas relaciones culturales se desarrollan siempre dentro de un contexto institucional, definido por una formación social, histórica y un sistema económico-político, bajo la autoridad y regulación del Estado.

La política, como expresión organizada de la vida de la vida social, organiza la sociedad mediante un sistema político compuesto por diversas partes que cumplen funciones específicas y comparten responsabilidades. Dicho sistema responde a un momento histórico y un territorio determinado, reflejando una cultura que manifiesta tanto los valores compartidos como las contradicciones de su orden institucional.

En esencia, la política trata de cómo las personas dentro de una cultura toman conciencia de sí mismas y de los demás para proyectar colectivamente su futuro, ya sea preservando o transformando sus estructuras sociales. Este proceso requiere autoconciencia, es decir, la capacidad de reconocer el propio papel y responsabilidad en la sociedad; conciencia social, entendida como la empatía y el compromiso con las necesidades y derechos de los otros y conciencia política, que implica comprender las relaciones de poder y participar de manera crítica e informada en la toma de decisiones colectivas.

La política debe entenderse como una práctica humana integral: una ciencia del Estado, y a la vez, un ejercicio de responsabilidad ciudadana. A través de ella, los grupos sociales no solo buscan organizar y regular la vida colectiva, sino también construir acuerdos que equilibren el poder, promuevan la justicia y fortalezcan la convivencia democrática.

2.3.2 Los derechos del individuo frente a los derechos de la colectividad

Encontrar un equilibrio entre los derechos de cada persona y los de la colectividad constituye uno de los mayores retos de las sociedades contemporáneas. Los derechos individuales, como la libertad de expresión, la propiedad personal o la autodeterminación, protegen a las personas frente a posibles abusos del poder o de las mayorías. En cambio, los derechos colectivos, como la seguridad, la salud, la educación y el bienestar general, buscan garantizar condiciones dignas y equitativas para todos los miembros de la sociedad.

Con frecuencia, ambos tipos de derechos entran en tensión; cuando el ejercicio de una libertad individual afecta negativamente a los demás, o cuando las normas destinadas a proteger el bien común limitan en exceso la autonomía personal. Estas tensiones obligan a reflexionar desde la filosofía, que analiza los principios éticos y políticos que sustentan la convivencia, y desde la praxis, que pone en acción dichos principios mediante decisiones, leyes e instituciones.

La búsqueda del equilibrio entre lo individual y lo colectivo no es solo un problema jurídico o político, sino también un proyecto ético y utópico: imaginar y construir una sociedad donde la libertad personal y la justicia social se complementen en lugar de oponerse. La utopía, en este sentido, no es un sueño inalcanzable, sino una guía que orienta las acciones humanas hacia la construcción de un orden más justo, solidario y consciente de su propia dignidad.

2.3.3 El respeto a los derechos del individuo en el contexto de la diversidad cultural

Los derechos humanos son los derechos que todas las personas tienen solo por el hecho de haber nacido, sin importar cosas como su raza, religión, género, edad, lugar de nacimiento o su situación económica. Estos derechos son universales, lo que significa que se aplican a todas las personas en cualquier parte del mundo, y están todos conectados entre sí. No se pueden separar, ya que el respeto de unos afecta a los otros. Además, los gobiernos, sin importar el tipo de sistema político que tengan, tienen la responsabilidad de garantizar que estos derechos se respeten y se cumplan para todas las personas.

Derecho consuetudinario. Este tipo de derecho surge cuando no existen leyes escritas, pero las personas de una comunidad o grupo social siguen costumbres y reglas no escritas que todos aceptan. Estas normas reflejan las tradiciones y valores de su cultura, y son respetadas por toda la comunidad, especialmente en comunidades indígenas o grupos étnicos.

2.4 Lógica

La lógica es una disciplina filosófica que se encarga de estudiar las reglas que hacen que nuestro razonamiento sea preciso y válido. Su propósito es examinar cómo pensamos a través de los argumentos, que son formas de expresar nuestras ideas mediante el lenguaje. La lógica nos permite detectar si estamos razonando correctamente o si estamos cometiendo errores en nuestro pensamiento. Como ciencia, la lógica requiere pruebas y evidencias antes de aceptar algo como verdadero o falso, y asegura que todo razonamiento esté basado en argumentos sólidos.

2.4.1 Estructura de las argumentaciones y sus diferentes tipos

La lógica se ocupa de la expresión lingüística del pensamiento. A través de los términos y proposiciones, evaluamos cómo razonamos. Una proposición es un enunciado que afirma o niega algo sobre un sujeto. Las proposiciones se organizan en premisas que conducen a una conclusión, la cual puede ser afirmativa o negativa. El razonamiento, entonces, es un conjunto de proposiciones en el que una conclusión se apoya en las premisas. Este proceso nos permite determinar la validez y veracidad de los argumentos.

Una proposición es un enunciado que se compone a partir de:

Sujeto + Verbo (Ser) + Predicado

Un razonamiento es un conjunto de proposiciones entre las cuales una de ellas, llamada conclusión, se sostiene con apoyo de las demás premisas.

La estructura básica de un argumento son premisas, que son las oraciones base o de respaldo que nos permiten sostener o justificar una afirmación final, llamada conclusión.

Ejemplo.

Premisa 1. Todos los reptiles son de sangre caliente

Premisa 2. Los lagartos son reptiles

Conclusión. Por lo tanto, los lagartos son de sangre caliente

Existen diferentes tipos de argumentos: deductivo, inductivo, analógico, abductivo.

2.4.2 Conectivos de la lógica proposicional y su tabla de verdad

Los conectivos lógicos son operadores fundamentales en la lógica proposicional que permiten establecer relaciones entre proposiciones para formar expresiones más complejas. Entre los principales se

encuentran la conjunción, que une dos proposiciones que deben ser ambas verdaderas; la disyunción, que es verdadera si al menos una de las proposiciones lo es; la negación que invierte el valor de verdad de una proposición; el condicional (*si... entonces*), que expresa una relación de consecuencia lógica; y el bicondicional (*si y solo si*), que indica que ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Estos conectivos son esenciales para analizar argumentos, construir razonamientos y evaluar la validez de inferencias lógicas.

Conector	Símbolo
Negación	\neg
Conjunción	\wedge
Disyunción	\vee
Condicional	\rightarrow
Bicondicional	\leftrightarrow

Una tabla de verdad es un arreglo en el que la validez de un argumento se puede someter a prueba, mediante la exposición de todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de las variables en un argumento.

2.4.3 Reglas de inferencia, método de deducción natural

El método de deducción natural es una herramienta de la lógica formal que permite obtener conclusiones válidas a partir de un conjunto de premisas siguiendo reglas de inferencia. Estas reglas son principios básicos que establecen cómo se pueden combinar proposiciones para obtener nuevas proposiciones de manera válida.

Regla de la conjunción. Se usa para unir dos proposiciones que son verdaderas al mismo tiempo.

Regla de la disyunción. Se usa cuando al menos una proposición es verdadera.

Regla de la negación. Indica que una proposición no es verdadera.

Regla de la condicional. Expresa una relación de causa y efecto: si pasa una cosa, entonces pasa otra.

Regla del bicondicional. Se usa para decir que dos proposiciones dependen una de otra.

2.4.4 Comprobación de validez e invalidez en la lógica proposicional

El objetivo principal de la lógica es distinguir entre estructuras de pensamientos correctas e incorrectas. Es por eso que analiza a detalle la relación que hay entre las premisas y la idea final conclusión. Son correctas las estructuras de un argumento cuando la conclusión se sigue de las premisas. A esto se le llama coherencia, es cuando nuestro pensamiento tiene un buen orden y relaciona bien las ideas.

Cabe señalar que la coherencia indica la validez de un argumento. Para la lógica la validez se refiere que la estructura o el orden de cómo se acomodaron las premisas en relación con la conclusión es correcta. Es decir, hay validez cuando la conclusión depende de las premisas. Se destaca que, un argumento puede ser correcto o válido, pero no necesariamente verdadero.

La distinción entre validez e invalidez es esencial para evaluar argumentos, ya que un argumento válido preserva la verdad, mientras que uno inválido no proporciona tal garantía, incluso si las premisas son correctas en un caso particular.

2.4.5 Tipos de falacias

Una falacia es un tipo de razonamiento que, aunque pueda parecer válido, contiene un error lógico que invalida la conexión entre las premisas y la conclusión. Estas equivocaciones, aunque variadas, suelen tener un carácter persuasivo, lo que las hace parecer convincentes en ciertos contextos. Sin embargo, es posible identificar las fallas en estos argumentos si entendemos los distintos tipos de errores que pueden presentar. Entre las falacias más comunes se encuentran: *argumentum ad populum*, *argumentum ad ignorantiam*, *argumentum ad verecundiam*, *argumentum ad misericordiam*, *argumentum ad baculum*, *argumentum ad hominem*, *petitio principii* y hombre de paja.

2.5 Problemas filosóficos

Los problemas filosóficos buscan ayudarnos a entender y analizar aspectos fundamentales de la existencia humana y el progreso del pensamiento moderno. Gracias a ello, podemos tomar mayor conciencia y responsabilidad sobre nuestra identidad, tanto como individuos como integrantes de una comunidad cultural. Este enfoque resulta especialmente relevante en un mundo caracterizado por su diversidad, donde interactuamos en escenarios locales, nacionales y globales, enriquecidos por una variedad de culturas y perspectivas.

2.5.1 Sentido de la vida humana

La idea del "ser" ha sido un tema importante en la filosofía, y diferentes pensadores han intentado entenderlo desde varias perspectivas. Tres conceptos claves que nos ayudan a explorar el "ser" son su historicidad, su relación con la experiencia estética y su dialéctica.

La historicidad del ser

El "ser" no es algo fijo o estático; está profundamente conectado con el tiempo y la historia. Esto significa que nuestra comprensión de lo que somos cambia según el momento histórico en el que vivimos. Por ejemplo, en la antigüedad, muchas personas definían el ser a través de su relación con los dioses; en cambio, hoy lo entendemos más en términos de ciencia, cultura y relaciones sociales. Esta idea de que el "ser" está influido por el contexto histórico nos ayuda a comprender que nuestras identidades y formas de pensar no son universales, sino que evolucionan con el tiempo.

Vida y experiencia estética

La experiencia estética se refiere a cómo vivimos y apreciamos la belleza en el mundo, ya sea en la naturaleza, el arte o los momentos cotidianos. Esta conexión con lo bello nos ayuda a sentirnos vivos y en armonía con nuestro entorno. Por ejemplo, escuchar una canción que nos emociona o contemplar un atardecer nos hace reflexionar sobre lo que significa existir. Estas experiencias no solo enriquecen nuestra vida, sino que también nos ayudan a conectarnos con nuestro ser más profundo y con los demás.

La dialéctica del ser

La dialéctica del ser se basa en la idea de que el "ser" se define en relación con sus opuestos y con el cambio constante. Es como un diálogo entre lo que somos y lo que no somos, entre lo que deseamos y lo que evitamos. Por ejemplo, entendemos la alegría porque hemos conocido la tristeza, o reconocemos lo

que significa ser libres porque sabemos lo que es sentirse limitado. Esta tensión entre opuestos es lo que impulsa nuestro crecimiento y nos lleva a reflexionar sobre quiénes somos realmente.

2.5.2 Inclusión y responsabilidad social en el desarrollo científico y tecnológico

El Positivismo es una corriente filosófica que surgió en el siglo XIX, impulsada por el pensador francés Auguste Comte. Esta filosofía sostiene que el conocimiento humano debe basarse en hechos observables y comprobables, es decir, en la experiencia y la ciencia. Los positivistas promueven la idea de progreso, entendida como la creencia de que la humanidad avanza hacia un futuro mejor gracias al desarrollo de la ciencia y la tecnología. Según Comte, la historia humana pasa por tres etapas: la etapa teológica, en la que las personas explicaban el mundo a través de mitos y religiones; la etapa metafísica, donde buscaban explicaciones filosóficas más abstractas; y, finalmente, la etapa positiva, en la que la ciencia se convierte en la principal guía para comprender y transformar la realidad.

2.5.3 El ejercicio de la libertad frente al respeto a los demás en las relaciones interpersonales

La libertad es esencial para nuestra vida, pero debe ejercerse con responsabilidad y respeto hacia los demás, reconociendo sus derechos y valores. El existencialismo, una filosofía centrada en el ser humano, sostiene que somos libres para dar sentido a nuestra vida, aunque esta libertad conlleva responsabilidad sobre nuestras decisiones y su impacto. Sin embargo, problemas como la objetivación, que reduce a las personas a simples herramientas, y la alienación, que genera desconexión con lo que hacemos o somos, pueden alejarnos de una existencia auténtica. Reflexionar sobre estas ideas nos ayuda a equilibrar nuestra libertad con el respeto y la conexión con los demás.

2.5.4 El ser humano en la sociedad.

El ser humano es un ser social por naturaleza. Desde que nacemos, vivimos en comunidades donde necesitamos comunicarnos, entender a los demás y ser entendidos. Aquí es donde entran en juego dos ideas importantes: la ética del discurso y la acción comunicativa, propuestas por el filósofo alemán Jürgen Habermas, que nos ayudan a reflexionar sobre cómo nos relacionamos con los demás de manera justa y respetuosa.

La ética del discurso

Esta idea nos invita a pensar en cómo debatimos y tomamos decisiones en sociedad. Habermas propone que cuando hablamos con otras personas, debemos hacerlo desde una postura ética, buscando siempre el entendimiento mutuo y la igualdad. Esto significa que todos los participantes en un diálogo tienen derecho a expresar sus ideas y a ser escuchados sin prejuicios. Por ejemplo, en una discusión familiar o escolar, nadie debería imponer su punto de vista por la fuerza o ignorar a quienes tienen una opinión diferente.

La acción comunicativa

La acción comunicativa es el tipo de comunicación que busca el entendimiento y la cooperación entre las personas. No se trata solo de transmitir información, sino de construir acuerdos basados en la razón y el respeto. Por ejemplo, si un grupo de amigos quiere organizar un evento, deben dialogar de manera abierta, escucharse mutuamente y llegar a decisiones que beneficien a todos, evitando conflictos o malentendidos.

2.5.5 El respeto a los derechos del individuo en el contexto de la diversidad cultural.

En una sociedad diversa, respetar los derechos de cada persona es esencial para una convivencia justa. Esto implica valorar las culturas, creencias y tradiciones de los demás, evitando prejuicios y discriminación. Sin embargo, este respeto no puede separarse de conceptos como la decolonización y la filosofía de la liberación, que cuestionan las estructuras de poder que históricamente han oprimido a ciertos grupos.

La decolonización busca dismantelar las formas de dominación que dejaron el colonialismo, promoviendo el reconocimiento y la valorización de los saberes, lenguas y tradiciones de los pueblos marginados. Por su parte, la filosofía de la liberación, desarrollada por pensadores como Enrique Dussel, propone un enfoque ético que pone en el centro a las personas oprimidas, exigiendo transformar las relaciones sociales para lograr equidad y dignidad para todos.

Bibliografía sugerida

Angulo, Y. (2006). *Ética*. Santillana.

Aristóteles. (1985). *Ética nicomáquea*. Gredos. https://www.posgrado.unam.mx/filosofia/wp-content/uploads/2020/03/Etica_AristotelesEN_Mae.pdf

Aula Legal. (27 de diciembre de 2016). *La Costumbre. Teoría del derecho*. [Archivo de video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=kJSR4bKQv_g

Bilbeny, N. (2012). *Ética*. Ariel.

Bully Magnets (8 de diciembre de 2019). *¿Qué es el Positivismo?* [Archivo de video] YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=g-0-i59a1PQ>

Chávez, C. P. (2015). *Historias de las doctrinas filosóficas*. (5ª ed.). Pearson Educación.

Cicerón. (1982). *Tratados morales*. CONACULTA.

Cohen, M. (2005). *101 dilemas éticos*. Alianza.

COMPLEXUS. (14 de diciembre de 2016). *PENSAR el MUNDO desde LA FILOSOFÍA de la LIBERACIÓN con Enrique Dussel*. [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=tvolegCo1Pg>

Comte A. (1980). *Discurso sobre el espíritu positivo*. Aguilar.

Contartiese, D. & López Nestor, A. H. (2013). *Alienación: la dignidad negada. En busca de caminos para cambiar el mundo*. Herramienta. Revista de debate y crítica marxista. <https://herramienta.com.ar/alienacion-la-dignidad-negada-en-busca-de-caminos-para-cambiar-el-mundo>

Copi, I. y Cohen, C. (2004). *Introducción a la lógica*. (2ª ed.). Limusa.

Copi, I. M. (1979). *Lógica Simbólica*. CECSA

Dussel, E. (2022). *Filosofía de la Liberación*. FCE.

Dussel, E. (1977). *Introducción a una Filosofía de la Liberación Latinoamericana*. Extemporáneos. https://enriquedussel.com/txt/Textos_Libros/28.Introduccion_filosofia_liberacion_latinoamericana.pdf

Enterarse. (17 de diciembre de 2020). *Falacias: ¿Qué son y por qué debemos evitarlas?* [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=suVugHxroas>

Escobar, G. y Albarrán, M. (2002). *Filosofía: un panorama de su problemática y corrientes contemporáneas*. McGraw Hill.

ES School Zone. (7 de agosto de 2016). *Filosofía. Qué es la Lógica... ¿?* [Archivo de video] YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=va3kFdSVlrk>

Filosofía Libre. (12 de octubre de 2021). *Disciplinas filosóficas*. [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=w4En-ObFbuE>

García, M. M. (1938). *Lecciones preliminares de filosofía*. Nuevo talento.

García, J. (2018). *Lógica*. Esfinge.

- González, V. J. (2007). *El Ethos, destino del hombre*. (2ª ed.). FCE.
- Habermas, J. (1999). Teoría de la acción comunicativa, I. Racionalidad de la acción y racionalización social. Taurus. <https://pics.unison.mx/doctorado/wp-content/uploads/2020/05/Teoria-de-la-accion-comunicativa-Habermas-Jurgen.pdf>
- Hegel, G. (2017). Fenomenología del espíritu. (2ª ed.). FCE.
- Herrera I. A. y Torres, J. (2007). Falacias. Editorial Torres Asociados
- Historiclases. (26 de diciembre de 2020). *Los métodos de la Filosofía*. [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=63BQxf2S6zk>
- JenniferBeltrn. (16 de noviembre de 2012). *Teoría de la Acción Comunicativa*. [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=uvdDyPz9rgU>
- Lipovetsky, G. (1996). La era del vacío. Anagrama.
- Montesquieu. (2007). Del espíritu de las leyes. Tecnos.
- Mora, J. (2015). Diccionario de Filosofía. Alianza.
- Pallares, E. (1964). *Diccionario de filosofía*. Porrúa.
- Platón. (2019). Diálogos. Porrúa.
- Priani, S. E. y López, M. I. (2009). Historia de las doctrinas filosóficas. Prentice Hall.
- Rafilosofía. (6 de octubre de 2021). *Los problemas filosóficos*. [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=Oa5lmez1dH0>
- Reygadas, P. (2015). El arte de argumentar. Sentido, forma, dialogo y persuasión. UACM
- Rousseau. (2015). El contrato social. Alianza.
- Russell, B. Los problemas de la Filosofía. Centro mexicano de estudios culturales.
- Sánchez, V. A. (1980). *Filosofía de la praxis*. Grijalbo.
- Sánchez, A. (2007). Ética. Debolsillo.
- Sartre, J.P. (2017). El existencialismo es un humanismo. Época.
- Séneca. (2006). Sobre la felicidad. Alianza.
- sulycastrom. (23 de abril de 2016). *Cortina, A. (2014) ¿Qué es y para qué sirve la Ética?* [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=JspFfzuJvec>
- sulycastrom. (27 de julio de 2020). Ética y moral (Adela Cortina). [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=EYpV6H26GYk>
- Ugalde, Q. J. (2017). El asombro, la afección originaria de la filosofía. *ARETÉ. Revista de Filosofía*, xxix (1), 167-181. <http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/arete/article/view/18967/19193>
- Unboxing Philosophy. (26 de febrero de 2017). *Lógica y Tablas de Verdad*. [Archivo de video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=G53Da_gzso0

Valenzuela, G. E. (1995). *Filosofía*. McGraw-Hill.

Vatimo, G. (2010). *Adiós a la verdad*. Gedisa.

Wolff, J. (2009). *Filosofía política. Una introducción*. Ariel.

Xirau, R. (2000). *Introducción a la historia de la Filosofía*. UNAM.
<http://www.proglocode.unam.mx/system/files/Xirau%20R%202010.pdf>

Ciencias Experimentales

3. Biología

3.1 Origen de la vida

Una de las preguntas más controversiales que el ser humano se ha hecho, es sobre cómo podría haber surgido la vida en la Tierra. En la antigüedad, la mayoría aseguraba que la vida había sido creada por un ser divino todopoderoso, y es una idea incuestionable para muchos. Con el pasar del tiempo fueron surgiendo diversas teorías debido al avance en los estudios científicos.

Teoría abiogenista o de la generación espontánea

Fue una creencia antigua que afirmaba que los seres vivos podían originarse de manera inmediata a partir de materia inerte o en descomposición, sin necesidad de padres. Por ejemplo, se pensaba que los gusanos surgían de la carne podrida o los ratones del trigo almacenado. Esta idea fue aceptada durante siglos hasta que experimentos científicos, como los de Redi y Pasteur, demostraron que todo ser vivo proviene de otro ser vivo.

Teoría biogenista

Francisco Redi fue el primero en refutar la teoría de la generación espontánea con un sencillo experimento, en 3 frascos colocó carne, uno lo dejó abierto, otro lo cubrió con una tela y el último lo selló, en el primero se formaron larvas y moscas en la carne, en el segundo, gusanos y moscas sobre el lienzo de tela y en el tercero no se formó nada. Más adelante la idea fue comprobada rotundamente por Luis Pasteur con su experimento (figura 1).

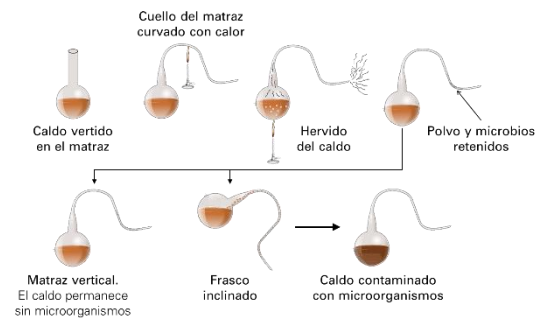


Figura 1. Experimento de Pasteur.

Panspermia

Svante August Arrhenius en 1908 propuso que la vida no se originó en la Tierra, sino que llegó desde el espacio a través de meteoritos, cometas o polvo cósmico que contenían microorganismos o moléculas orgánicas. Esta idea sugiere que la vida podría estar distribuida por todo el universo.

Síntesis abiótica

Alexander Oparin y John Haldane sugirieron que la vida podría haber surgido por la interacción de moléculas inorgánicas (CH_4 , CO , CO_2 , NH_3 , H_2 , N_2 , vapor de H_2O y HCN) teóricamente presentes en una atmósfera muy antigua, estas sustancias se disolvieron en los cálidos océanos (sopa primigenia), el agua recibió descargas eléctricas y radiaciones UV produciendo moléculas orgánicas sencillas como: Alanina (un aminoácido), Ribosa (un azúcar), Adenina (una purina) y Citosina (una pirimidina) que son las moléculas precursoras de la vida.

3.2 Biomoléculas

Biomoléculas orgánicas

Dentro de cualquier organismo que habita la Tierra se encuentran cuatro tipos diferentes de moléculas orgánicas en gran cantidad: carbohidratos, lípidos, proteínas y nucleótidos.

Todas estas moléculas están compuestas por el famoso C, H, O, N, P y S, en diferentes proporciones.

Los carbohidratos son la fuente primaria de energía química para los sistemas vivos. Los más simples son los monosacáridos (azúcares simples). Los monosacáridos pueden combinarse para formar disacáridos (dos azúcares) y polisacáridos (cadenas de muchos monosacáridos).

Los lípidos son moléculas hidrofóbicas que, como los carbohidratos, almacenan energía y son importantes componentes estructurales. Como ejemplo están las grasas, los aceites, los fosfolípidos, los glucolípidos, y el colesterol.

Las proteínas son moléculas muy grandes compuestas de cadenas largas de aminoácidos, conocidas como cadenas polipeptídicas. A partir de sólo 20 aminoácidos diferentes usados para hacer proteínas se puede sintetizar una inmensa variedad de diferentes tipos de moléculas proteínicas, cada una de las cuales cumple una función altamente específica en los sistemas vivos.

Los ácidos nucleicos son moléculas complejas formadas por un grupo fosfato, un azúcar de cinco carbonos y una base nitrogenada. Son los bloques estructurales de los ácidos desoxirribonucleico (ADN) y ribonucleico (ARN), que transmiten y traducen la información genética. Los nucleótidos también desempeñan papeles centrales en los intercambios de energía que acompañan a las reacciones químicas dentro de los sistemas vivos. El principal portador de energía en la mayoría de las reacciones que ocurren dentro de las células es un nucleótido que lleva tres fosfatos, conocido como ATP.

Biomoléculas inorgánicas

Son compuestos fundamentales para la vida pero que no están basados en el Carbono, exceptuando el CO_2 . Ejemplos de estas son: agua (H_2O), amoníaco (NH_3), sales minerales (NaCl) y ozono (O_3).

El agua

La vida, depende de la presencia de agua: impregna todas las partes de la célula, constituye el medio en el que se realiza el transporte de los nutrientes, las reacciones del metabolismo y la transferencia de energía química, el agua es el componente mayoritario de los seres vivos (70%), disuelve a la mayor parte de los compuestos iónicos, lo que se debe a su naturaleza polar, es conocido como el disolvente universal.

Sales minerales

Tienen una función principalmente esquelética o de sostén, como el carbonato cálcico (CaCO_3), el fosfato cálcico ($\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$), constituye la materia mineral de los huesos de los vertebrados, aunque no es una sal, el dióxido de silicio (SiO_2) desempeña una función semejante: impregna y endurece los tallos de muchas plantas.

3.3 Taxonomía

Clasificación de los seres vivos

La taxonomía es la ciencia que estudia los principios, métodos y fines de la clasificación de los organismos.

Los seres vivos se clasifican de acuerdo con sus características anatómicas, lo que está relacionado con la cercanía o parentesco que los organismos tienen entre sí. Aristóteles fue el primero que intentó clasificar a los seres vivos. Sin embargo, la taxonomía moderna surgió hasta la segunda mitad del siglo XVIII, cuando Carlos Linneo, naturalista sueco, retomó los trabajos de Aristóteles y propone la nomenclatura binomial donde cada organismo debe tener un nombre científico formado por un género y una especie.

El género es una categoría que puede incluir muchas especies, por ejemplo, el perro doméstico tiene el nombre científico de *Canis familiaris*, donde *Canis* es el género y *familiaris* la especie; sin embargo, existen otras especies dentro de este género como el lobo (*C. lupus*), el coyote (*C. aureus*), el chacal (*C. latrans*), entre otros.

En los sistemas de clasificación actuales, los científicos han ideado ocho diferentes taxa o categorías taxonómicas, que se ordenan formando una estructura jerárquica (dominio, reino, *phylum*, clase, orden, familia, género y especie) en la que cada categoría incluye a todas las ubicadas por debajo de ella. De esta manera, las categorías con menos organismos y los más relacionados son las inferiores, mientras que las categorías superiores grandes e incluyentes tienen a organismos muy distintos, cuyo ancestro común es muy lejano.

La actual clasificación de los seres vivos incluye tres dominios y cinco reinos. Los dominios agrupan a los seres vivos por sus características celulares y los reinos los agrupan por su parentesco evolutivo. El sistema de clasificación de los seres vivos se estructura de la siguiente manera:

1. Dominio *Eukarya*
2. Dominio *Bacteria*
3. Dominio *Archaea*

Y los siguientes reinos:

1. Reino *Animal*
2. Reino *Vegetal o Plantae*
3. Reino *Fungi*
4. Reino *Monera*
5. Reino *Protista*

3.4 Célula

Componentes celulares

La teoría celular fue propuesta por Mathías Schleiden y Theodore Schwann entre 1838 y 1839, los postulados son: todos los seres vivos están formados por una o más células (unidad estructural), toda célula proviene necesariamente de una célula preexistente (unidad de origen) y en la célula se llevan a cabo todos los procesos vitales (unidad funcional).

La célula es la unidad básica, estructural y funcional de todo ser vivo.

Tipos	
Procariontes	Eucariontes
<ul style="list-style-type: none"> • No poseen núcleo verdadero • Tienen ADN de cadena sencilla • No poseen organelos membranosos • La poseen los organismos del reino <i>monera</i> (bacterias y cianofitas, según Whittaker o dominios <i>archaeas</i> y <i>eubacterias</i> según Woese 	<ul style="list-style-type: none"> • Poseen núcleo verdadero • Tienen ADN de doble cadena • Poseen organelos membranosos • Lo poseen los reinos: <i>Protista</i> (algas y protozoarios), <i>Fungi</i> (hongos), <i>Plantae</i> y <i>Animalia</i>, según Whittaker o el dominio <i>Eukaria</i>, según Woese

A continuación, se muestran algunas partes de las células y su función:

Organelo	Función
Membrana celular	Regula el intercambio de sustancias entre la célula y su medio externo
Citoplasma	Reacciones químicas de la ruta metabólica
Núcleo	Replicación del ADN, división celular y transcripción
Mitocondria	Respiración celular
Ribosoma	Síntesis de proteínas
Retículo endoplásmico	Liso: sintetiza y procesa lípidos y Rugoso: produce proteínas
Aparato de Golgi	Almacenamiento y secreción de sustancias
Lisosoma	Se encarga de la digestión o degradación
Centriolo	Participa en la división celular, presente en células animales y angiospermas
Cloroplasto	Fotosíntesis, la realizan las células vegetales
Vacuola	Contiene agua y enzimas digestivas
Pared celular	Proporciona forma y rigidez a la célula, la poseen las células vegetales, bacterias y hongos

Tabla 1. Partes y funciones de la célula.

3.5 Metabolismo celular

Respiración celular

El término respiración celular se refiere a la ruta bioquímica por la que las células liberan energía de los enlaces químicos de las moléculas de los alimentos, y proporcionan esa energía para los procesos esenciales de la vida. Todas las células vivas tienen que llevar a cabo la respiración celular. Puede ser respiración aeróbica en presencia de oxígeno o respiración anaeróbica sin la participación del oxígeno.

Las células procariontes llevan a cabo la respiración celular dentro del citoplasma o en las superficies internas de las células. Las células eucariontes son el lugar donde se produce la mayoría de las reacciones.

La moneda de energía de estas células es el ATP y una manera de ver el resultado de la respiración celular, es viendo el proceso de producción de ATP.

Fotosíntesis

Es un proceso que puede definirse como la utilización de luz solar para sintetizar moléculas orgánicas en alimentos, a partir de moléculas más simples como el CO_2 y H_2O , dicho de otra manera, la captación de energía lumínica para ser utilizada en la transformación del CO_2 y otras en moléculas alimenticias que almacenan energía química.

De acuerdo con la sustancia externa que actúa como fuente de hidrógenos (y electrones) en el proceso, se habla de dos tipos de fotosíntesis: oxigénica (aerobia) y anoxigénica (anaerobia).

- Oxigénica (aerobia). Muchas células de las plantas utilizan el H_2O como fuente de hidrógeno para reducir al CO_2 y producir carbohidratos. Además, se libera O_2 , procedente de la molécula de agua, que se rompe durante el proceso. Estas células tienen clorofila (u otros pigmentos que le permiten capturar y utilizar la luz). Este tipo de fotosíntesis es la fuente más importante de los alimentos que consumimos los seres vivos, incluyendo a los humanos.
- Anoxigénica (anaerobia). Este tipo solo lo hacen algunas bacterias, las sulfurosas fotosintéticas, que al utilizar al H_2S (ácido sulfhídrico) como fuente de hidrógeno (en lugar de agua) y no liberan oxígeno al ambiente.

Etapas de la fotosíntesis

El proceso consta de una serie de complejas vías metabólicas que en términos generales se suele dividir en dos grandes etapas o fases: fase luminosa y fase oscura.

Fase luminosa. Son las reacciones que requieren luz y se caracterizan por:

- La absorción de energía lumínica de ciertas longitudes de onda (en especial azul y roja) por parte de las moléculas de la clorofila.
- La excitación de la clorofila desencadena una serie de procesos que permitirán la síntesis del ATP (con transformación de energía lumínica en energía química almacenada en el ATP).
- La absorción de energía lumínica por la clorofila, permitirá que las moléculas de H_2O se rompan o disocien (fotólisis) pasando sus hidrógenos a la coenzima NADP que se transforma en NADPH y además se libera oxígeno atmosférico.

Fase oscura. No utiliza energía lumínica y sus características son:

- En esta etapa se utilizan los productos de la fase luminosa, el ATP y el NADPH_2 para, junto con el CO_2 , producir compuestos orgánicos.
- El ATP proporciona la energía requerida para esta síntesis y el NADPH_2 los hidrógenos necesarios para la reducción del CO_2 .

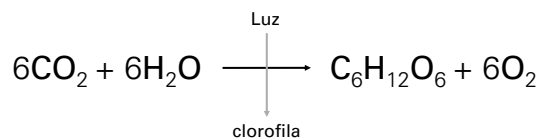


Figura 2. Fórmula general de la fotosíntesis.

3.6 Reproducción celular

Etapas y características del ciclo celular

Es el ciclo de vida de cada célula y conlleva cuatro etapas: G₁, crecimiento de las células hijas; S, replicación del ADN, G₂, aumento de la síntesis de proteínas y preparación para la división celular; estas tres etapas constituyen la interfase y M, división celular por mitosis.

Mitosis

Este tipo de división celular consta de cuatro fases:

1. Profase: la cromatina se condensa y los cromosomas se hacen visibles, la membrana nuclear que los envuelve comienza a desvanecerse, el centriolo se divide y entre las partes se comienza a formar el huso acromático.
2. Metafase: los cromosomas se alinean al centro de la célula, los centriolos están colocados en polos opuestos y entre ellos se encuentran los microtúbulos del huso acromático.
3. Anafase: los microtúbulos del huso acromático están unidos al cinetocoro del cromosoma y jalan desde este para conducir a cada cromátida a un polo opuesto.
4. Telofase: la membrana celular comienza a dividirse por la parte central, los cromosomas son envueltos por una membrana nuclear y el huso acromático se desintegra, finalmente la célula se divide en 2 (citocinesis).

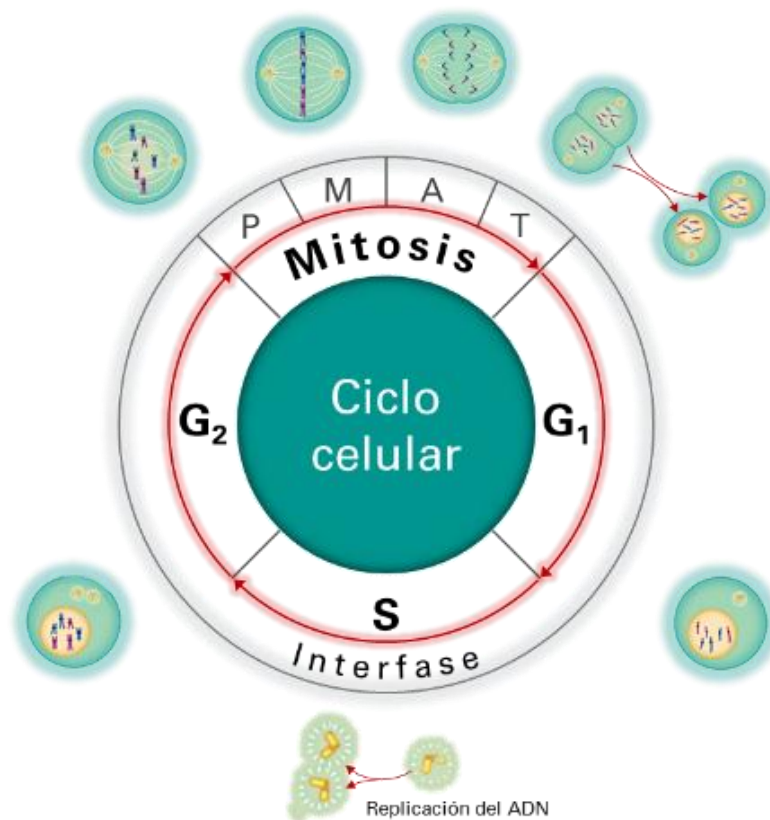


Figura 3. Ciclo celular.

Meiosis

Es un proceso de división celular especial, ya que sólo se presenta en células gaméticas (sexuales: óvulos y espermatozoides), se llevan a cabo dos divisiones celulares consecutivas. Lo más importante de este proceso es que hay un intercambio genético durante la profase y el resultado son cuatro células hijas distintas a su progenitora y con la mitad del número cromosómico.

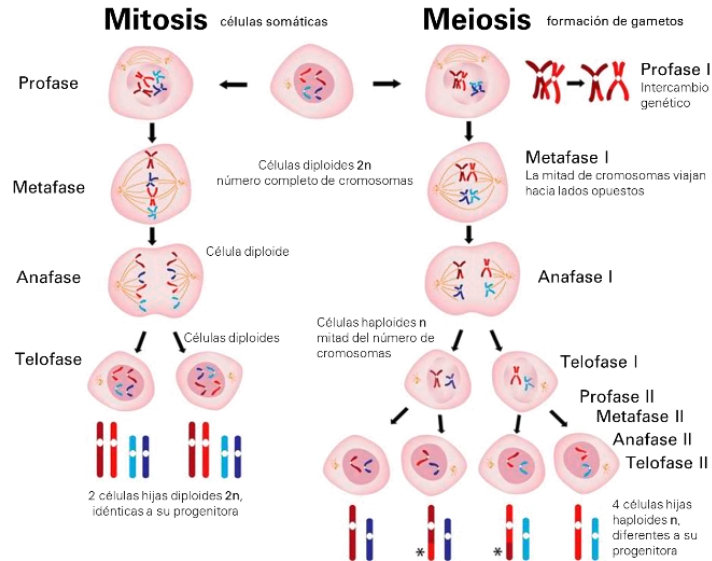


Figura 4. Mitosis y meiosis.

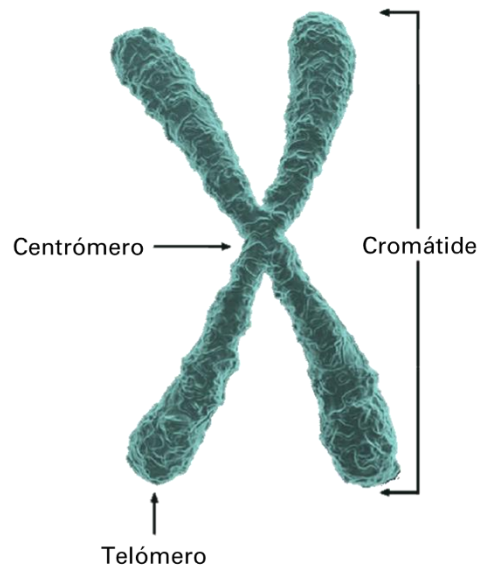


Figura 5. Cromosoma.

3.7 Comunicación celular

Autocrina

En este tipo de comunicación, la misma célula que secreta el ligando será a su vez la receptora de dicho ligando.

Endócrina

Sucede cuando la célula receptora (diana) y la célula emisora se encuentran muy distantes la una de la otra dentro del organismo, por lo que la hormona viaja por el torrente sanguíneo para llegar a la célula receptora.

Paracrina

Se da cuando la molécula señal (ligando) sólo afecta a las células que se encuentran cercanas a la célula que secretó al ligando.

Yuxtacrina

Comunicación por contacto directo entre células, en este caso, la molécula que actúa como ligando puede permanecer unida a la célula emisora durante su interacción con la célula receptora.

3.8 Genética

Genética mendeliana

La genética es la parte de la biología que estudia los genes y los mecanismos que regulan la transmisión de los caracteres hereditarios.

La herencia es el proceso por el cual las características de los individuos se transmiten a su descendencia; el ADN (ácido desoxirribonucleico) contiene la información genética en la forma de secuencias de nucleótidos, en los cuales se encuentran los genes que codifican la información necesaria para sintetizar una proteína específica. Los cromosomas están formados de ADN y varias proteínas. Los genes por consiguiente son parte de los cromosomas. Finalmente, los cromosomas se transmiten de una célula a otra y de un organismo a otro durante la reproducción. Así la herencia ocurre cuando los genes se transmiten de un progenitor a su descendencia.

Gregor Mendel asistió a la Universidad de Viena durante 2 años donde estudió botánica y matemáticas, entre otras materias; utilizó sus conocimientos para realizar una serie de experimentos revolucionarios sobre la herencia en guisantes (chicharos) comunes comestibles, estudio la herencia en las plantas de chicharos para entender su genética, estos experimentos establecieron las bases para entender cómo se heredan los rasgos y sentaron las bases de la genética.

Primera ley de Mendel (Ley de uniformidad)

Esta ley manifiesta que, si se cruzan dos razas puras, es decir, que tengan dos alelos dominantes (A) o bien, dos alelos recesivos (a) para un determinado carácter, se obtendrán hijos/as iguales entre sí en términos fenotípicos o genotípicos, así como iguales al progenitor que presente el alelo dominante (A).

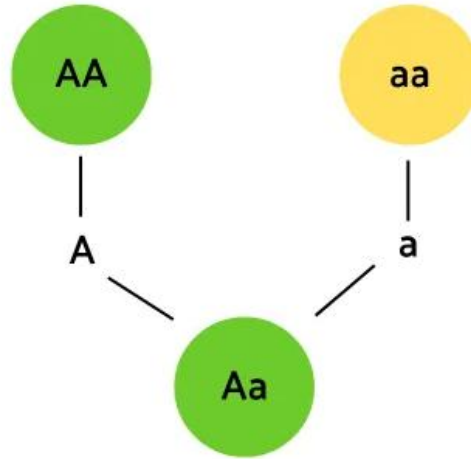


Figura 6. La primera será una semilla homocigota dominante (AA) que tiene dos alelos verdes, es decir, el color verde es dominante; y la segunda será una semilla homocigota recesiva (aa) que tiene dos alelos amarillos, es decir, el color amarillo es recesivo. Entonces, al cruzar estas dos semillas homocigotas nos resulta una primera generación conformada por 4 descendientes, todos ellos heterocigotos con el mismo genotipo (Aa) y con el color verde dominante.

Segunda ley de Mendel (Ley de segregación)

Esta defiende que el cruce de dos individuos de la primera generación (Aa) dará lugar a una segunda generación filial. En esta, se recupera el fenotipo del individuo recesivo (aa) de la primera generación. Por lo tanto, el carácter recesivo permanecerá oculto en una proporción de 1 a 4.

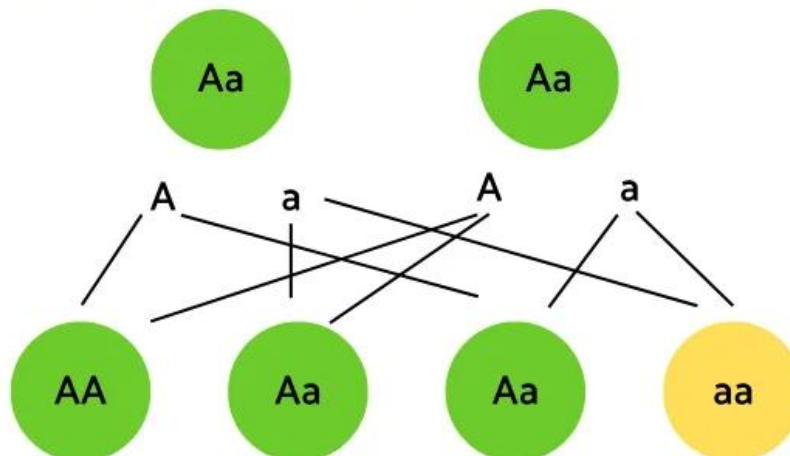


Figura 7. Si tomando dos organismos de la primera generación de arveja (Aa) y los cruzamos, obtendremos que la mitad de los nuevos descendientes son homocigotos (dominantes y recesivos), y la otra mitad son heterocigotos. Por tanto, podemos decir que los genes de la primera generación se segregaron en la segunda generación, generando así descendientes diferentes a sus padres.

Tercera ley de Mendel (Ley de transmisión independiente)

Esta ley nos indica que los rasgos heredados se transmiten independientemente unos de otros, sin ninguna relación entre ellos, y además no existirá un patrón de herencia que afecte al de otro, esto quiere decir que los alelos, o variaciones, de un gen se transmitirán de forma independiente a los alelos de otro gen.

	AB	Ab	aB	ab
AB	AABB	AABb	AaBB	AaBb
Ab	AAbB	AAbb	Aabb	Aabb
aB	aABB	aABb	aaBB	AaBb
ab	AaBb	aAbb	aabB	aabb

Figura 8. Si realizamos el cruzamiento de 2 semillas representadas de la siguiente forma: AABb, aaBb, y 2 semillas con las mismas características: AABb y aaBb; obtendremos una proporción de 9:3:3:1, lo que se interpretaría como 9 semillas amarillas y lisas, 3 semillas amarillas y rugosas, 3 verdes y lisas, y por último una semilla verde y rugosa.

3.9 Evolución

Teoría evolutiva de Lamarck

Lamarck decía que el motor de la evolución era una fuerza vital que proporcionaba a las especies la capacidad de cambiar su estructura y comportamiento según sus necesidades. Sus postulados son: Auto mejoramiento de las especies, las especies cambian a voluntad propia; uso y desuso de órganos, se desarrollan más los órganos que utiliza con mayor frecuencia.

Teoría catastrofista de George Cuvier

Paleontólogo que en excavaciones encontró una gran variedad de organismos en diferentes estratos, por lo que indujo que quizá después de cada gran catástrofe, las especies morían en su totalidad, para aparecer otras nuevas en la siguiente generación.

Teoría evolutiva de Darwin

Basada en la selección natural, sus postulados son:

- Variabilidad: variaciones genéticas al azar.
- Sobreproducción: generación de mucha descendencia que no sobrevive hasta la edad adulta.
- Lucha por la existencia: competencia por sobrevivir.
- Supervivencia del más apto: el medio selecciona a los organismos mejor adaptados.
- Herencia de las variaciones favorables: los adaptados se reproducen y heredan sus características.
- Especiación: origen de nuevas especies.

Teoría sintética

Sus representantes son: Theodosius Dobzhansky, Ernst Mayr, Julián Huxley y George Simpson; estos autores integran los estudios de Darwin basados en la selección natural, los de Gregor Mendel como base de la herencia biológica y la genética de poblaciones. Sus principales aportaciones son, fijar a las mutaciones y a la recombinación genética como las principales fuentes de variabilidad genética, manejar conceptos de fondo o reserva genética, flujo genético, evolución convergente y divergente.

Tipos de adaptación al medio: morfológicas (forma), anatómicas (estructura), fisiológicas (función) y conductuales (comportamiento).

Evidencias de evolución: registro fósil, anatomía comparada, embriología comparada y genética poblacional, basadas en ellas se presentan los diversos patrones de evolución, la divergencia, todos descienden de un ancestro común. Convergencia dos organismos se encuentran en un tipo y espacio determinado, sus semejanzas van siendo cada vez menores hasta que de ellos surge una nueva especie.

3.10 Poblaciones

Estructura y dinámica poblacional

Una población es un grupo de organismos de la misma especie que se cruzan entre sí y que conviven en el espacio y en el tiempo. El conocimiento de la dinámica de poblaciones es esencial para los estudios de las diversas interacciones entre los grupos de organismos y tiene, además, una importancia práctica enorme.

Entre las propiedades de las poblaciones, que no son propiedades de los individuos, se encuentran los patrones de crecimiento, de mortalidad, la estructura etaria (de edades), la densidad y la distribución espacial. La tasa de crecimiento de una población es el incremento en el número de individuos en una unidad dada de tiempo por cada individuo presente.

En ausencia de inmigración neta (movimiento de otros individuos de la especie hacia la población desde cualquier otro sitio) o de emigración neta (la salida de individuos de la población), el incremento es igual a la tasa de natalidad menos la tasa de mortalidad. Así, la tasa de crecimiento puede ser igual a cero, positiva o negativa (como lo es actualmente para la población humana en algunos países).

3.11 Comunidad

Relaciones interespecíficas

Las poblaciones no viven aisladas en el ambiente, por el contrario, se establecen interacciones muy intensas entre las distintas poblaciones de especies diferentes, a lo que se le llama comunidad. Por ello, se denominan interacciones interespecíficas.

Entre las poblaciones que coexisten en un mismo ambiente se establecen interacciones muy intensas, ya sea por competir por un recurso compartido como puede ser el alimento, la luz, el espacio, la humedad entre otros; igualmente una población puede depender de otra como fuente de alimento, para brindarse ayuda mutua o tal vez, la presencia de una población no tenga ningún efecto directo sobre otra.

Entre las relaciones mencionadas se pueden reconocer aquellas que causan un efecto negativo en alguna de las poblaciones relacionadas, simbolizado con (-); aquellas que causan un efecto positivo entre las poblaciones implicadas en dicha interacción, simbolizándose como (+) y también pueden no tener efecto directo alguno (0).

Las principales interacciones son las siguientes:

Mutualismo

Es una relación recíproca positiva entre dos especies distintas. Con esta relación, ambas especies aumentan su supervivencia, crecimiento o reproducción.

El mutualismo a su vez se puede clasificar en: simbiótico (los individuos interactúan físicamente y su relación es obligatoria, un ejemplo son las “micorrizas”, unas relaciones mutualistas que se establecen entre las raíces de las plantas y los hongos) o asimbiótico (los organismos llevan vidas separadas, sin embargo, ambos dependen de alguna manera del otro).

Un ejemplo es el que se presenta entre algunas plantas y los insectos comedores de néctar, donde los insectos se alimentan del polen o del néctar de las flores de estas plantas, pero que, al llevar los granos de polen de las anteras de una planta al estigma de otra de la misma especie, aseguran de esta forma la reproducción de las plantas y la alimentación de los insectos.

Comensalismo

Es la relación en la que una especie se beneficia al asociarse a otra y esta última no se afecta en ningún sentido, ni negativo, ni positivo. Por ejemplo, el tronco o las ramas de un árbol proporcionan el sustrato donde crecen las orquídeas, que consiguen sus nutrientes a través de sus raíces aéreas, al tiempo que el árbol no se ve afectado.

Competencia

Es la relación que se presenta en poblaciones de ambas especies involucradas, es decir, las dos especies que entran en competencia se ven afectadas negativamente. La competencia se establece cuando las dos especies utilizan un mismo recurso, el cual es escaso, ejemplo de esto son los leones que compiten por una pareja, comida o territorio.

Amensalismo

Es la relación que se presenta cuando la población de una especie afecta negativamente a la población de otra, pero la primera especie no se ve afectada en absoluto. Siendo una relación, por ejemplo, las poblaciones de nutrias que acostumbran acumular su excremento y con ello causan la muerte de la mayoría de las plantas del sitio de acumulación.

Depredación

La población depredadora tiene un efecto positivo y la población de la especie presa experimenta un efecto negativo en esta relación. Esto es, la especie depredadora incrementa el tamaño de su población al alimentarse de la población de la presa, de la que se observa una disminución en sus integrantes; ejemplo, el coyote y los ratones de campo o la horca y las crías de lobos marinos.

Parasitismo

En este tipo de relación, la población de la especie parásito presenta un efecto positivo (+), al alimentarse del hospedero, por lo que la población de la especie hospedera muestra un efecto negativo (-). Un ejemplo es la lombriz intestinal, piojos, pulgas, garrapatas, etc., que viven en hospederos como los mamíferos.

3.12 Ecosistemas

Ciclos Biogeoquímicos Ecosistema

Espacio donde interactúan el ambiente abiótico (sin vida) y el biótico (seres vivos). Un ecosistema posee características propias y distintivas y puede ser muy pequeño o tan grande como se desee estudiar. Las conexiones entre el ambiente biótico y abiótico son por medio de la energía y materia que fluyen entre ellos de manera lineal y cíclica.

En un ecosistema los materiales se reciclan y la energía fluye en una sola dirección. La principal fuente de energía es el Sol. Para estudiar como flujo de energía se utiliza un esquema llamado pirámide trófica:

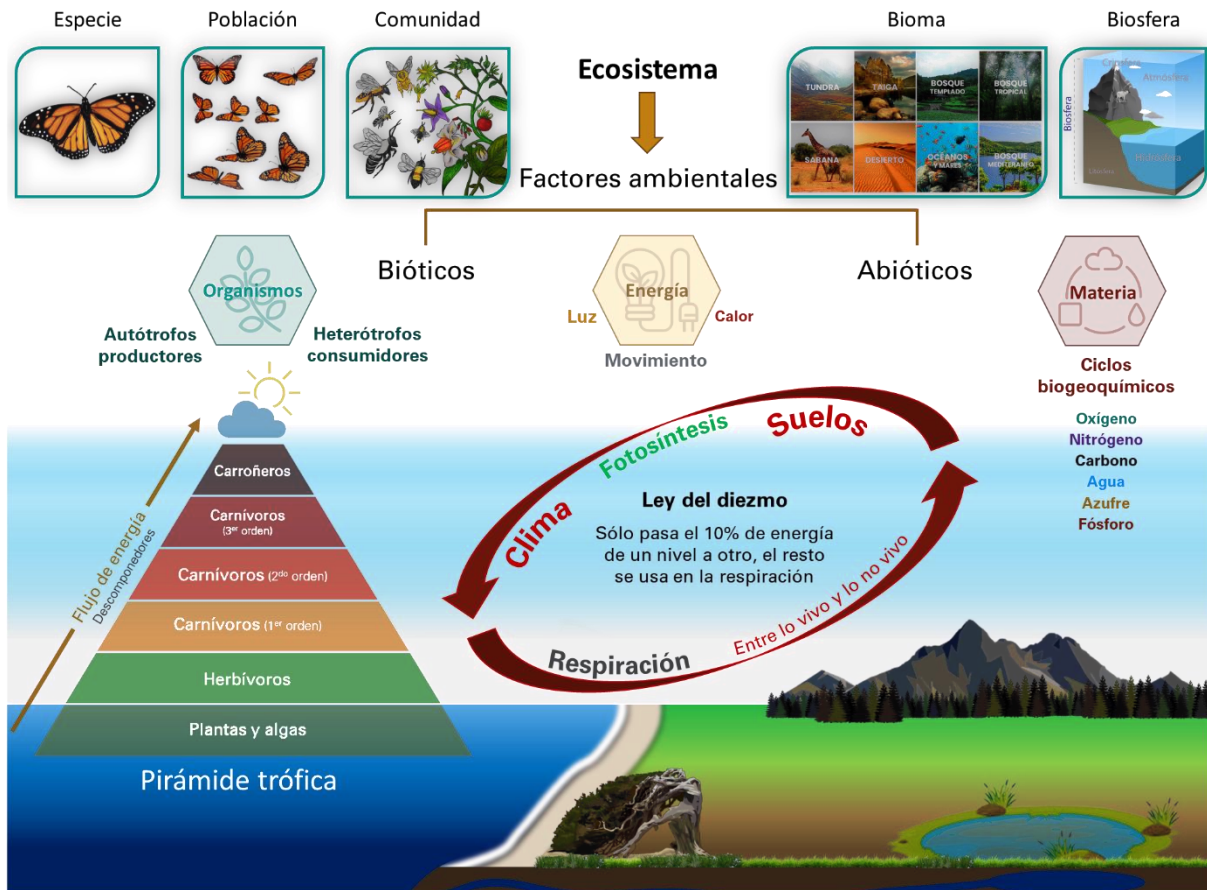


Figura 9. Pirámide trófica en un ecosistema.

La materia fluye de manera cíclica entre los ambientes, los principales ciclos son:

- Gaseosos: oxígeno, nitrógeno y carbono
- Hidrológico y sedimentarios: azufre y fósforo

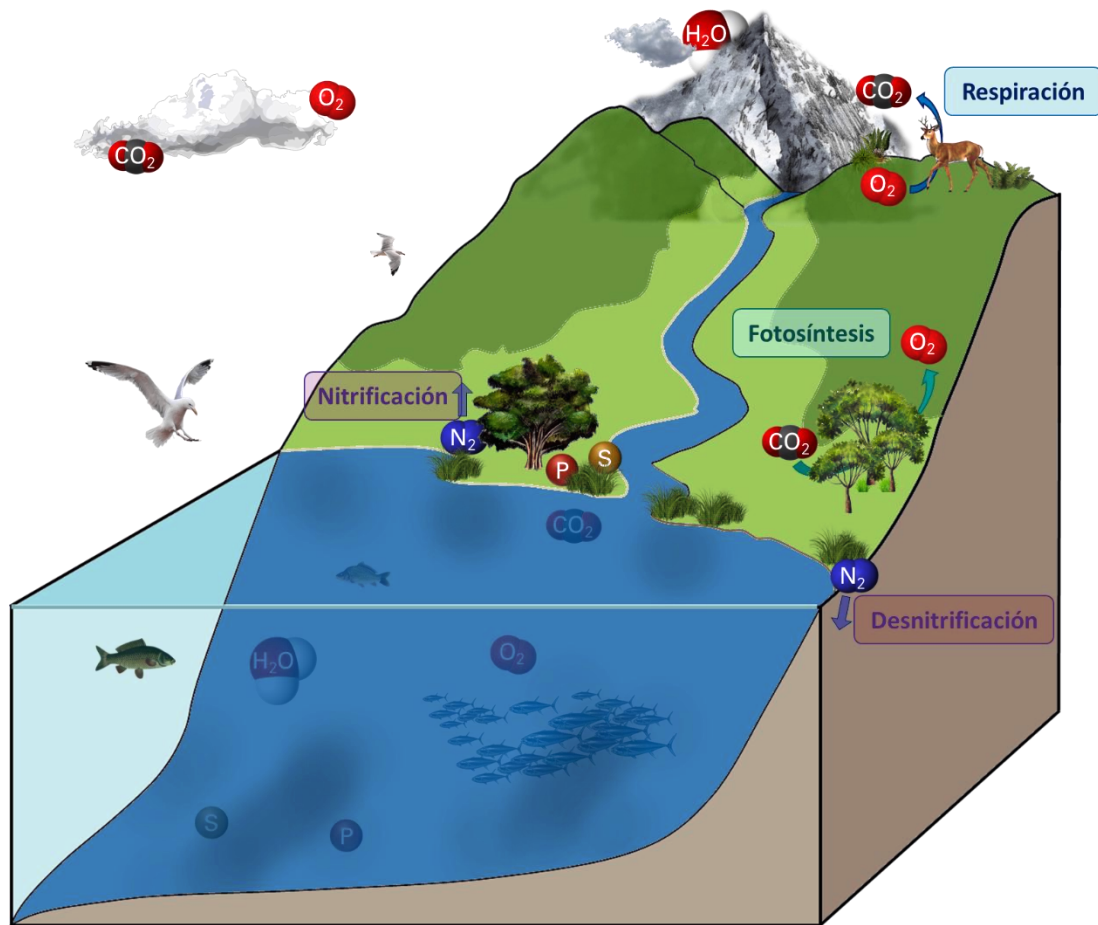


Figura 10. Ejemplo de algunos ciclos biogeoquímicos.

Bibliografía sugerida

- Audesirk, T y Audesirk, G. (2008). Biología: Ciencia y naturaleza. 2da. Edición. Edit. Pearson.
- Audesirk, T. Audessirk G. y Byers, B. (2004). Biología Ciencia y Naturaleza. Pearson Prentice Hall.
- Compendio fascicular. Biología I. (2009). Colegio de bachilleres. Edit. Limusa.
- Curtis H.et. al. (2008). Biología. Editorial Panamericana.
- Odum, E.P. (1994). Ecología. 3a. edición. Editorial Interamericana.
- Valverde, T., Santana Z., Meave J. y Carabias J. (2005). Ecología y Medio Ambiente. Ed. Pearson Prentice Hall.

Bibliografía electrónica

- Khan Academy. (1 de julio de 2025). Evolución de las especies. https://es.khanacademy.org/search?referer=%2Fscience%2Fap-biology%2Fnatural-selection%2Forigins-of-life-on-earth%2Fa%2Fhypotheses-about-the-origins-of-life&page_search_query=Evolucion+de+las+especies
- Khan Academy. (1 de julio de 2025). Hipótesis sobre el origen de la vida. <https://es.khanacademy.org/science/ap-biology/natural-selection/origins-of-life-on-earth/a/hypotheses-about-the-origins-of-life>
- López, J. M., & Moreno, E. (1 de julio de 2025). Genética y las leyes de Mendel: las leyes de Mendel. Museo Virtual de la Ciencia del CSIC. CSIC - Museo Virtual de la Ciencia. <http://museovirtual.csic.es/salas/mendel/m11.htm>

4. Geografía

4.1 Sistema Solar

El sistema solar está formado por ocho planetas que giran alrededor del Sol y se dividen en dos grandes tipos: planetas rocosos o telúricos y planetas gaseosos o gigantes.

Los planetas rocosos son Mercurio, Venus, Tierra y Marte; se caracterizan por ser más pequeños, tener alta densidad, poseer una superficie sólida compuesta principalmente por rocas y metales, contar con pocas lunas y carecer de anillos, además de encontrarse más cerca del Sol. En contraste, los planetas gaseosos son Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno; son mucho más grandes, están formados sobre todo por hidrógeno y helio, no poseen una superficie sólida definida, presentan anillos (algunos muy visibles como los de Saturno) y tienen gran cantidad de satélites naturales, ubicándose en las regiones más alejadas del sistema solar. Esta clasificación permite entender las principales diferencias en la composición, tamaño y ubicación de los planetas.

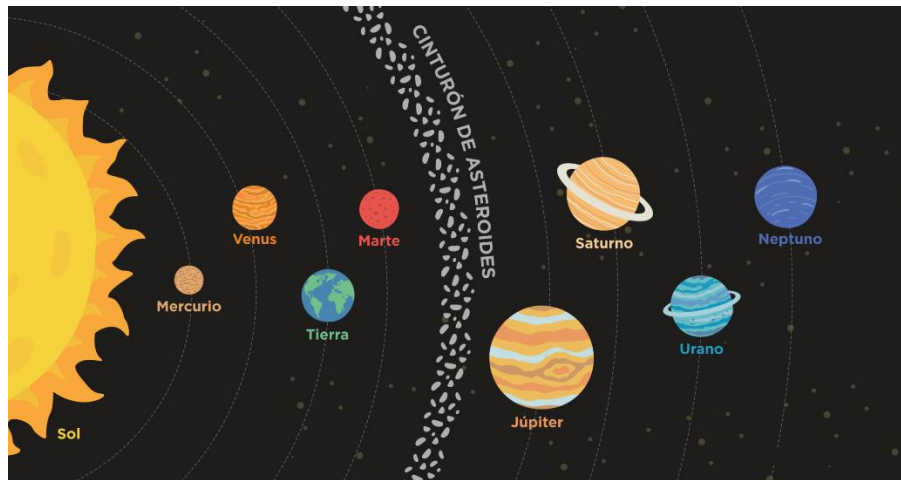


Figura 1. Representación no a escala del sistema solar.

Fuente: Sposob, G. (24 de septiembre de 2025). Sistema solar. Enciclopedia Concepto. Recuperado el 3 de octubre de 2025 de <https://concepto.de/sistema-solar/>

4.2 Espacio Geográfico

Representaciones espaciales

Un mapa es la representación plana, reducida y simplificada de la superficie terrestre o de una parte de ésta, también recibe el nombre de carta geográfica.

Las personas que hacen mapas se llaman cartógrafos, fueron ellos quienes idearon las proyecciones para tratar de eliminar la deformación que resulta al representar un geoide (cuerpo achatado en los polos, como la Tierra) en un plano.

Los mapas impresos son representaciones de la superficie terrestre de forma plana, en ellos se puede representar el total de la superficie terrestre o solo una porción, ya que esto depende del tipo de estudio a realizar, su manejo es más sencillo y permite un mayor detalle en la información que se vaya a estudiar. Sin embargo, los mapas al construirse sobre la base de que la Tierra no es plana, se hace uso de diversas proyecciones cartográficas para corregir los errores de representación.

Los elementos fundamentales que un mapa debe de contener son los siguientes: título, simbología, escala y coordenadas.



Figura 2. Elementos de un mapa.

Fuente: Elaboración propia, tomado de: INEGI. Marco Geoestadístico Nacional, 2023.

Algunos usos de los mapas son:

- Representar el mundo o alguna de sus partes
- Tener un conocimiento más real del planeta en que vivimos
- Saber con precisión dónde estamos y cómo llegar a otro lugar
- Comprender el contexto del lugar donde vivimos
- Conocer la interrelación de elementos que constituyen un espacio geográfico
- Ubicar los continentes y países, así como las ciudades y localidades

En la actualidad una herramienta de representación de la superficie de la Tierra dinámica son los Sistema de Información Geográfico (SIG) que son un conjunto de herramientas informáticas y cartográficas, cuya finalidad es la obtención de datos relacionados con el espacio físico, ya que permite a los usuarios crear consultas interactivas, integrar, analizar y representar de una forma eficiente cualquier tipo de información geográfica referenciada asociada a un lugar, país o el resto del mundo, conectando mapas con bases de datos. Los SIG están conformados por dos componentes importantes:

- Una base de datos, en la cual se almacenan características del espacio geográfico, junto con información georreferenciada (coordenadas), donde se muestran las diversas relaciones existentes los elementos del espacio geográfico.
- Funciones o comandos que permiten al usuario consultar la base de datos y obtener respuesta, en base a datos o imágenes (mapas digitalizados).

El SIG lo utilizamos todos los días como, por ejemplo, el uso de *Google Maps* para llegar a algún lugar a través del uso del Sistema de Posicionamiento Global (GPS) de nuestro celular.

4.2 Estructura de la Tierra

Placas tectónicas, sismicidad y vulcanismo

Los agentes internos (el vulcanismo y el tectonismo) crean nuevas formas de relieve, pero éstas no son indestructibles, sino que en el transcurso de millones de años son modificadas continuamente por los denominados agentes externos: estos son el viento, el agua, los cambios de temperatura, la acción de los elementos químicos disueltos en el agua y en el aire, así como las acciones de los seres vivos.

Los sismos son fenómenos naturales que se producen por la liberación repentina de energía acumulada en las rocas. Por su origen, los sismos pueden ser tectónicos, volcánicos o artificiales.

Las erupciones volcánicas son emisiones de magma y gases calientes, ceniza, gravas o fragmentos de roca, que fluyen a través de un conducto o fisura de la corteza terrestre.

Los agentes externos cambian paulatinamente todos los relieves del planeta y pueden convertir en amplias llanuras, zonas montañosas; en estos cambios participan dos procesos estrechamente relacionados: el intemperismo y la erosión. El primero consiste en la transformación y destrucción de las rocas, esta acción puede ser mecánica o química. El segundo, se refiere a la transportación y depositación de las rocas previamente intemperizadas.

La acción de estos procesos es tan lenta que, por ello, no resulta perceptible para los seres humanos, pero es continua y redistribuye los materiales de la superficie terrestre a lo largo de millones de años.

4.3 Recursos Naturales

Tipos de recursos

Recursos naturales, se refiere a todos aquellos medios, elementos o fuerzas que proporciona la naturaleza y que satisfacen las necesidades de los seres humanos. En vista de que los recursos son un bien, éstos se pueden convertir en una fuente de riqueza, el cual puede ser explotado por algunos para luego ser consumido por las mayorías. Es decir, puede convertir en ricos a los que logren controlar los recursos y en pobres a los consumidores que no posean ese control.

Características de los recursos naturales.

- **Escasos:** no están presentes en cualquier espacio geográfico, ni en abundancia, muchos de ellos son finitos, es decir, algún día se terminarán.
- **Dependientes:** hoy más que nunca, cada recurso natural dependerá del correcto uso que le demos y de la capacidad que les proporcionemos para alargar su estancia en la Tierra.

Los recursos naturales pueden ser:

- **Renovables:** son aquellos recursos bióticos como el agua, el suelo, flora y fauna que si se aprovechan adecuadamente seguirán existiendo; se podrán renovar, y los seres humanos los podremos seguir disfrutando. Su costo puede ser menor en la medida que haya mayor número y costo cuando baje la cantidad. Con todo esto no significa que sean eternos, por ejemplo, si contaminamos el agua, podremos hacerla escasa; pero al mismo tiempo si la sometemos a tratamientos adecuados, puede ser reutilizada. El suelo puede sufrir un agotamiento por el mal uso de cultivos y se necesitará un proceso para volverlo a hacer rico en nutrientes.

- **No renovables:** son aquellos recursos que, aunque existan en cantidades enormes, tienden a desaparecer, además, es casi imposible regenerarlos o volverlos a crear. Tal es el caso de los minerales, el petróleo, el gas o los metales y los depósitos de agua subterránea. El costo de estos elementos es elevado y cuando más se acerque su fin, más caros serán.
- **Inagotables:** son aquellos recursos que, por su condición, no se agotarán, por lo menos en los próximos cientos de años. Entre ellos podremos encontrar a la energía solar, la energía de las olas, del mar y del viento. Si utilizamos adecuadamente éstos, los recursos no renovables podrán ser sustituidos por los inagotables.

4.4 Deterioro ambiental

Causas y afectaciones naturales

Se denomina fenómenos naturales a todos los procesos de cambio que ocurren en la naturaleza de manera constante y espontánea, sin que esté presente la intervención humana. Pueden ser constantes y responder a los cambios físicos propios de la Tierra. Son acontecimientos extraordinarios e inusuales que pueden ser observables en diversos espacios geográficos. Por ejemplo, la lluvia es un tipo de fenómeno natural atmosférico, los arcoíris son fenómenos de tipo meteorológico y las corrientes oceánicas son fenómenos hidrológicos.

Existen diferentes tipos de fenómenos naturales que se categorizan a partir de sus características, su impacto en la naturaleza y en los seres vivos. En gran medida, los fenómenos naturales son inofensivos. Sin embargo, dependiendo de las dimensiones en que estos afecten la vida humana, pueden ser considerados como positivos o negativos, y catalogados como desastres naturales, según los daños generados.

Fenómenos como la lluvia, el viento, los sismos, etc., se pueden convertir en desastres naturales, cuando superan su límite de normalidad.

Se denomina desastre natural, a aquellos acontecimientos que son provocados por eventos naturales, este se amplifica debido a la ubicación de los asentamientos humanos, sobre poblamiento, medidas y sistemas de alerta deficientes y/o poco conocidos.

Las graves consecuencias de los desastres naturales, se debe a las acciones del ser humano que no planifican ni prevén la posibilidad de que ocurra un fenómeno natural de gran impacto negativo. Por ejemplo, la construcción de viviendas en zonas de alto riesgo, la deforestación, la contaminación ambiental, entre otros.

Los fenómenos naturales que más comúnmente pueden conllevar a desastres naturales o estados de emergencia son:

- Fenómenos meteorológicos: vientos, precipitaciones (lluvias, granizadas, nevadas), inundaciones, huracanes, aquellos causados por el fenómeno del niño y muchos más.
- Fenómenos hidrológicos: oleajes, tsunamis o inundaciones.
- Fenómenos geológicos: avalanchas, derrumbes, deslizamientos, terremotos, erupciones, hundimientos de tierra, etc.

4.5 Desastres

Causas y afectaciones antrópicas

Se llama desastres naturales a los cambios repentinos y violentos del medio ambiente, causante de significativas pérdidas materiales y de vidas humanas, producto de accidentes ambientales que no son ocasionados directamente por la mano del hombre, tales como terremotos, tsunamis, vaguadas, etc.

Se habla así de desastres cuando ciertas condiciones ambientales se van a los extremos, rebasando los límites de lo considerado normal.

Por ejemplo, un sismo tectónico puede ser inofensivo, si no aumenta su intensidad y se convierte en un terremoto, capaz de ocasionar numerosas muertes y destrucción en las ciudades cercanas.

Del mismo modo, podría alegarse que los desastres nunca son del todo naturales, sino que se deben en cierta medida a la mala planificación (o falta total de ella), imprudencia o destrucción ambiental de las sociedades humanas.

No deben confundirse los desastres naturales con los desastres medioambientales, en los cuales un elemento específico contamina, degrada o destruye una determinada instancia del medio ambiente.

Las causas de un desastre natural no siempre son determinables, o simplemente responden a factores ambientales que resulta imposible predecir. Así, es posible explicar que los terremotos se deben al movimiento de las placas tectónicas terrestres, pero no cuándo ni dónde se producirá el siguiente o de cuánta intensidad será.

Los desastres naturales a menudo tienen consecuencias directas en la vida humana, ya que pueden costar la vida de numerosas personas (cientos, miles o incluso millones, dependiendo del caso) o pueden también desencadenar otros desastres a su paso. Por ejemplo, es frecuente que un terremoto muy intenso y cercano a la costa ocasione un tsunami, que a su vez inunde terrenos fértiles y conduzca a una hambruna.

4.6 Climas Terrestres

Elementos y factores del clima

Clasificación climática mundial de Köppen

Creada inicialmente por el climatólogo alemán Vladimir Köppen en 1884, describe cada tipo de clima con una serie de letras, que indican el comportamiento de las temperaturas y las precipitaciones. Es una de las clasificaciones climáticas más utilizadas debido a su generalidad y sencillez.

El sistema de Köppen se basa en que la vegetación natural tiene una clara relación con el clima, por lo que los límites entre un clima y otro se establecieron teniendo en cuenta la distribución de la vegetación. Los parámetros para determinar el clima de una zona son las temperaturas y precipitaciones medias anuales y mensuales, y la estacionalidad de la precipitación.

La clasificación divide los climas del mundo en cinco grupos principales, identificados por la primera letra en mayúscula. Cada grupo se divide en subgrupos, y cada subgrupo en tipos de clima. Los tipos de clima se identifican con un símbolo de dos o tres letras.

El primer nivel está constituido por cinco grupos climáticos básicos.

- Clima tipo A (tropical):
Su principal rasgo climático es la ausencia de invierno y una temperatura media superior a los 18 °C en todos los meses del año. También se caracteriza por un tipo de vegetación tropical.
- Clima tipo B (seco):
Precipitaciones escasas, la evaporación supera a la precipitación anual. La vegetación se limita a plantas xerófilas y no hay árboles.
- Clima tipo C (templado):
Se caracteriza por tener inviernos suaves en los que el mes más frío nunca presenta temperaturas medias inferiores a -3 °C. Los inviernos y veranos son variables, pero nunca extremos.
- Clima tipo D (frío):
Los inviernos son fríos, la temperatura media mensual es inferior a los -3 °C, aunque por otra parte la del mes más cálido del año supera los 10 °C y el mes más frío es cercano a los 0 °C.
- Clima tipo E (más frío):
Sin verano, donde la temperatura del mes más cálido del año no alcanza los 10 °C y no hay vegetación.

Dentro de cada uno de estos cinco grandes grupos, Köppen establece una serie de subdivisiones añadiendo una segunda letra relativa a las precipitaciones con la siguiente nomenclatura, diferenciando mayúsculas y minúsculas:

Para los climas tipo B:

- S: clima estepario. La evaporación solar es superior a la precipitación, pero no la dobla. La vegetación consiste en praderas herbáceas.
- W: clima desértico. El índice de evaporación solar es más del doble que el de las precipitaciones.

Para los climas A, C y D:

- f: precipitaciones todo el año
- m (monzónico): con estación seca pero compensada por un alto nivel de precipitaciones anuales

- s: estación seca durante el verano del respectivo hemisferio
- w: estación seca durante el invierno del respectivo hemisferio

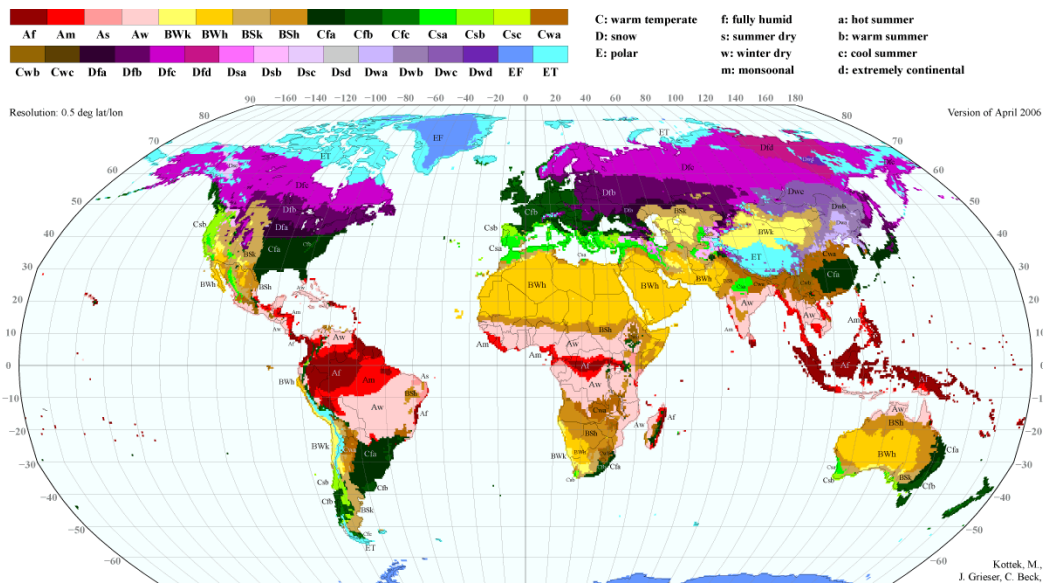


Figura 3. Mapamundi: Clasificación climática de Köppen.
Fuente: <https://koeppen-geiger.vu-wien.ac.at/present.htm>

4.7 Geografía de la Población

Indicadores Demográficos

El Índice de Desarrollo Humano (IDH) fue establecido en el año 2010 por el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD) que forma parte de la Organización de las Naciones Unidas (ONU), estableciendo tres indicadores para clasificar a los países en niveles de desarrollo humano.

Los indicadores son los siguientes:

- Esperanza de vida: expectativa de vida en años que vive una persona, en función de varios factores como la calidad de la salud pública, la alimentación, etc.
- Educación: tasa de alfabetización en adultos, acceso y duración a la educación obligatoria y tasa bruta de culminación de estudios.
- Ingreso per cápita: indicador macroeconómico de productividad y desarrollo económico medido en dólares.

4.8 Migración a nivel mundial

La dispersión de la población es un fenómeno en el que contribuyen factores históricos, culturales, económicos y geográficos que otorgan características particulares a los patrones de poblamiento regionales.

Esas características contribuyen a la dispersión y segregación de las personas, ya que condicionan la prestación de servicios, la construcción de infraestructura de comunicaciones, conectividad y transporte, porque en la mayoría de los casos son insuficientes para atender las necesidades de los habitantes que se establecieron en una determinada región, lo anterior por los altos costos que genera proveerlos de las instalaciones y los medios necesarios para recibir los bienes y servicios básicos, así como los elementos esenciales para su desarrollo.

Las tendencias futuras también obedecen a los efectos migratorios complejos. Asimismo, el escenario regional en materia de desigualdades territoriales, factor clave para los flujos migratorios, se presenta desafiante e incierto ya que si bien hay rasgos persistentes (como los elevados niveles de desigualdad entre campo y ciudad, y el menor desarrollo relativo de las zonas de pobreza histórica), hay otros casos emergentes, los fenómenos de suburbanización de algunas metrópolis, la configuración de ciudades-región que hacen necesaria una nueva escala de análisis, y la creciente migración internacional (que puede sustituir a la interna en algunos casos). Por último, los cambios en materia de política pública también son claves y ameritan un análisis más laborioso que en el pasado, pues lo que tenemos en la actualidad son cada vez menos políticas explícitas de migración interna y cada vez más políticas territoriales o con efectos territoriales (de desarrollo regional o local, de combate a la pobreza, de desarrollo o regulación urbanas, de ordenamiento territorial, etc.), que inciden en los patrones de localización y movilidad de la población.

4.9 Geografía política

Fronteras y Soberanía

División territorial

El nombre oficial de nuestro país es Estados Unidos Mexicanos, aunque también se conoce como República Mexicana o México, está integrado por 32 entidades federativas. La Ciudad de México es la capital y sede de los tres poderes de gobierno (Ejecutivo, Legislativo y Judicial).

Extensión territorial

La superficie de México se integra por la superficie continental y la superficie marítima. La superficie continental se refiere a la parte del territorio nacional que está articulado con el continente americano, así como a las islas del país.

La superficie marítima está constituida por el mar territorial y la Zona Económica Exclusiva (ZEE), en ella México tiene los mismos derechos que en su mar territorial, pero permite la libre circulación de embarcaciones extranjeras y la instalación de diversas vías, por ejemplo, oleoductos marinos o diversos tipos de cableado. El área que ocupan el mar territorial y la ZEE se define por medio de tratados internacionales (con Estados Unidos de América, Guatemala, Belice, Honduras y Cuba) y está custodiada por la Secretaría de Marina.

Mar territorial de México

Franja de mar adyacente al continente e islas, que se extiende hasta 22.2 km (12 millas náuticas) mar adentro, contados desde la línea de costa. En el aplican las mismas leyes que en el territorio continental, por lo que el Estado ejerce plena soberanía en el subsuelo, el lecho, las aguas y el espacio aéreo de esta franja.



Figura 4. Mapa: Áreas de soberanía nacional.
Fuente: INEGI. Marco Geoestadístico Nacional 2018.

Bibliografía sugerida

- Ayllón T & Lorenzo I. (2000). Geografía para Bachilleres. Trilla.
- Jiménez, L. & Galicia M. (2018). Geografía Física para bachillerato. Lapislázuli.
- Quiroga, L & Acosta, G. (2009). Geografía. Bachillerato. ST Editorial.
- Sámano C. (2001). Geografía. Santillana.

Fuentes electrónicas

- CENAPRED. (1 de julio de 2025). Centro Nacional de Prevención de Desastres. Centro Nacional de Prevención de Desastres. <https://www.gob.mx/cenapred>
- División territorial. Cuéntame de México. (1 de julio de 2025). Cuéntame de México. <http://www.cuentame.inegi.org.mx/territorio/division/default.aspx?tema=T>
- Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática. (1 de julio de 2025). Datos de Población. <https://www.inegi.org.mx/temas/>
- Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática. (1 de julio de 2025). Guía para la Interpretación de Cartografía Topográfica. INEGI. https://www.inegi.org.mx/contenido/productos/prod_serv/contenidos/espanol/bvinegi/productos/historicos/1329/702825231743/702825231743_1.pdf
- Instituto Nacional para el Federalismo y el Desarrollo Municipal. (1 de julio de 2025). La distribución espacial de población es un reto nacional. Blog. <https://www.gob.mx/inafed/articulos/la-distribucion-espacial-de-poblacion-es-un-reto-nacional>
- Los mapas. Cuéntame de México. (1 de julio de 2025). Cuéntame de México | Territorio. <https://cuentame.inegi.org.mx/descubre/geografia/mapas/>
- Máxima Uriarte, J. (1 de julio de 2025). Desastres Naturales. Características. <https://www.caracteristicas.co/desastres-naturales/>
- Rubio Barroso, A., & Gutiérrez Puebla, J. (1 de septiembre de 2021). Los sistemas de información geográficos: origen y perspectivas. Revista General de Información y Documentación, 7. <https://revistas.ucm.es/index.php/RGID/article/download/RGID9797120093A/10990>

5. Química

5.1 El átomo

Partes y características del átomo

En el siglo V a. c. el filósofo griego Demócrito expresó la idea de que toda la materia estaba formada por muchas partículas pequeñas que llamó átomo (de una palabra griega que significa invisible). A pesar de que la idea de Demócrito no fue aceptada por muchos de sus contemporáneos (entre ellos Platón y Aristóteles), ésta se mantuvo.

Con base en la teoría atómica de Dalton, un átomo se define como la unidad básica de un elemento que puede intervenir en una combinación química. Dalton describió un átomo como una partícula extremadamente pequeña e indivisible. Sin embargo, una serie de investigaciones iniciadas alrededor de 1850, y que continuaron hasta el siglo XX, demostraron claramente que los átomos tienen una estructura interna, es decir, que están formados por partículas aún más pequeñas, llamadas partículas subatómicas.

A través de la historia de la química, se han propuesto diversos modelos atómicos, a partir del descubrimiento de las partículas subatómicas y el comportamiento de la materia. Los modelos propuestos son los de Dalton, Thompson, Rutherford, Bohr, entre otros.

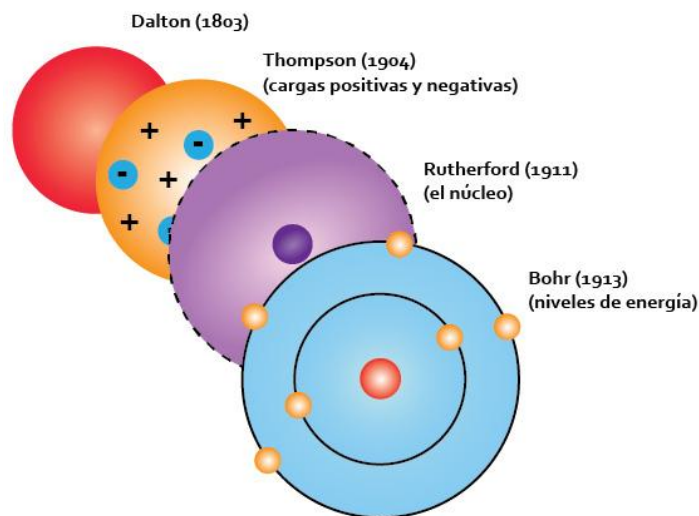


Figura 1. Modelos de átomo.

Fuente: https://e1.portalacademico.cch.unam.mx/alumno/quimica1/unidad2/modelos_atomicos/introduccion

Algunas propiedades del átomo son:

- Partícula muy pequeña (1 a 5 Å).
- Conformada por protones, neutrones y electrones.
- Lo que define a un elemento es su número de protones.
- Su estructura y enlaces determinan las propiedades físicas y químicas de los materiales.

5.2 Tabla periódica

Tipos de elementos: metales, no metales y gases nobles

La tabla periódica tiene una historia muy interesante, inicia con la búsqueda de una sola partícula elemental que fuera la responsable de la construcción de todas las cosas, una partícula que sólo al variar

la forma en que se agrupara diera origen a toda la materia. En la cultura griega (640 a. C.) surgió la pregunta por primera vez: ¿De qué están hechas las cosas? Entonces surgió la palabra *elementum* que intentó explicar la pureza de un bloque constructor de toda la materia. Los griegos dieron el nombre de *chemia* al arte de tratar materiales con objeto de cambiar su naturaleza, algunos piensan que *chem* significa "magia negra".

Los alquimistas, en su afán de encontrar la forma de cambiar la naturaleza de los materiales, encontraron los primeros elementos. En 1661, el inglés Robert Boyle, escribió sus descubrimientos sobre el comportamiento de los gases en un libro titulado "El Químico Escéptico". Boyle se llamó a sí mismo químico porque la palabra alquimista había ido adquiriendo una mala reputación, poco después la Alquimia se convirtió en Química.

En 1852, un químico llamado Edward Frankland, acuñó el término "valencia" para describir la capacidad de combinación de los elementos. En 1864, el químico John Alexander Reyna Newlands, se entretenía enrollando la lista de los elementos en columna y se percató de que, dividiendo la lista en columnas de siete, conseguía una pauta definida de similitudes. A finales de los años 1860, Dimitri Ivánovich Mendeléiev, como la mayoría de los químicos anteriores a él, se había enfrentado al problema de encontrar cierta clase de orden en la lista de los elementos. Mendeléiev se concentró en las valencias de los elementos para ordenarlos. Posteriormente el químico John Dalton los ordenó por peso atómico y finalmente, el químico Henry Gwyn-Jeffreys Moseley por número atómico.

Configuración electrónica

La configuración electrónica de un átomo representa la distribución de los electrones en sus orbitales. Las configuraciones electrónicas están escritas en una notación convencional que enumera en primer lugar al del número cuántico principal, seguido de la letra que indica el orbital s, p, d o f. Una cifra sobre la letra del orbital indica el número de electrones que contiene. En otras palabras, define la forma tridimensional del orbital. Cada número cuántico angular corresponde a un subnivel de energía para los orbitales de un átomo, dichos subniveles son:

- s – sharp (nítido)
- p – principal (principal)
- d – diffuse (difuso)
- f – fundamental (fundamental)

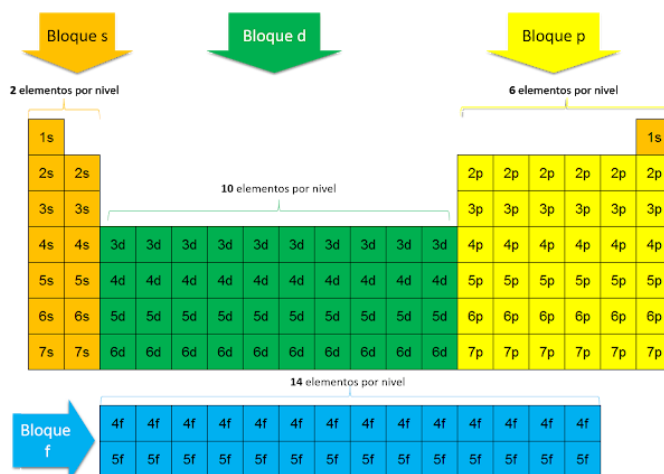


Figura 2. Ejemplo de la configuración electrónica aplicada a la tabla periódica, cubriendo periodos y grupos.

5.3 Estados de agregación de la materia

Cambios de estado

Los estados de agregación de la materia se definen como una de las maneras en que la materia interactúa con sí misma para formar una fase homogénea. Es decir, que tanto se pueden atraer las moléculas unas con otras, esto dependerá de la energía y de la capacidad de la molécula en cuestión para absorber calor. Las moléculas se pueden encontrar estabilizadas en alguno de las siguientes fases: sólido, líquido, gas y plasma.

Aunque en la actualidad se han descubierto otros estados de la materia en ciertas condiciones, las más relevantes para nuestra vida diaria corresponden a estas cuatro fases, pues las podemos observar constantemente en nuestro entorno inmediato. Como es el plasma que se observa durante una tormenta en forma de rayo, la nieve de una montaña que contiene hielo, el líquido que corre por un río y en el cielo podemos ver el vapor del agua en forma de nubes.

Estos estados son estudiados por la termodinámica, la cual permite explicar, a través de sus leyes o principios, en qué condiciones se encuentran estos. Por ejemplo, un sistema que contiene siempre la misma cantidad y energía constante presentará un estado. Una cosa importante es observar que las moléculas pueden transitar de un estado a otro, esto es un fenómeno importante en nuestro planeta para regular el clima de la Tierra derivado del constante cambio de fase del agua. Es decir, el clima en el que vivimos se beneficia de la propiedad de los estados de la materia para lograr tener un clima estable.

Estado sólido

Las sustancias que se encuentran en estado sólido tienen forma y volumen definido. Las partículas que las constituyen se encuentran muy cerca unas de otras ya que predominan las fuerzas de cohesión. Esto ocasiona que no se puedan mover libremente y lo hagan únicamente en el lugar en el que se encuentran (movimiento vibracional). Entre las sustancias que de manera natural existen en estado sólido se encuentran, por ejemplo, la plata y el oro usados en joyería, el cobre que sirve para las conexiones eléctricas, el hierro y el aluminio utilizados en herrería.

Estado líquido

El líquido más conocido es el agua, debido a que es fundamental para nuestra vida. Entre las características de un líquido se puede mencionar que las partículas que lo constituyen tienen mayor libertad de movimiento que las de un sólido debido a que aparecen además de las fuerzas de cohesión las de repulsión, lo que permite que las partículas se deslicen una sobre otra, es decir, fluyan.

Estado gaseoso

Las sustancias en estado gaseoso no son fáciles de distinguir a simple vista si no son coloridas. Todos sabemos que el aire que respiramos está constituido por varios gases y uno de ellos es el oxígeno. Sin embargo, no lo podemos ver, tanto a los gases como a los líquidos se les llama fluidos.

Plasma

El plasma se define como un gas que puede ser sometido a altas temperaturas, a corrientes eléctricas o al que se le transfiere una gran cantidad de energía en forma de luz, lo que permitirá que cambie su comportamiento clásico de gas. Entre los ejemplos de este cuarto estado de la materia están el Sol, los relámpagos y las lámparas fluorescentes usadas en las oficinas públicas.

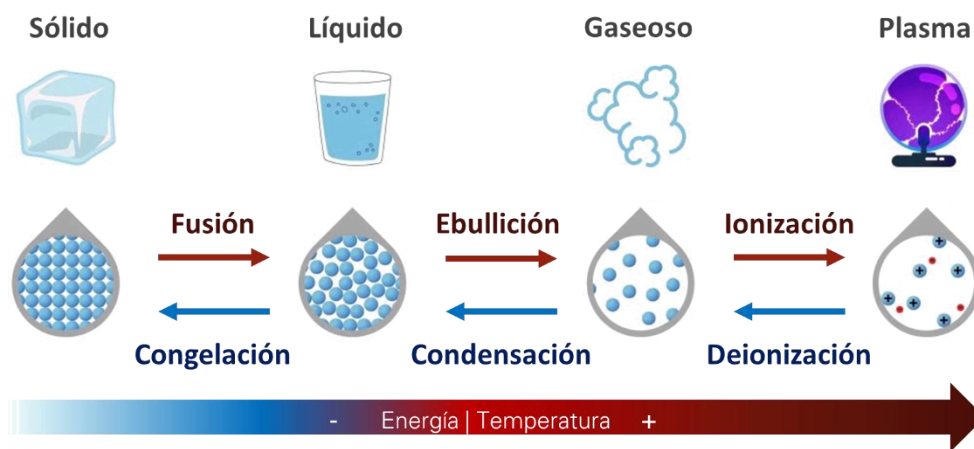


Figura 3. Estados y cambios de la materia.

5.4 Mezclas

Elementos puros y compuestos

Si consideramos que el 70% de la materia sustancial que nos rodea son mezclas, entonces podemos afirmar que las sustancias tienden a mezclarse naturalmente y no es fácil encontrarlas puras. Las mezclas se dan entre las diferentes combinaciones posibles de los estados o fases: sólido, líquido y gas.

Estados de las sustancias en la mezcla	Ejemplo	Tipo de mezcla
Gas-gas	Aire (mezclas de gases, principalmente de nitrógeno, oxígeno y argón)	Homogénea
Gas-líquido	Niebla (Mezcla de aire con vapor de agua)	Homogénea
Gas-sólido	Humo (mezcla de aire con partículas sólidas producto de una combustión incompleta)	Homogénea
Líquido-gas	Bebidas gaseosas (dióxido de carbono disuelto en agua)	Heterogénea
Líquido-líquido	Vinagre (contiene ácido acético en agua)	Homogénea
Líquido-sólido	Agua de mar (contiene sales disueltas en el agua, principalmente cloruro de sodio con un 77%)	Homogénea
Sólido-gas	Maíz palomero (vapor de agua disuelto en almidón)	Heterogénea
Sólido-líquido	Amalgama dental (mercurio disuelto en plata)	Homogénea
Sólido-sólido	Latón (disolución de Zinc en cobre)	Homogénea

Tabla 1. Tipos de mezclas.

Cualquier mezcla se genera mediante la unión de dos o más elementos o compuestos unidos en proporciones fijas o variables. Cada sustancia conserva sus características individuales ya que se tiene una unión física y no se lleva a cabo reacción alguna. Las mezclas pueden ser homogéneas o heterogéneas.

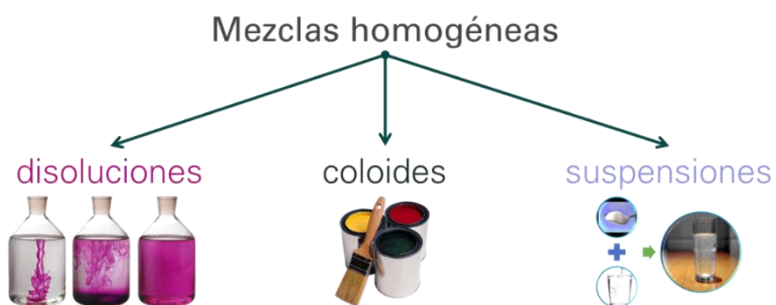


Figura 4. Tipos de mezclas homogéneas.

El tamaño de las partículas de los componentes de estas mezclas es menor a un nanómetro (una milésima de micra), por eso cuando se observa la disolución en un microscopio tiene un aspecto homogéneo. El componente de la disolución que está presente en mayor cantidad se denomina disolvente, y al otro u otros componentes que se encuentren en menor proporción se les denomina solutos. Tanto el soluto como el disolvente pueden ser sólidos, líquidos o gases.

Los coloides son mezclas que se dan a escala microscópica, en donde las partículas de una o más sustancias se dispersan (fase dispersa) en otra sustancia llamada medio dispersor o fase dispersante. Las partículas de la fase dispersa son suficientemente grandes como para dispersar la luz (este efecto óptico se conoce como Efecto Tyndall), pero demasiado pequeñas como para precipitar. Por tanto, una forma de distinguir una disolución de un coloide es mediante el Efecto Tyndall.

Las suspensiones son mezclas homogéneas que se dan a escala macroscópica, es decir, las partículas son tan grandes que se ven a simple vista (tienen un tamaño superior a $1\mu\text{m} = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$ es decir un millonésimo de metro). En estas mezclas la fase dispersa permanece suspendida en la fase dispersora, pero sólo por un tiempo determinado, pues finalmente sedimenta dependiendo del tamaño de partícula y de la diferencia entre las densidades de las sustancias dispersa y dispersora. Muchos de estos productos tienen impresa la leyenda “agítase antes de usarse”, esto significa que una mezcla heterogénea se convierte en homogénea cuando se agita.

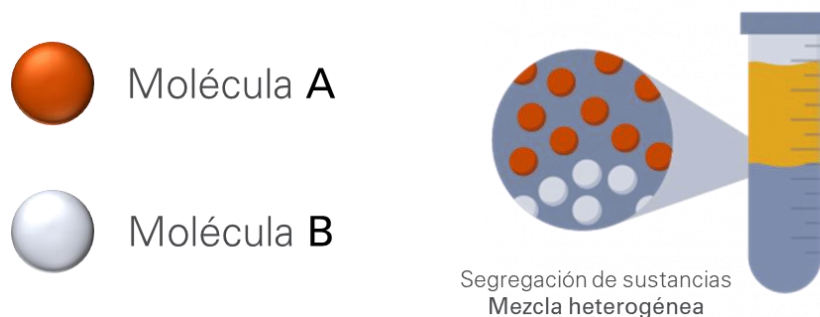


Figura 5. Modelo de una mezcla heterogénea.

5.5 Reacciones Óxido-Reducción

Oxidación y reducción

Históricamente los términos oxidación y reducción se aplicaron en procesos en los que ocurre una transferencia de oxígeno, hidrogeno o de electrones.

Oxidación	Reducción
✓ Ganancia de oxígeno	✓ Pérdida de oxígeno
✓ Pérdida de electrones	✓ Ganancia de electrones
✓ Pérdida de hidrógeno	✓ Ganancia de hidrógeno (en compuestos orgánicos)

Tabla 2. Características de las reacciones Oxido – Reducción.

En todos los casos, la transferencia se lleva a cabo entre dos especies, una que gana y otra que pierde partículas, siempre se presenta una oxidación y una reducción y viceversa, nunca se tiene un proceso sin el otro.

Una sustancia que oxida a otra se conoce como agente oxidante, en el mismo sentido, una que reduce a otra se llama agente reductor.

Los números de oxidación son un invento o, mejor dicho, una convención de los químicos. Se trata de un número entero que se asigna a cada elemento presente en un compuesto, con la idea de comparar su ambiente electrónico con el del mismo elemento en estado libre.

En todo compuesto electrónicamente neutro, la suma de los números de oxidación de los elementos que lo constituyen es cero, cualquier átomo en un elemento tiene número de oxidación cero.

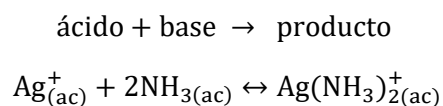
Las definiciones modernas de oxidación y reducción son las siguientes:

- Decimos que un elemento se oxida cuando en un cambio químico su número de oxidación aumenta
- Una disminución del número de oxidación de un átomo implica su reducción

5.6 Reacciones ácido-base

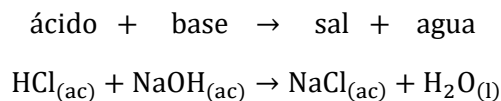
Sustancias ácidas y básicas, reacciones de neutralización

En 1932, el químico norteamericano G.N. Lewis formuló una definición, que actualmente se denomina base de Lewis, es una sustancia que puede donar un par de electrones. Un ácido de Lewis es una sustancia capaz de aceptar un par de electrones. Por lo tanto, una reacción ácido-base de Lewis es aquella que implica la donación de un par de electrones de una especie a otra. Dicha reacción no produce una sal y agua. Por ejemplo:



Reacciones de Neutralización

Una reacción de neutralización es una reacción entre un ácido y una base, generalmente en las reacciones acuosas ácido-base se forma agua y una sal, que es un compuesto iónico formado por un catión distinto de H^+ y un anión distinto del OH^- u O_2^- .

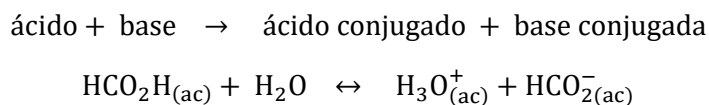


Reacciones par ácido-base conjugado

Cuando un ácido de Bronsted-Lowry dona un protón forma la base conjugada de ese ácido, cuando una base acepta un protón, forma el ácido conjugado de esa base, por lo tanto:

- La base conjugada de un ácido es la especie que queda cuando el ácido pierde un protón
- Un ácido conjugado resulta de la adición de un protón a una base
- Al par ácido-base lo diferencia un protón y se le llama par conjugado o ácido-base conjugado

En general, una reacción ácido-base se describe como:



5.7 Potencial de hidrógeno

Escala de pH

Los ácidos producen iones hidrógeno H^+ , en una solución acuosa, los ácidos naturales y las soluciones ácidas comparten la característica de que la concentración del ion hidrógeno de la solución aumenta cuando el ácido se disuelve. Estas concentraciones se pueden expresar en notación científica, aunque una manera más conveniente de expresar estas cifras es usando una escala logarítmica de pH.

El pH de una solución es el negativo del logaritmo de la concentración de ion hidrógeno.

$$pH = -\log[H^+]$$

Con ello se observa que los ácidos tienen un pH relativamente bajo, mientras que una base tiene un pH alto, pero una concentración de ion hidrogeno muy baja. Por lo que, para soluciones acuosas a 25 °C, se puede decir que los ácidos tienen valores de pH inferiores a siete, las bases tendrán valores mayores de siete y que un pH de siete representa una solución neutra.

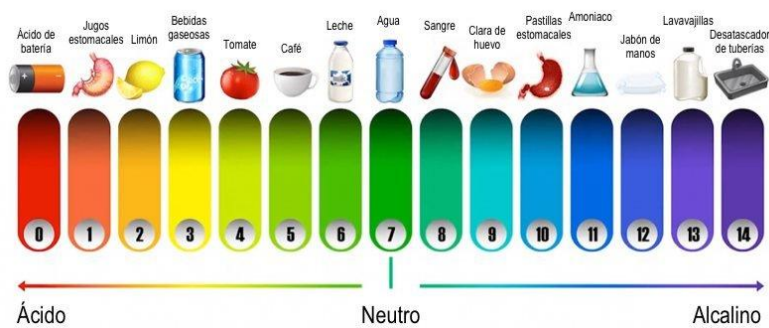


Figura 6. Escala de pH.

5.8 Enlaces químicos

Estructura de Lewis y Electronegatividad

Enlace metálico (metal-metal)

Se obtiene cuando los elementos de la tabla periódica que se unen son los mismos metales o diferentes (aleaciones), por ejemplo: Cu, Al y Fe.

Enlace covalente (no metal-no metal)

Este tipo de enlace puede ser no polar, polar o coordinado, el enlace covalente no polar se obtiene cuando los elementos que se unen son los mismos no metales, por ejemplo: H_2 , N_2 , O_2 y F_2 .

El enlace covalente polar se une entre no metales y además son diferentes entre ellos. Por ejemplo: H_2S , CH_4 , NH_3 , H_2O y H_2CO_3 .

El enlace covalente coordinado se obtiene cuando los elementos que se unen son no metales, los dos elementos comparten un par electrónico (uno aporta el par), por ejemplo: H_2SO_4 , HNO_3 y $HClO_3$.

Enlace iónico (metal-no metal)

Se obtiene cuando los elementos que se unen son un metal con un no metal, si el metal pertenece a la familia IA o IIA y se une a un no metal de la familia VIIA, el enlace es iónico, por ejemplo: CaF_2 y $NaCl$.

Enlace	Características
Iónico	<ul style="list-style-type: none">• Son sólidos duros y quebradizos• Generalmente son sales con puntos de fusión y ebullición muy grandes• La mayoría de las sales iónicas son solubles en disolventes polares como el agua• En disoluciones acuosas conducen la corriente eléctrica• Tienen tendencias a formar cristales• Su densidad es mayor que la del agua
Covalente	<ul style="list-style-type: none">• No polar:<ul style="list-style-type: none">○ Insolubles en agua○ No conducen la corriente eléctrica ni el calor• Polar:<ul style="list-style-type: none">○ Su densidad es menor que la del agua○ Solubles en disolventes polares como el agua
Metálico	<ul style="list-style-type: none">• Son conductores de calor, de corriente eléctrica, son dúctiles y maleables• Se mezclan entre sí para formar metales impuros (aleaciones)• Sólidos con puntos de fusión elevados (excepto el Hg que es líquido a temperatura ambiente)• Presentan brillo metálico (son de color gris, excepto el oro (Au) que es amarillo, el cobre (Cu) que es rojizo y la plata (Ag) blanca grisácea)

Tabla 3. Tipos de enlaces y sus características.

5.9 Ecuaciones de estado

Ley de gases ideales

Un gas se puede describir mediante cuatro cantidades interaccionadas: la presión, el volumen, la temperatura y la cantidad de mol, junto con una constante de proporcionalidad, denominada constante de los gases.

$$PV = nRT$$

En donde:

- P = presión
- V = volumen
- n = moles
- T = temperatura
- R = $0.082 \frac{\text{atm} \cdot \text{L}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

Esta ecuación anterior se le llama ley de los gases ideales y describe el comportamiento de un gas ideal (este no existe) sin embargo, los gases a presiones cercanas a 1 atm o menos y una temperatura cercana a la ambiental suelen tener un comportamiento casi ideal.

5.10 Masa molecular

La masa molecular es la cantidad que indica cuánto pesa una molécula. Se obtiene sumando las masas atómicas de todos los átomos que la forman. Cada elemento químico tiene una masa atómica específica, que se puede encontrar en la tabla periódica.

Por ejemplo, el agua (H_2O) está formada por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno, al sumar las masas de estos tres átomos, se obtiene la masa molecular del agua, que es aproximadamente 18 unidades de masa atómica (uma). Este concepto es muy importante en química, ya que permite conocer la cantidad de sustancia presente en una muestra y realizar cálculos en las reacciones químicas.

Masa atómica del Hidrógeno es 1.008 u y la del Oxígeno es 16.00 u, por lo tanto, para calcularla podemos hacer lo siguiente:

$$\text{Masa molecular H}_2\text{O} = (2 \times 1.008) + (1 \times 16.00) = 2.016 + 16.00 = 18.016 \text{ u}$$

5.11 Compuestos del carbono

Nomenclatura

El carbono puede constituir más compuestos que ningún otro elemento, porque sus átomos tienen la capacidad de formar enlaces carbono-carbono sencillos, dobles y triples, también unirse entre sí formando cadenas o estructuras cíclicas. La rama de la química que estudia los compuestos del carbono es la química orgánica.

Los hidrocarburos son compuestos orgánicos formados únicamente por átomos de carbono (C) e hidrógeno (H), estos se dividen en:

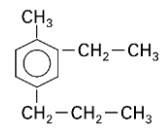
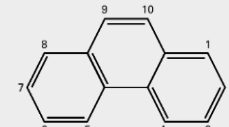
Hidrocarburos acíclicos (alifáticos)	
Lineales: no presentan cadenas laterales	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$
Ramificados: presentan cadenas laterales	$\begin{array}{ccccccc} \text{H}_3\text{C} & -\text{CH} & -\text{CH}_2 & -\text{CH} & -\text{CH}_3 \\ & & & & \\ & \text{CH}_3 & & \text{CH}_3 & \end{array}$
Hidrocarburos cíclicos (aromáticos)	
Monocíclicos: tienen una sola operación de ciclización	
Policíclicos: tienen más de una sola operación de ciclización	

Tabla 4. Tipos de hidrocarburos.

La nomenclatura de los alcanos y de todos los demás compuestos orgánicos se basa en las recomendaciones de la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC). Los nombres de los 10 alcanos más comunes de cadenas lineales son mostrados en la siguiente tabla.

Número de átomos de Carbono	Nombre	Fórmula molecular	Fórmula semi-desarrollada
1	Metano	CH_4	CH_4
2	Etano	C_2H_6	CH_3-CH_3
3	Propano	C_3H_8	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_3$
4	Butano	C_4H_{10}	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$
5	Pentano	C_5H_{12}	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$
6	Hexano	C_6H_{14}	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$
7	Heptano	C_7H_{16}	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$
8	Octano	C_8H_{18}	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$
9	Nonano	C_9H_{20}	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$
10	Decano	$\text{C}_{10}\text{H}_{22}$	$\text{CH}_3-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}_3$

Tabla 5. Nomenclatura de los alcanos.

La clase de componentes orgánicos se distinguen de acuerdo con los grupos funcionales que contienen, un grupo funcional es un grupo de átomos responsables del comportamiento químico de la molécula que lo contiene. Moléculas diferentes que contienen la misma clase de grupo o grupos funcionales reaccionan de manera semejante. Algunos de los grupos funcionales son: alcoholes, éteres, aldehídos, cetonas, ácidos carboxílicos y aminas.

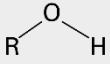
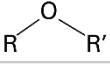
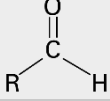
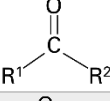
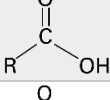
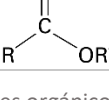
Grupo funcional	Fórmula	Estructura	Sufijo
Alcohol	$R-OH$		-ol
Éter	$R-O-R'$		R-il R'-il éter
Aldehído	$R-C(=O)H$		-al -carbaldehído
Cetona	$R-C(=O)R'$		-ona
Ácido carboxílico	$R-COOH$		Ácido -ico
Éster	$R-COO-R'$		R-ato de R'-ilo

Tabla 6. Clase de componentes orgánicos.

Bibliografía sugerida

Cervantes, B. y Loredo, J. (2011). Manual de prácticas de Química General en microescala, Trillas.

Chamizo, J. Petrich, M. (1995). Química 1. Esfinge.

Chang, R & Goldsby K.A. (2017), Química, Mc Graw Hill Education.

García, H.; Irazoque, G. y Talanquer, V. (1996). Introducción a la Física y a la Química. Fondo de Cultura Económica.

Garriz, A., C.J.A. (1994) Química. Addison-Wesley Iberoamericana.

Jardón, G. (2000) Capítulo 6. Teorías de disociación ácido-base. En Curso de Química general para estudiantes de ingeniería química.

Kotz, J.C., T.P.M. (2003) Química y reactividad química. Thomson.

6. Física

6.1 Movimiento

Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

El MRU se tiende que considerar en situaciones simplificadas de los fenómenos, para, una vez comprendidas, introducir variables que las aproximen más a la realidad. En esta línea, el movimiento de un objeto está condicionado por su interacción (rozamiento, acción de un motor, gravedad, fuerzas eléctricas, etc.) con el resto de los objetos del Universo, los cuales, con más o menos intensidad le comunican una aceleración que perturba su camino.

Características del MRU:

- Trayectoria rectilínea
- Velocidad constante (módulo, dirección y sentido)
- El espacio recorrido es igual al desplazamiento

Concepto	Fórmula	Unidad
Distancia	$d = v \cdot t$	<i>m o km</i>
Velocidad	$v = \frac{d}{t}$	$\frac{m}{s}$ o $\frac{km}{h}$
Tiempo	$t = \frac{d}{v}$	s o h

Tabla 1. Ecuaciones del Movimiento Rectilíneo Uniforme.

Movimiento Uniformemente Acelerado (MUA)

Este movimiento se presenta cuando el cuerpo experimenta cambios de velocidades iguales en tiempos iguales, lo que implica una aceleración constante no nula en el tiempo.

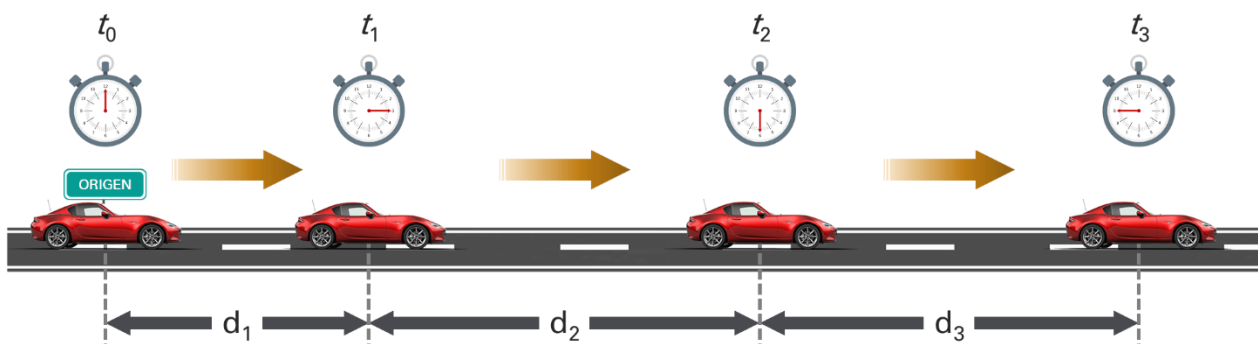


Figura 1. Movimiento Uniformemente Acelerado.

En la imagen se observa un automóvil que se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea, que va recorriendo distancias cada vez mayores en intervalos iguales de tiempo, esto quiere decir que el móvil va aumentando su velocidad uniformemente (siempre en la misma cantidad) en intervalos iguales de tiempo, por lo tanto, está acelerando. En los movimientos ordinarios, la velocidad no suele ser una magnitud constante, la aceleración está presente bien por causas naturales (p. e. la gravedad) o por otras

interacciones (rozamiento, fuerza producida por un motor o fuerzas eléctricas). Por la presencia de estas interacciones los objetos dejan de moverse en línea recta y resultan trayectorias, en general, curvilíneas.

Ecuaciones del Movimiento Uniformemente Acelerado (MUA)

Concepto	Fórmula	Unidad
Aceleración	$a = \frac{v}{t}$	$\frac{m}{s^2}$
Velocidad	$v_f = v_i + a \cdot t$	$\frac{m}{s}$
Tiempo	$t = \frac{v}{a}$	s

Tabla 2. Ecuaciones del Movimiento Uniforme Acelerado.

6.2 Mecánica clásica

Gravedad de la Tierra

Es la aceleración neta que reciben los cuerpos en la superficie de la Tierra, este valor es el resultado del efecto gravitacional (proporcionado por la distribución de la masa de la Tierra) y la fuerza centrífuga (la rotación de la Tierra), cuyo valor promedio es:

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

Leyes de Newton

1ra ley de Newton o ley de la Inercia

Un cuerpo permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme (velocidad constante) a menos que una fuerza neta externa actúe sobre él.

¿Qué significa esto?

Si nada lo empuja o frena, un objeto no cambia su estado.

Si un objeto está quieto, permanece quieto.

Ejemplo: Una pelota en el suelo no se moverá hasta que alguien la empuje.

$$\sum F = 0$$

La anterior expresión significa que si la suma de las fuerzas netas es cero, la velocidad del cuerpo no cambia

2da ley de Newton o de proporcionalidad entre fuerza y aceleración

Toda fuerza resultante diferente de cero al ser aplicada a un cuerpo le produce una aceleración en la misma dirección en que actúa. La magnitud de dicha aceleración es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

$$F = ma$$

Donde la fuerza tiene unidades de Newton ($N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$), la masa en kg y la aceleración de la gravedad ($g = 9.81 \frac{m}{s^2}$).

¿Qué significa esto?

Cuanto mayor es la fuerza, mayor será la aceleración.

Cuanta más masa tenga el objeto, menor será la aceleración ante la misma fuerza.

Ejemplo: Empujar un carrito vacío requiere menos esfuerzo que empujar uno lleno.

3ra ley de Newton o de acción y reacción

A toda acción corresponde una reacción de la misma magnitud o intensidad, en la misma dirección, pero con diferente sentido.

¿Qué significa esto?

Cuando un cuerpo aplica una fuerza sobre otro, el segundo cuerpo siempre ejerce una fuerza igual y contraria sobre el primero.

Ejemplo: Al saltar, los pies ejercen una fuerza hacia abajo sobre el suelo, y este responde con una fuerza hacia arriba que nos impulsa.

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

Caída libre

Se define como el movimiento en línea recta con aceleración constante que experimenta un cuerpo en caída de arriba hacia abajo.

Los objetos parten del reposo, es decir, no se le impregna ninguna velocidad inicial.

Concepto	Fórmula	Unidad
Altura	$h = \frac{g \cdot t^2}{2}$	m
Velocidad	$v = g \cdot t$	$\frac{m}{s}$
Tiempo	$t = \frac{v}{g}$	s

Tabla 3. Ecuaciones de la caída libre.

Tiro vertical

Es un tipo de movimiento rectilíneo que ocurre cuando un objeto se lanza hacia arriba de forma vertical, bajo la influencia de la gravedad.

Concepto	Fórmula	Unidad
Altura	$h = v_i \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$	m
Altura máxima	$h_{max} = \frac{v_i^2}{2 \cdot g}$	
Velocidad final	$v_f = v_i - g \cdot t$	$\frac{m}{s}$
Tiempo	$t = \frac{2 \cdot v_i}{g}$	s

Tabla 4. Ecuaciones del tiro vertical.

6.3 Órbitas

Leyes de Kepler

Las leyes de Kepler o leyes del movimiento planetario son leyes científicas que describen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Reciben el nombre de su creador, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630).

El aporte fundamental de las leyes de Kepler fue dar a conocer que las órbitas de los planetas son elípticas y no circulares como se creía antiguamente.

Las leyes de Kepler son leyes cinéticas, esto quiere decir que su función es describir el movimiento planetario, cuyas características se deducen gracias a cálculos matemáticos. Con base en esta información, años más tarde Isaac Newton estudió las causas del movimiento de los planetas.

1ra ley de Kepler o ley de las órbitas

Se conoce también como “ley de las órbitas”, determina que los planetas giran alrededor del Sol describiendo una órbita con forma de elipse, el Sol se ubica en uno de los focos de la elipse.

El enunciado de la primera ley de Kepler es el siguiente:

“Los planetas se mueven de manera elíptica alrededor del Sol, el cual se sitúa en uno de los focos de la elipse”.

2da ley de Kepler o ley de las áreas

Establece que el radio vector barre áreas equivalentes en un mismo intervalo de tiempo. El radio vector es una línea imaginaria que conecta a un planeta con el Sol, por lo tanto, su longitud varía según la distancia entre ambos.

El enunciado de la segunda ley de Kepler es el siguiente:

“El radio vector que une a un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales”.

3ra ley de Kepler o ley de los períodos

Permite comparar las características del movimiento de los planetas entre sí, la comparación toma en cuenta el período orbital y el radio de órbita de cada planeta. El período orbital es el tiempo que demora un planeta en dar la vuelta completa al Sol, el radio de la órbita es el semieje mayor de la elipse.

El enunciado de la tercera ley de Kepler es el siguiente:

“El cuadrado del período orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del radio de la órbita”.

Si dividimos el cuadrado del tiempo orbital entre el cubo del radio de la órbita, tendremos como resultado una constante, llamada constante de Kepler. La constante de Kepler es igual para todos los cuerpos celestes que orbitan alrededor del Sol, ya que no depende de ellos sino de la masa solar.

6.4 Energía

Tipos de transferencia de energía

Conducción

La conducción es la forma de propagación del calor a través de un cuerpo sólido, debido al choque entre moléculas, los metales son buenos conductores del calor; y el corcho, la madera, el plástico, la lana, el aire, la porcelana, el vidrio y el papel son malos conductores de este. En el vacío no se propaga el calor por conducción.

Convección

La convección es la propagación del calor ocasionada por el movimiento de la sustancia caliente, el calentamiento en los líquidos y gases es por convección, los vientos son corrientes de convección del aire atmosférico, debido a las diferencias de temperatura y densidad que se producen en la atmósfera.

Radiación

La radiación es la propagación del calor por medio de ondas electromagnéticas esparcidas, incluso en el vacío, a una rapidez de aproximadamente $300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, todos los cuerpos calientes emiten radiaciones caloríficas, es decir, ondas electromagnéticas de energía proporcional a su temperatura.

6.5 Leyes de la Termodinámica

Equilibrio térmico

Las leyes de la termodinámica (o los principios de la termodinámica) describen el comportamiento de tres cantidades físicas fundamentales: la temperatura, la energía y la entropía, que caracterizan a los sistemas termodinámicos. El término «termodinámica» proviene del griego *thermos*, que significa “calor”, y *dynamos*, que significa “fuerza”.

Matemáticamente, estos principios se describen mediante un conjunto de ecuaciones que explican el comportamiento de los sistemas termodinámicos, definidos como cualquier objeto de estudio (desde una molécula o un ser humano, hasta la atmósfera o el agua hirviendo en una cacerola).

Existen cuatro leyes de la termodinámica y son cruciales para comprender las leyes físicas del Universo y la imposibilidad de ciertos fenómenos como el del movimiento perpetuo.

Ley cero de la Termodinámica

La “ley cero” se conoce con ese nombre, aunque fue la última en postularse. También conocida como Ley del Equilibrio Térmico, este principio dicta que: “Si dos sistemas están en equilibrio térmico de forma independiente con un tercer sistema, deben estar también en equilibrio térmico entre sí”.

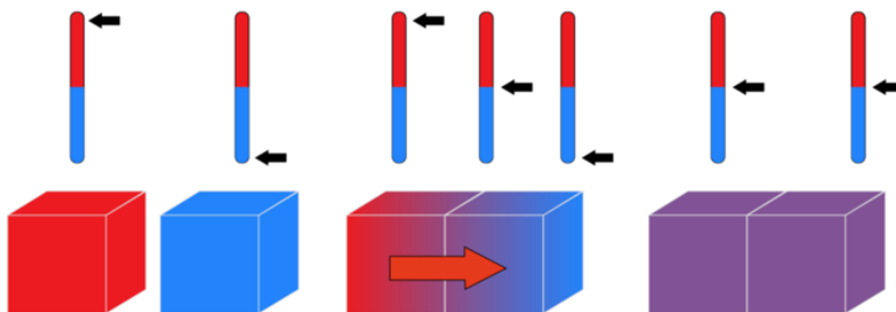


Figura 2. Ley del equilibrio.

Esta ley nos permite comparar la energía térmica de tres cuerpos distintos A, B, y C. Si el cuerpo A se encuentra en equilibrio térmico con el cuerpo C (tienen la misma temperatura) y B también tiene la misma temperatura que C, entonces A y B poseen igual temperatura.

1ra ley de la Termodinámica

La primera ley se llama “Ley de la Conservación de la Energía” porque dicta que, en cualquier sistema físico aislado de su entorno, la cantidad total de energía será siempre la misma, a pesar de que pueda transformarse de una forma de energía a otras diferentes. O, dicho en otras palabras: la energía no puede crearse ni destruirse, solo transformarse.

De ese modo, al suministrar una cantidad determinada de calor (Q) a un sistema físico, su cantidad total de energía podrá calcularse como el calor suministrado menos el trabajo (W) efectuado por el sistema sobre sus alrededores.

Expresado en una fórmula: $\Delta U = Q - W$.

2da ley de la Termodinámica

Dado el tiempo suficiente, todos los sistemas tenderán eventualmente al desequilibrio.

La segunda ley, también llamada «Ley de la Entropía», puede resumirse en que la cantidad de entropía en el Universo tiende a incrementarse en el tiempo. Eso significa que el grado de desorden de los sistemas aumenta hasta alcanzar un punto de equilibrio, que es el estado de mayor desorden del sistema.

Esta ley introduce un concepto fundamental en física: el concepto de entropía (representada con la letra S), que en el caso de los sistemas físicos representa el grado de desorden. Resulta que en cada proceso físico en el que hay una transformación de energía, cierta cantidad de energía no es utilizable, es decir, no puede realizar trabajo. Si no puede realizar trabajo, en la mayoría de los casos esa energía es calor. Ese calor que libera el sistema, lo que hace es aumentar el desorden del sistema, su entropía. La entropía es una medida del desorden de un sistema.

La formulación de esta ley establece que el cambio en la entropía (ΔS) será siempre igual o mayor a la transferencia de calor (ΔQ), dividido por la temperatura (T) del sistema. O sea, que:

$$\frac{\Delta S \geq \Delta Q}{T}$$

3ra ley de la Termodinámica

Al llegar al cero absoluto, los procesos de los sistemas físicos se detienen.

La tercera ley plantea que la entropía de un sistema que sea llevado al cero absoluto, será una constante definida. Dicho en otras palabras:

Al llegar al cero absoluto (cero en unidades de Kelvin), los procesos de los sistemas físicos se detienen y la entropía posee un valor mínimo constante.

Resulta difícil alcanzar cotidianamente el llamado cero absoluto (-273.15°C), pero podemos pensar esta ley analizando lo que ocurre en un congelador: los alimentos que depositemos allí se enfriarán tanto, que se ralentizarán o incluso detendrán los procesos bioquímicos en su interior. Por eso se retarda su descomposición y será apto su consumo durante mucho más tiempo.

Temperatura

Es una magnitud física que mide el grado de agitación térmica de las partículas (átomos o moléculas) de un cuerpo o sustancia. Indica qué tan caliente o frío está un objeto en relación con una escala de referencia (como Celsius, Kelvin o Fahrenheit).

Calor

Es una forma de energía (energía térmica) que se transfiere entre dos cuerpos o sistemas debido a una diferencia de temperatura. Siempre fluye desde la región más caliente hacia la más fría hasta alcanzar el equilibrio térmico.

Tipos de sistemas termodinámicos

Un sistema es una porción del universo que se estudia, donde se analiza el intercambio de energía y materia.

Este sistema está separado del resto del universo (denominado alrededores) mediante límites reales o imaginarios.

Abierto

Sus fronteras permiten el intercambio de materia y energía con el entorno.

Ejemplo: Una olla abierta donde el agua se evapora.

Cerrado

Sus fronteras sólo permiten el intercambio de energía.

Ejemplo: Una botella sellada que puede calentarse o enfriarse.

Aislado

No hay ningún tipo de interacción con el entorno.

Ejemplo: Un termo perfectamente aislado.

Procesos termodinámicos

Isobárico

Se presenta cuando la presión del sistema permanece constante independientemente de los cambios de temperatura o volumen que sufran.

Isocórico

Se presenta cuando el volumen del sistema permanece constante independientemente de los cambios de temperatura o presión que sufran.

Isotérmico

Se presenta cuando la temperatura del sistema permanece constante independientemente de los cambios de presión o volumen que sufran.

6.6 Gases

Ecuaciones de estado

Un gas se caracteriza porque sus moléculas están muy separadas unas de otras, razón por la cual carecen de forma definida y ocupan todo el volumen del recipiente que lo contiene.

Sus consideraciones principales son:

- Los gases están constituidos por moléculas de igual tamaño y masa para un mismo gas, pero serán diferentes si se trata de gases distintos.
- Las moléculas de un gas contenido en un recipiente se encuentran en constante movimiento, razón por la cual chocan entre sí o contra las paredes del recipiente que las contiene.
- Las fuerzas de atracción intermoleculares son despreciables, pues la distancia entre molécula y molécula es grande comparada con sus diámetros moleculares.
- El volumen que ocupan las moléculas de un gas es despreciable en comparación con el volumen total del gas.

Ley de Boyle

A una temperatura constante y para una masa dada de un gas, el volumen del gas varía de manera inversamente proporcional a la presión absoluta que recibe.

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

Ley de Charles

A una presión constante y para una masa dada de un gas, el volumen del gas varía de manera directamente proporcional a su temperatura absoluta.

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Ley de Gay – Lussac

A un volumen constante y para una masa dada de un gas, la presión del gas varía de manera directamente proporcional a su temperatura absoluta.

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

Elasticidad

Ley de Hooke

Esta ley la formuló en el siglo XVII el físico Robert Hooke al estudiar un resorte y darse cuenta de que la fuerza necesaria para comprimirlo era proporcional a la variación de su elongación al aplicar dicha fuerza.

$$F = kx$$

donde F es la fuerza medida en N, x la longitud de la compresión o alargamiento medida en m, y k una constante de proporcionalidad (constante de resorte) expresada en Newtons sobre metros $\left(\frac{N}{m}\right)$.

6.8 Hidrodinámica

Principio de Pascal

Toda presión que se ejerce sobre un líquido encerrado en un recipiente se transmite con la misma intensidad a todos los puntos del líquido y a las paredes del recipiente que lo contiene.

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Principio de Arquímedes

Todo cuerpo sumergido en un fluido recibe un empuje (medido en Newtons) ascendente igual al peso del fluido desalojado.

$$E = \rho \cdot g \cdot v$$

Donde el volumen tiene unidad de m^3 , la densidad (ρ) del fluido tiene unidad de $\frac{kg}{m^3}$ y finalmente la aceleración de la gravedad se toma como $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$.

6.9 Electromagnetismo

Ley de Ohm

Se usa para determinar la relación entre la diferencia de potencial (V), la corriente eléctrica (I) y la resistencia eléctrica (R), en un circuito eléctrico.

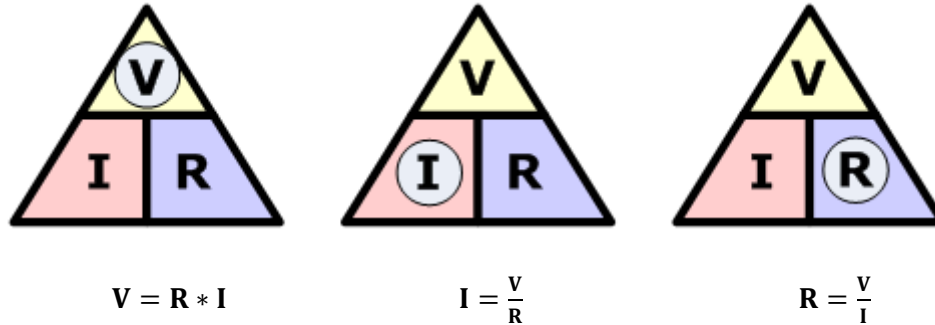


Figura 3. Representación algebraica de ley de Ohm.

6.10 Óptica

Ley de Snell

Se utiliza para calcular el ángulo de refracción de la luz al atravesar la superficie de separación entre dos medios de propagación de la luz, la expresión a continuación representa dicha ley:

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$$

Donde n_1 es el índice de refracción del primer medio, n_2 es el índice de refracción del segundo medio, $\text{sen}\theta_1$ es el seno de ángulo de incidencia y $\text{sen}\theta_2$ es el seno de ángulo de refracción.

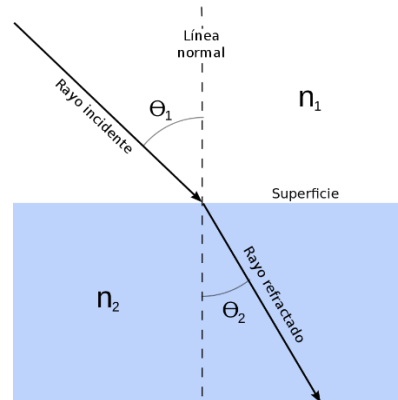


Figura 4. Representación de la Ley de Snell.

Bibliografía sugerida

- Bueche, F. J., Hecht, E. y Castellanos, J. H. P. (1991). Física general. McGraw-Hill.
- Montiel, H. P. (2020). Física General (3a Edición Ebook). Grupo Editorial Patria.
- Pérez, H. (2018). Física General serie Bachiller. 5ta edición, Grupo Editorial Patria.
- Tippens, P. (2000). Física (6th ed.). McGraw-Hill Interamericana.
- Wilson, J. (1996). Física, 2ª edición. Prentice Hall Hispanoamericana.

7. Comunicación

7.1 Elementos en el proceso de comunicación

Comunicación efectiva

La comunicación efectiva es el proceso en el que el mensaje enviado por una persona es comprendido claramente por otra y logra el propósito deseado, ya sea informar, convencer o expresar emociones. Para que la comunicación sea efectiva, es necesario que el mensaje sea claro y preciso, los involucrados usen un lenguaje común y adecuado, se eviten las barreras que dificulten la comprensión y que haya retroalimentación para confirmar que el mensaje fue entendido.

Proceso de comunicación

La comunicación es un proceso que integra varios elementos en el intercambio de información entre un emisor y un receptor por medio de un mensaje, utilizando un canal o medio para la transmisión de éste y un código común, en un contexto determinado.

Los elementos básicos por identificar en el proceso de comunicación son:

- Emisor: Quien emite el mensaje
- Mensaje: La información que contiene
- Canal: El medio por el que se transmite el mensaje
- Código: El sistema de signos que permite la elaboración del mensaje y su interpretación
- Receptor: Quien recibe el mensaje del emisor

Sin embargo, cuando el mensaje no se transmite con claridad, pueden surgir malentendidos. Conocer el proceso de comunicación y las barreras que lo afectan permite establecer relaciones más efectivas y comprensivas.

Barreras de la comunicación

Las barreras de la comunicación son obstáculos que dificultan o impiden que el mensaje se entienda correctamente. Estas barreras pueden causar malentendidos o confusión.

Tipos de barreras:

- Barreras físicas: ruidos, fallas técnicas o distancia excesiva entre emisor y receptor.
Ejemplo: No se escucha bien por una mala conexión de internet.
- Barreras psicológicas: emociones, prejuicios o actitudes negativas.
Ejemplo: El receptor está enojado y no quiere escuchar.
- Barreras semánticas: uso de palabras confusas o desconocidas.
Ejemplo: Uso de tecnicismos que el receptor no entiende.
- Barreras fisiológicas: problemas de audición, vista o habla.
Ejemplo: El emisor habla muy rápido y el receptor no puede seguirle el ritmo.
- Barreras culturales: diferencias en idioma, costumbres o valores.
Ejemplo: Un gesto que es positivo en un país puede ser ofensivo en otro.

7.2 Propósitos del texto

Formas y modos de presentación del discurso

Se refiere a las estructuras o patrones textuales que se utilizan para organizar y expresar un mensaje de manera clara y efectiva. Estas estructuras funcionan como diferentes estilos que se adaptan según el propósito que se tiene al comunicar y el tipo de mensaje que se quiere transmitir.

Intención y situación comunicativa

Cuando un emisor codifica un mensaje y lo envía, lo hace con un objetivo claro a cumplir. Esta finalidad se le conoce como intención y trata de provocar una cierta reacción en el receptor, quien reaccionará dependiendo de su propia comprensión y deseos. A esto se le conoce como “intención comunicativa”.

De esta manera, las principales intenciones comunicativas son:

- Descriptivas. Son los mensajes que el emisor configura para representar en la mente del receptor un objeto o un estado de las cosas del mundo al que se refiere el enunciado.
- Apelativas (ordenar). Buscan influir en el receptor para que realice determinada acción o piense de determinada manera a deseo del emisor.
- Compromisivas (prometer). Con ellas el emisor se compromete con el receptor a realizar una determinada acción en el futuro.
- Expresivas o emotivas. Mediante esta intención, el emisor busca reflejar sus emociones al receptor para que éste reaccione y entienda el estado psicológico del primero.

Asimismo, en algunas clasificaciones se integran otras denominaciones sobre las intenciones comunicativas:

- Narrativa. Busca relatar una historia con personajes que realizan acciones. Dicha narración puede ser ficticia o no.
- Informativa. Busca avisar de un hecho en concreto, en un tiempo, espacio y contexto definido, al emisor.
- Convencer. A partir de la intención apelativa de la clasificación anterior, la definen como la que busca influir, a partir de proporcionar información fidedigna, hechos y procesos lógicos de razón, para que el receptor realice cierta acción.
- Persuadir. Lo mismo que la anterior, ésta se basa en la intención apelativa y es definida como la que busca influir, a partir de sentimientos, engaños o falacias, para que el receptor realice cierta acción.

Sentido connotativo y denotativo

Cuando un autor elabora un mensaje, sus emociones, creencias, opiniones y demás estados psicológicos personales están presentes en su escrito. De esta manera, mientras más alejado esté su escrito de su punto de vista personal, tendremos un texto denotativo; contrariamente, entre más cercano a sus opiniones el texto será más connotativo.

En la siguiente tabla se ponen en contraste las principales características de este tipo de enunciados.

Denotativo	Connotativo
Se enfoca en el objeto, es decir, en los elementos de la realidad externa al autor.	Se enfoca en el sujeto, es decir, en lo que opina, cree, piensa, siente o le gusta al autor.
Intentan hablar sobre objetos, fenómenos o eventos que pasan en la realidad cotidiana.	Intenta hablar de realidades psicológicas o internas del autor, como estados de ánimo,

	sensaciones, gustos, deseos, creencias u opiniones.
La información que presentan es fácilmente comprobable por cualquiera (es una información universal).	La información es personal (del autor), se puede equivocar o fácilmente alguien más puede no estar de acuerdo.
Habla de la realidad cotidiana que cualquiera puede notar o comprobar con sus sentidos externos.	Habla únicamente de lo que una persona percibe, opina o cree sobre la realidad que lo rodea.
Como apoyos, tenemos datos duros, como estadísticas, resultados de experimentos o registros históricos concretos. De igual manera, se complementa la información con otros libros o artículos científicos.	Como apoyos, tenemos los ejemplos, las comparaciones, las analogías, generalizaciones y demás recursos retóricos. Del mismo modo, se acompaña con la opinión de otras personas expertas en el tema, encuestas o sondeos.
Dentro de las posibilidades del texto, se escriben con claridad y sencillez para que no haya confusiones y sólo tenga un significado literal (o sea, lo que significa al pie de la letra). Su información es única y verdadera hasta que otro texto demuestre lo contrario, entonces este texto pasará a ser desechado.	Pese a los objetivos del autor, un texto puede tener diversas interpretaciones dependiendo del lector y el contexto; y cada interpretación es igual de válida y correcta, mientras que se justifique bien con los argumentos correctos.

Tabla 22. Sentido denotativo y connotativo.

7.3 Estrategias de comprensión de textos

Estructura del texto y de las ideas presentadas

La estructura del texto es la forma en que se organizan y ordenan las ideas para que el mensaje sea claro, coherente y cumpla su propósito. Es el "esqueleto" que le da forma y lógica a lo que se quiere comunicar.

Esquema lógico de redacción

La estructura o esquema lógico de redacción es fundamental en la elaboración de un texto, ya que su propósito principal es que éste tenga coherencia, a partir de su integración textual por tres partes.

- **Introducción:** Parte inicial del texto en la que presenta el tema o problema, el planteamiento general, los objetivos por lograr y otros aspectos que ofrecen, en forma breve, una panorámica general del texto.
- **Desarrollo:** Parte del texto en el que se desarrolla el tema presentando la información en datos, cifras, hechos, argumentos, explicaciones, definiciones, conceptos, organizadores gráficos, pruebas, citas textuales, etc.
- **Conclusión o cierre:** Es la parte del texto que sintetiza o presenta una conclusión con base en la información previa.

Ideas primarias y secundarias

Las ideas primarias contienen la parte esencial o fundamental que un autor busca transmitir o comunicar en un texto. Corresponde a la raíz de la idea, a partir de la cual se presenta y desarrolla información adicional.

Las ideas secundarias corresponden a la parte complementaria, de refuerzo, explicación o ampliación de las ideas primarias.

La identificación de las ideas primarias posibilita la comprensión de un texto, debido a que se conoce el contenido esencial de la misma.

7.4 Gramática

Reglas de ortografía y acentuación

Las reglas de ortografía son normas que indican cómo se deben escribir correctamente las palabras para que el texto sea claro y entendible. Seguir estas reglas ayuda a evitar errores que dificultan la lectura o cambian el significado de lo que se quiere decir.

Oraciones simples y compuestas

Oraciones simples

Las oraciones son unidades mínimas de predicación, es decir, segmentos que ponen en relación un sujeto con un predicado. Hay oraciones simples que constan de un sujeto, verbo y predicado que por la actitud del hablante se divide en enunciativas, interrogativas, exclamativas, desiderativas, dubitativas y exhortativas. Las enunciativas enuncian juicios, ideas, opiniones; las interrogativas expresan preguntas; las exclamativas delatan la emoción del hablante; las desiderativas expresan el deseo de que suceda algo, sin decirlo directamente. En general, usan el modo subjuntivo; las dubitativas no afirman, expresan duda del hablante y las exhortativas indican orden, ruego, suplica

Sumado a lo anterior, por la naturaleza del predicado hay atributivas o copulativas (uso de verbo ser o estar), transitivas (uso de verbos transitivos), reflexivas (uso de verbos reflexivos), recíprocas (uso de verbos recíprocos), intransitivas (uso de verbos intransitivos) y pasivas (uso de verbo en voz pasiva).

Oraciones compuestas

Por otra parte, las oraciones compuestas son aquellas que contienen un sujeto, dos o más verbos y los complementos del predicado. Éstas se clasifican en yuxtapuestas, coordinadas y subordinadas.

Las oraciones yuxtapuestas

La palabra yuxtaponer significa 'poner algo junto a'. Las oraciones yuxtapuestas entonces aparecen juntas, una al lado de la otra, pero no tienen una palabra como nexos, sino un signo de puntuación (generalmente una coma, un punto y coma, o dos puntos). Esto provoca que entre las oraciones yuxtapuestas no haya una relación explícita porque un mismo signo de puntuación nos permite plantear varias ideas.

Las oraciones coordinadas

A este grupo pertenecen las oraciones que se unen entre sí para sumar elementos, agregar información, dar opciones, hablar de oposición o referirse a varios elementos de manera alternativa.

Se considera que la relación planteada entre estas oraciones es de iguales o, dicho en otras palabras, que las oraciones enlazadas tienen el mismo valor.

Las oraciones subordinadas

Una oración subordinada siempre forma parte intrínseca de otra oración, es decir, funciona como sujeto, objeto directo, complemento circunstancial o da características de un sustantivo. Entre la oración subordinada y la oración principal de la que forma parte se establece un vínculo estrecho, por eso, si se elimina la subordinada, la oración principal pierde sentido.

Puntuación

El punto marca una pausa al final de un enunciado. Después de un punto siempre se escribe mayúscula. Hay tres tipos de puntos:

- Punto y seguido: separa enunciados que integran un párrafo.
- Punto y aparte: separa dos párrafos distintos con dos contenidos diferentes.
- Punto final: cierra un texto.

También se usa después de las abreviaturas. Nunca se usa el punto en los títulos y subtítulos de libros, artículos, capítulos, obras de arte.

Punto y coma

Indica una pausa superior a la coma e inferior al punto. Se utiliza:

- Para separar los elementos de una enumeración cuando se trata de expresiones que incluyen comas.
- Delante de las conjunciones o locuciones como: pero, mas, aunque, sin embargo, por tanto, por consiguiente, cuando los periodos tienen cierta longitud.

Dos puntos

Se usan en los siguientes casos:

- Delante de una enumeración anunciada con un verbo.
- En citas textuales.

- Después de las fórmulas de saludo en las cartas y documentos.
- En textos jurídicos y administrativos detrás del verbo (decretos, bandos, certificados, etc....).

Puntos suspensivos

Suponen una interrupción en la oración o un final impreciso. Se usan en los casos siguientes:

- Al final de una enumeración cuando tiene el mismo valor que la palabra etcétera.
- Para expresar un momento de duda.
- Para dejar un enunciado incompleto y en suspenso.
- Cuando se omite una parte de una cita textual.

Uso de comas

La coma es un signo de puntuación que se usa para separar ideas dentro de una oración y facilitar su comprensión. Usarla correctamente ayuda a que el mensaje sea claro y preciso. Existen diferentes tipos, como:

- Enumerativa
Para separar los elementos de una enumeración.
- Explicativa o incidental
Encierra información adicional que no altera el sentido principal de la oración.
- Vocativa
Se usa para separar el nombre de la persona a la que se dirige el mensaje.
- Elíptica
Sustituye un verbo o sustantivo que ya fue mencionado, para evitar repetirlo.
- Apositiva
Se usa cuando el sujeto es conocido por otro nombre que lo describe. Este alias debe ir entre comas.
- Conjuntiva
Es utilizada cuando en la oración se realiza una pausa con alguna frase adverbial o conjunciones. Las más comunes son: es decir, por ejemplo, o sea, en primer lugar. Para aislar el vocativo.

Grafías c, s, z

Letra C

- Se escriben con C, los verbos terminados en cir y ducir. Excepción: asir.

Ejemplos: conducir, aducir, traducir, esparcir, producir, relucir, zurcir, decir.

- Se escriben con C, las palabras terminadas en ancia, ancio, encia. Excepciones: ansia, Hortensia.

Ejemplos: constancia, excelencia, extravagancia, cansancio, decadencia, indulgencia, fragancia, conciencia, distancia.

- Se escriben con C, los diminutivos: cito, ecito, ecillo, si proceden de palabras sin S final.

Ejemplos: pez – pececito, dulce – dulcecito, pie – piececito, flor – florecita, mamá – mamacita.

Excepción: Las palabras que llevan S en la última sílaba distinta al plural, conservan la S en el diminutivo. Ejemplo. Masa-masita, tasa-tasita, rosa-rosita.

- Se escriben con C, las palabras terminadas en el sufijo cida/cidio (matar), cimiento.

Ejemplos: homicida, parricida, suicidio, reconocimiento.

- Se escriben con C, los verbos terminados en cer. Excepciones: toser, coser, ser.

Ejemplos: nacer, yacer, hacer, adolecer, agradecer, retorcer, estremecer.

- Se escriben con C, los verbos terminados en ciar. Excepciones: lisiar, ansiar, extasiar, anestesiarse.

Ejemplos: apreciar, acariciar, neciar, vaciar, negociar, viciar.

- Se escriben con C, las palabras terminadas en acia, icia, icie, icio. Excepciones: Dionisio, gimnasio, Asia, Anastasia, alisio, eutanasia.

Ejemplos: Fenicio, planicie, bullicio, pericia, codicia, malicia, falacia.

- Se escribe con C, la terminación ces que surge del plural de las palabras que contienen z.

Ejemplos: maíz-maíces, raíz-raíces, pez-peces, rapaz-rapaces, atroz-atroces.

- Se escriben con C, las formas de los verbos terminados en ceder, cender, cibir, citar, siempre que no proceda de raíces que lleven S, ejemplo transitar.

Ejemplos: conceder, encender, recitar, recibir, anteceder, percibir.

Letra S

- Se escriben con S, las palabras que terminan en ense (gentilicio), erso, ersa.

Ejemplos: nicaragüense, costarricense, reversa, adverso. Excepción. Fuerza, almuerzo.

- Se escriben con S, las terminaciones sivo, siva.

Ejemplos: corrosivo, masiva, explosivo, expresiva, intensivo.

- Se escribe con S, en el pronombre enclítico pospuesto al verbo.

Ejemplos: caerse, peinarse, bañarse.

- Se escriben con S, las palabras terminadas en los superlativos ísimo, ísima.

Ejemplos: bellísima, lindísimo, feísima, inteligentísima, delicadísima.

- Se escriben con S, los adjetivos (cualidad) terminados en oso, osa.

Ejemplos: Bondadoso, sabrosa, dadivoso, perezosa, maravilloso, grandioso.

- Se escriben con S, las palabras terminadas en ismo y sura (excepto Dulzura).

Ejemplos: espiritismo, oscurantismo, basura, censura.

- Se escriben con S, las palabras terminadas en esca, esco que no sean verbos.

Ejemplos: grotesca, dantesca, burlesco, gigantesco, pintoresco.

- Se escriben con S, las terminaciones esta, esto, ista.

Ejemplos: feminista, violinista, tiesto, fiesta, artista.

- Se escriben con S, en las palabras que comienzan con tras, des, dis, seg, sig.

Ejemplos: Trascender, desleal, disgustar, segmento, signo.

Excepciones: cigoñal, cegar, ceguera, cigüeñal, cigüeña.

- Se escribe con S, la terminación S, cuando se deriva de una palabra terminada en sor.

Ejemplos: Televisor – televisión, visor – visión.

Letra Z

- Se escriben con Z, las palabras terminadas en anza/o y azgo. Excepciones: gansa/o, mansa/o.

Ejemplos: adivinanza, mudanza, panza, hallazgo, danza, alabanza, almirantazgo.

- Se escriben con Z, las terminaciones ez, eza, az, oz, de los nombres abstractos.

Ejemplos: belleza, voraz, pereza, fugaz, rigidez, atroz, palidez, paz, torpeza, rapaz, timidez, eficaz.

- Se escriben con Z, las terminaciones azo, aza que denotan aumento, golpe.

Ejemplos: manaza, carrazo, ojazos, codazo.

- Se escriben con Z, para la terminación zco derivada de los verbos terminados en acer, ecer, ocer, ucir.

Ejemplo: Complacer-complazco, conocer-conozco, padecer-padezco, lucir-luzco.

- Se escriben con Z, las terminaciones zuela, zuelo (que denotan disminución o desprecio) y en los sustantivos y en los sustantivos terminados en Zal cuando indican lugar donde hay algo o abundancia.

Excepción: Mocosuelo, marquesuela, cipresal, fresal y todas las palabras que en la última sílaba llevan S.

Ejemplos: mujertzuela, ladronzuelo, portezuela, jovenzuelo, maizal.

Grafías b, v

Letra B

- Los verbos terminados en -bir.

Ejemplos: escribir, recibir, sucumbir.

Excepciones en voces de uso actual: hervir, servir, vivir y sus compuestos.

- Los verbos terminados en -buir.

Ejemplos: contribuir, atribuir, retribuir.

- Los verbos deber, beber, caber, saber y haber.
- Las terminaciones -aba, -abas, -abamos, -aban del pretérito imperfecto del indicativo (copretérito, en la terminología de Andrés Bello) de los verbos de la primera conjugación.

Ejemplos: cantaba, bajabas, amaban.

- El pretérito imperfecto de indicativo de ir: iba, ibas, etc.

- Las palabras que empiezan por el elemento compositivo biblio-(libro).

Ejemplos: biblioteca.

- Las palabras que empiezan por las sílabas bu-, bur- y bus-.

Ejemplos: bula, burla, buscar.

Excepción: vudú y sus derivados, además de otras voces caídas en desuso.

- Las que empiezan por el elemento compositivo bi-, bis, biz ('dos' o 'dos veces').

Ejemplos: bipolar, bisnieto, bizcocho.

- Las que contienen el elemento compositivo bio-, -bio ('vida').

Ejemplos: biografía, biosfera, anaerobio, microbio.

- Las palabras compuestas cuyo primer elemento es bien o su forma latina bene.

Ejemplos: bienaventurado, bienvenido, beneplácito.

- Toda palabra en que B precede a otra consonante o está en final de palabra.

Ejemplos: abdicación, abnegación, absolver, obtener obvio, subvenir, amable, brazo, rob, nabab.

Excepciones: ovni y algunos términos desusados. En las palabras obscuro, subscribir, substancia, substitución, substraer y sus compuestos y derivados, el grupo bs- se simplifica en s.

Ejemplos: sustancia, sustantivo, oscuro.

- Las palabras acabadas en -bilidad

Ejemplos: amabilidad, habilidad, posibilidad.

Excepciones: movilidad, civilidad y sus compuestos.

- Las acabadas en -bundo y -bunda.

Ejemplos: tremebundo, vagabundo, abunda.

Letra V

- Las palabras en las que las sílabas ad-, sub- y ob preceden a V.

Ejemplos: adviento, subvención, obvio.

- Las palabras que empiezan por eva-, eve, eví- y evo-.

Ejemplos: evasión, eventual, evitar, evolución.

Excepciones: ébano y sus derivados, ebionita, ebonita y eborario.

- Las que empiezan por el elemento compositivo vice-, viz- o vi- (en lugar de).

Ejemplos: vicealmirante, vizconde, virrey.

- Los adjetivos llanos terminados en -avo, -ava, -evo, -eva, -eve, iva, -ivo.

Ejemplos: esclavo, octava, longevo, nueva, aleve, decisiva, activo. Excepciones: suabo y mancebo.

- Las voces llanas de uso general terminadas en -viro, vira.

Ejemplos: decenviro, Elvira, triunviro.

- Las voces esdrújulas terminadas en -ívora.

Ejemplos: carnívora, herbívoro, insectívoro.

Excepción: víbora.

- Los verbos acabados en -olver.

Ejemplos: absolver, disolver, volver.

- Los presentes de indicativo, imperativo y subjuntivo del verbo ir.

Ejemplos: voy, ve, vaya.

- El pretérito perfecto simple de indicativo (o pretérito, según Bello) y el pretérito imperfecto (pretérito) y futuro de subjuntivo de los verbos estar, andar, tener y sus compuestos.

Ejemplos: estuvo, estuviéramos, estuviere, anduve, desanduvo, desanduviere, tuviste, retuvo, sostuviera, contuviese, mantuviere.

Acentuación

La acentuación de las palabras en español permite determinar el énfasis fonético sobre una sílaba al pronunciar una palabra. Ortográficamente se representa mediante una tilde (´) y puede colocarse sobre las cinco vocales (á, é, í, ó, ú). Cada palabra puede llevar solo una tilde.

Las palabras monosílabas

Las palabras monosílabas se componen de una sola sílaba y no se acentúan nunca, por regla general.

Ejemplo:

yo, pan, bien, mes

La tilde diacrítica

La tilde diacrítica se coloca sobre todo en palabras monosílabas que tienen un par homónimo y que buscan diferenciarse una de la otra por su grafía.

Ejemplo:

Él es el chico que está esperando para entrar en esta sala.

Me han pedido que te dé este ramo de flores.

Te he llamado para tomar un té.

Las palabras polisílabas se componen de dos o más sílabas. Se clasifican conforme a su acentuación (esto es, según cual sea la sílaba tónica) en agudas, llanas o graves, esdrújulas y sobresdrújulas. La tabla siguiente explica en qué casos llevan tilde las palabras polisílabas según del tipo que sean.

Tipos de palabra	Sílaba tónica	Tilde	Ejemplos
Aguda	Última	<ul style="list-style-type: none"> • Si la palabra termina en -n, -s o vocal 	camión, compás, colibrí, tapiz

		<ul style="list-style-type: none"> • Excepto si termina en más de una consonante 	robots
Llana o Grave	Penúltima	<ul style="list-style-type: none"> • Si la palabra no termina en -n, -s o vocal • Si termina en más de una consonante 	álbum, lápiz, mañana bíceps
Esdrújula	Antepenúltima	<ul style="list-style-type: none"> • Siempre llevan tilde 	década, México, rápido
Sobresdrújula	Anterior a la antepenúltima	<ul style="list-style-type: none"> • Siempre llevan tilde 	cómetelo

Tabla 23. Clasificación de palabras polisílabas.

Semántica

Es la rama de la lingüística que estudia el significado de las palabras, las frases y los textos. Su objetivo es entender cómo las palabras transmiten ideas y cómo se interpretan esos mensajes. Gracias a ella, se pueden evitar malentendidos, pues una palabra puede tener varios significados dependiendo del contexto en el que se use.

Sinónimos, Antónimos y Homónimos

En los idiomas humanos, muchas palabras tienen significados que se relacionan mutuamente, ya sea en igualdad o siendo contrarias entre ellas. Las relaciones de significado más usuales son la sinonimia, antonimia y la homonimia.

- **Sinonimia:** El significado de dos o más palabras es muy cercano o equivalente, por lo que pueden intercambiarse dependiendo del contexto del enunciado. Por ejemplo, con el sentido de que una acción se pone en marcha, los términos “empezar” y “comenzar”.
- **Antonimia:** El significado de dos o más palabras está alejado o es contrario, por lo que entre ellas se niegan o rechazan. Por ejemplo, “claro” y “oscuro”; “antes” y “después”.
- **Homonimia:** Este fenómeno de la lengua puede clasificarse en dos tipos. Por una parte, los homógrafos son aquellas palabras que se escriben igual pero su significado es completamente distinto. Por ejemplo, el término “vino” puede significar una bebida alcohólica extraída de la uva o puede derivarse de la conjugación del verbo “ir”. Por otra parte, tenemos los homófonos, que son palabras que suenan o se pronuncia igual, pero que su significado y escritura es distinta. Por ejemplo, “votar” del acto de elegir democráticamente a alguien y “botar” de hacer que un objeto elástico, como una pelota, sea lanzado a alguna superficie.

7.5 Propósitos del texto

Distinguir tipos de textos

Cada tipo de texto tiene una estructura y un lenguaje particular según lo que se quiere comunicar. La distinción de textos significa reconocer las características y funciones de cada escrito para entender de una mejor forma su contenido y propósito.

Texto Descriptivo

En el texto descriptivo se representa la realidad mediante palabras. Muchas veces se ha definido como pintura verbal. Si la historia en la narración se desarrolla como un proceso temporal, el contenido de la descripción detiene el transcurso del tiempo para observar los detalles de un objeto, una persona o un entorno como si de una pintura se tratara. La descripción es un modo de organización del contenido de un texto que está constituido por tres actividades: nombrar la realidad (definir la realidad), situarla en el espacio y el tiempo, y calificarla (calificar es una forma de tomar partido, por eso toda calificación implica subjetividad). La intención del autor y la finalidad que el autor desea alcanzar con el texto señalan las diferencias entre los dos tipos de descripción.

Texto narrativo

Un texto narrativo es una forma de expresión que cuenta hechos o historias acontecidas a sujetos, ya sea humanos (reales o personajes literarios), animales o cualquier otro ser antropomorfo, cosas u objetos; en

él se presenta una concurrencia de sucesos (reales o fantásticos) y personas en un tiempo y espacio determinados. Dos elementos básicos de las narraciones son la acción (aunque sea mínima) encaminada a una transformación, y el interés que se produce gracias a la presencia de elementos que generan intriga (definida ésta como una serie de preguntas que porta el texto y a las cuales la narración termina dando respuesta).

Las narraciones son actos comunicativos que suponen la existencia de un emisor con una intención (¿por qué narrar?) y una finalidad (¿para qué narrar?). Existen narraciones literarias, cuya finalidad es eminentemente artística (por ejemplo, las presentes en cuentos, fábulas, leyendas, mitos y novelas, entre otros textos artísticos o de pretensiones estéticas), así como las narraciones no literarias, cuya finalidad es informativa (por ejemplo, noticias periodísticas, crónicas, reportajes, conversaciones en donde se relata algo, anécdotas, entre otros); en este último caso se narran hechos no ficticios.

Texto Argumentativo

Los textos argumentativos son de los más recurrentes en las lecturas de estudiantes, profesores, científicos, políticos, entre otros. A través de la argumentación se expresan ideas fundamentales para defender o refutar los pensamientos o ideas de otro. La argumentación es la base del convencimiento, del razonamiento, de la persuasión, de la demostración y del conocimiento humano.

No sería posible concebir a un individuo sin que pudiera expresar sus opiniones. Sin embargo, éstas deben estar perfectamente fundamentadas pues, de lo contrario, no tendrían el peso suficiente para tratar de cambiar conductas, desarrollar nuevas formas de conocimiento, exhortar a realizar ciertas actividades, entre otros propósitos. Para realizar una lectura analítica, para desarrollar en los hablantes la posibilidad de tratar y resolver conflictos, es necesario saber leer y escribir textos argumentativos: reconocer su esquema general y sus características; los propósitos, algunos géneros y los recursos discursivos más empleados; identificar y comprender las ideas más importantes a favor o en contra de un tema polémico.

Texto Expositivo

El texto expositivo es el texto escolar por excelencia; a lo largo de la vida, en particular de la vida académica, se está en contacto permanente con este tipo textual que tiene como propósito fundamental transmitir información y explicar nuevos temas; es decir, el texto expositivo transmite información o ideas con la intención de mostrar, explicar o hacer comprensible algo. En síntesis, el propósito del texto expositivo es hacer comprender una información, un tema, un concepto. Para que algo sea comprensible tiene que ser mentalmente representable. Los lectores se enfrentan con textos expositivos cotidianamente; se puede decir que son omnipresentes pues están en libros de texto, enciclopedias, manuales y textos de divulgación científica en general. Exponer equivale a suministrar información y, a la vez, a explicarla. Si bien la función primordial consiste en transmitir información, el texto expositivo no se limita sólo a proporcionar datos, sino que agrega a éstos explicaciones; describe o ilustra con ejemplos o analogías una determinada información con la finalidad de reelaborar el conocimiento.

En un texto expositivo son importantes dos aspectos: el texto y su clasificación a partir de las teorías verbales que permiten que los lectores se fijen en:

- Su estructura informativa. Cómo se ordena el contenido de lo que se dice, de lo particular a lo general o viceversa.
- El tema del que se trata y que se desplegará en campos semánticos. Es decir, se notará la progresión del tema básicamente con una serie de conceptos relacionados entre sí.

Objetividad y Subjetividad

Objetividad

La objetividad se basa en hechos reales y verificables. Asimismo, expresa la realidad tal cual es y aporta información objetiva.

Hecho

Un hecho es todo evento comprobable mediante la percepción de los sentidos. El primer punto a considerar es si un hecho en concreto debe ser tomado como una manifestación de la realidad a la que tenemos al menos un acceso limitado, o tan solo como un dato que además de mostrar la verdad de las cosas, la oculta. Aunado a ello, el hecho es objeto de prueba y una entidad compleja que combina elementos observacionales y teóricos.

Subjetividad

La subjetividad es un concepto que sintetiza la idea de que la naturaleza o el mundo y nuestra forma de sentido dentro del espacio social están constituidas esencialmente por las opiniones, creencias y saberes de los sujetos; así, estas entidades subjetivas de conocimiento fundamentarían los códigos y usos de sentido en nuestra existencia.

Opinión

La opinión es un juicio o valoración que se forma una persona respecto de algo o de alguien. Por otra parte, puede ser la fama o el concepto en que se tiene a alguien o algo.

Suposición

La suposición estriba en considerar como cierto o real algo a partir de los indicios que se tienen. Aunado a ello, también es considerar como cierto o real algo que no lo es o no tiene por qué serlo.

7.6 Diferentes tipos de texto

Tipos de texto expositivo

Los tipos de textos expositivos tienen como finalidad dar a conocer información de forma objetiva, apegada a la realidad, a los hechos, careciendo de opiniones o valoraciones subjetivas.

Destacan:

- La nota informativa: Que es ampliamente utilizada como forma de transmitir información apegada a los hechos. Utilizada ampliamente como fuente de información primaria y publicada en periódicos y revistas físicas o digitalizadas.
- Los textos didácticos: Son utilizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje en los centros educativos.
- Los textos de consulta: Diccionarios, códigos, enciclopedias, que de igual forma son utilizados en los ámbitos escolares, académicos, de investigación y laborales.
- Los textos de divulgación científica: Que tienen por característica difundir los avances científicos a segmentos amplios de la población.

Tipos de texto argumentativo

Hay diversos tipos de textos argumentativos. Destacan los periodísticos de opinión, entre los que se encuentran el artículo, el editorial y la columna; los mensajes publicitarios y propagandísticos, que

corresponden al ámbito comercial y del discurso político, respectivamente; el ensayo y la reseña crítica, que son textos ampliamente utilizados en trabajos escolares, académicos y obras literarias.

Todos los anteriores dentro del discurso argumentativo, que tiene como propósito o intención comunicativa convencer, persuadir, influir o modificar la postura del receptor-lector en torno a un tema.

7.7 Géneros literarios

Narrativo

Elementos del análisis narrativo

Existen partes identificables y comunes en todo texto narrativo. A partir de ellas podemos analizar cómo se estructura un relato y cuáles son las funciones de cada una de las partes. De esta manera, los elementos serían:

- Tema. Es la idea principal o valor que el autor quiere resaltar y en torno al cual giran todos los elementos del relato. Por lo general, el tema puede definirse en unas pocas palabras. Por ejemplo, el tema de la “rectitud moral” o “portarse bien” en la historia de Pinocho.
- Argumento. Son las acciones básicas y principales que realizan o padecen los personajes. Dichas acciones no tienen una relación causal entre sí. Por ejemplo, el argumento es el mismo en el relato de Pinocho: un hombre mayor que nunca tuvo hijos talla un muñeco de madera. Luego un hada le da vida al muñeco y éste, tras enfrentar varios problemas, se gana la capacidad de volverse humano.
- Trama. Es el orden cronológico de los sucesos del relato. A diferencia del argumento, la trama intenta explicar las relaciones causales de dichos sucesos. Según la morfología de Propp, la trama se divide en un planteamiento (los personajes viven en la normalidad), nudo (problema que surge), clímax (cómo se resuelve el problema) y desenlace (regreso a una nueva normalidad). Según la red actancial de Grimas, la trama se divide en secuencias *mayores* (como las del planteamiento, nudo, clímax y desenlace) y *menores* (que son las acciones concatenadas dentro de cada secuencia mayor).
- Narrador. Es quien toma la voz para contar la historia. Según las clasificaciones de Mieke Bal, en tanto a la postura del narrador tenemos el *autodiegético* (que cuenta su propia historia); *homodiegético* (que cuenta la historia de alguien más, pero siendo también un personaje del relato); y *heterodiegético* (cuenta la historia desde fuera, sin ser personaje). Según el punto de vista del narrador tenemos en *primera persona* (ve los hechos y los cuenta), en *segunda persona* (haciendo la ilusión de que el narrador describe las acciones del lector hablándole de tú) y en *tercera persona* (cuenta la historia de alguien más, ya sea porque es testigo de los sucesos o relatando todo como una especie de dios omnisciente).
- Personajes. Son los seres que tienen la capacidad de realizar acciones e interactuar entre sí dentro de la obra. Según la red actancial de Greimas, los personajes son denominados como actantes y se dividen entre sujetos (protagonista); facilitadores o ayudantes (aquellos que benefician al protagonista); opositores (antagonista); dificultadores (aquellos que perjudican al protagonista, ya sea porque ayudan al antagonista o por sí mismos); y beneficiarios (quienes obtienen provecho de las acciones del protagonista).
- Ambiente. Es el entorno donde se desarrollan los hechos de la narración. Afecta la atmósfera del relato y puede influir en las acciones o emociones de los personajes, puede ser el lugar físico, el clima, época del año, etc.

Subgéneros narrativos

El mito

Los mitos son narraciones de tintes fantásticos que ofrecen interpretaciones religiosas y sagradas del mundo. Son muy comunes en los principios de toda civilización y los temas comunes son la creación del universo (mitos cosmogónicos), el nacimiento y función de los dioses (mitos teogónicos) la creación de los seres humanos (mitos antropogónicos), así como la creación de ciudades, batallas entre grupos humanos y trabajos de héroes y semidioses, quienes por lo general compartían la condición divina al ser concebidos entre mortales y dioses. Como ejemplos prototípicos tenemos a la *Ilíada* y a la *Odisea*, compuestas por Homero, y que cuentan muchos de los mitos de la Grecia clásica.

La leyenda

Este tipo de narraciones comparten algunas características de los mitos, especialmente por tener sucesos paranormales o fantásticos provocados por entidades divinas, demoniacas o sobrehumanas. Pero a diferencia de los anteriores, las leyendas cuentan historias que suceden en tiempos históricos y lugares conocidos; sus temas son menos trascendentes o religiosos, volviéndose más comunes, como la invención de un objeto o técnica, el consumo de cierto alimento o las relaciones entre seres vivos. En las leyendas, los personajes son de tinte popular, que pudieron haber existido, aunque los eventos que viven pudieron nunca haber pasado, y que muchas veces interactúan con objetos, animales o seres fantásticos, pero que tienen acciones o emociones humanas (prosopopeya). Como ejemplo tenemos la leyenda de la Llorona; la historia del Popocatepetl e Iztaccíhuatl; o la Mulata de Córdoba.

La fábula

La fábula es un subgénero narrativo originado en la época clásica, específicamente en la cultura griega. Las historias que cuenta son de tinte fantástico y ficticio, pues muchas veces encontramos seres inanimados o animales actuando como seres humanos (prosopopeya), así como personajes históricos. Su objetivo principal es la enseñanza o promoción de ciertos valores, acciones o actitudes consideradas como correctas a partir de la moral propia de la época. Por lo general, para que la enseñanza quedara más clara, se resumía en una parte final denominada "moraleja". Los autores más conocidos que practicaban este subgénero son Esopo, Tomás de Iriarte, Félix María Samaniego y Jean de La Fontaine.

Dramático

Es el que se concibe para ser representado a través de una obra de teatro y se presenta a través de un diálogo. Por lo tanto, es uno de los grandes géneros de la literatura y se inicia en Grecia a través de los festivales que se realizaban en honor al Dios Dionicio. Por ese motivo se efectuaban dos fiestas al año: las tragedias y las comedias. Ver representadas sus tragedias significaba, para el pueblo griego una gran catarsis existencial. Las representaciones duraban todo el día y durante días. El teatro era semicircular. El estado les daba de comer y si no tenían dinero, la entrada era pagada por los ciudadanos con posibilidades económicas.

Ahora bien, el teatro se ha ido modificando a través del tiempo. Por consiguiente, actualmente se utilizan elementos como el guion, los personajes, acotaciones, (gesticulaciones de cara y cuerpo) parlamentos, (diálogos en la obra de teatro) vestuario, escenografía, espectador, escenario, (lugar y época dónde ocurre la obra de teatro) maquillaje, sonido, iluminación, director, dramaturgo, etc.

Subgéneros dramáticos

Subgéneros dramáticos son los que se originan posteriormente a la fundación del teatro. Asimismo, desde el origen se promulgó:

- La tragedia: Obras que tienen un destino predestinado fatídico, mueren o son asesinados los personajes.
- La comedia: Narrativa con un final feliz, la obra hace reír por las cosas chuscas que representa.
- La tragicomedia: Es la combinación de la tragedia y la comedia.
- La ópera: Trata como un género de música teatral en el que una acción escénica se armoniza, se canta y tiene acompañamiento de una orquesta.

Lírico

Otro de los grandes géneros fue el de los poemas llamado género lírico que trata cuándo el poeta expresa sus sentimientos más íntimos a través de los poemas. Se sugiere que el poema de Gilgamesh ha sido uno de los primeros poemas escritos y el Poema épico de la *Ilíada* y la *Odisea*.

Ahora bien, los elementos de la poesía son las figuras retóricas que son expresiones que dan belleza a la expresión y se clasifican en:

- Metáfora: Se cambia el sentido denotativo por sentido connotativo.
- Comparación: Establece una semejanza entre algo real e imaginario.
- Hipérbole: Consiste en la exageración para dar mayor énfasis a la expresión. Es una exageración desmedida.
- Prosopopeya: Atribución de cualidades o de acciones de seres animados a seres inanimados o abstractos.
- Aliteración: Consiste en repetición de un mismo sonido o varios en una misma palabra.
- Pleonasma: Consiste en la repetición de frases o expresiones para dar mayor énfasis a la expresión. etc.

El poema

Está conformado por versos, que son la unidad de palabras que integran un renglón. Las estrofas son el conjunto de versos pueden ser tres o cuatro versos. Si es un soneto son cuatro versos y así sucesivamente.

La poesía es una forma del discurso que se organiza en función del ritmo. La métrica de un poema implica rasgos que construyen el ritmo. El verso con su número de sílabas y su peculiar distribución de acentos, la estrofa, que viene determinada por la cantidad y la alternancia de versos que la integran, y las diferentes agrupaciones estróficas que hacen a un poema son lo que conforma la métrica de un poema.

Subgéneros líricos

- Oda: Se considera como una composición poética del género lírico, dividida en estrofas iguales, cuyo tono es la alabanza.
- Elegía: Relacionado con la tristeza, el lamento y el dolor.
- Sátira: Discurso o composición literaria en prosa o verso en el que se critican las costumbres o vicios de alguien con el afán de burlarse o de moralizar.
- Himno: Composición solemne, poética o musical, en alabanza de personajes, cosas o sucesos extraordinarios.

7.8 Obtención e interpretación de datos

La investigación y el trabajo académico

La investigación es una herramienta clave dentro del trabajo académico, ya que permite a los estudiantes explorar, analizar y comprender temas de manera profunda y fundamentada. A través de ella, se desarrollan habilidades como la búsqueda de información confiable, el pensamiento crítico y la capacidad de argumentar con evidencia. Además, el trabajo académico se refiere a la elaboración de textos como informes, ensayos, proyectos o exposiciones, en los que se espera que el estudiante no solo repita información, sino que la organice, interprete y exprese con claridad.

Etapas de la investigación

El proceso de investigación tiene estrecha interrelación con la lectura, la escritura y la revisión. Existen diversas etapas las cuales son:

- Selección o asignación de un tema. El estudiante desde un principio debe manejar una perspectiva del tema que va a investigar. Para esta labor puede dar respuesta a preguntas como las siguientes:
 - ¿Qué sabe del tema al momento de la asignación o elección?
 - ¿Cómo se relaciona con otros temas?
 - ¿En qué fuentes se puede consultar?
- Búsqueda de información. En el primer acercamiento a la bibliografía sobre el tema se pone en práctica la lectura exploratoria. Se indagan datos generales de los documentos, se formulan hipótesis sobre los títulos encontrados y se leen textos preliminares y breves, antes de acercarnos plenamente al contenido.
- El plan de trabajo. Es una herramienta fundamental que sirve para guiar y organizar la investigación, da una visión global del trabajo y orienta el orden en que debe cumplirse cada etapa. Esta planeación se elabora después de la búsqueda de la información preliminar. Sus partes son: delimitación del tema, justificación, objetivos, marco referencial, hipótesis, esquema inicial, agenda de trabajo y bibliografía.
- Acopio de la información. El momento de acopio de la información constituye, en el proceso general de la investigación, la parte fundamental de interrelación de las habilidades de lectura y escritura. El alumno pone en práctica la lectura analítica para conocer de manera profunda el contenido de la información y así sustraer lo más relevante para la investigación. En esta fase o etapa se elaboran las fichas de trabajo. En ellas se plasma la información recabada y constituye un trabajo de escritura en sí mismo y de preescritura para el texto final.
- Interpretación de la información. Se requiere la revisión de cada capítulo, tema y subtema. La relectura que se llevará a cabo sobre toda la información recabada permitirá ir construyendo el contenido fundamental del tema que se va a exponer por escrito.
- Redacción del escrito. Se divide en textualización y revisión. La textualización consiste en empezar a escribir el texto. En esta parte del proceso, el alumno debe resolver cuestiones para la escritura de su trabajo sin perder de vista a su receptor y el propósito del texto. En la revisión se observa si la coherencia se sostiene, si el texto está cohesionado, si se respetan las normas de ortografía, si el léxico es adecuado.

- **Presentación del trabajo.** En esta se debe incluir la versión final del trabajo de investigación. Por lo tanto, se debe tomar en cuenta la portada, el índice, la introducción, el cuerpo del trabajo, la conclusión y la bibliografía.

Técnicas de recopilación de información

Las técnicas de recopilación de información son herramientas que nos permiten obtener datos para investigar, conocer una situación o resolver una duda. Se utilizan en trabajos escolares, investigaciones académicas, entrevistas, reportajes y más. A continuación, se presentan las principales técnicas:

- **Observación.** Consiste en mirar detenidamente una situación, persona o fenómeno para describir lo que ocurre. Puede ser, directa: el observador está presente o indirecta: se usan registros como videos o fotografías.
- **Entrevista.** Es un diálogo con una persona para obtener información específica. Puede ser estructurada: con preguntas definidas de antemano, semiestructurada: combina preguntas fijas y abiertas o libre: la conversación fluye sin guion fijo.
- **Encuesta o cuestionario.** Es un conjunto de preguntas (cerradas o abiertas) que se aplica a varias personas para conocer opiniones, comportamientos o datos, puede aplicarse en papel o de forma digital.
- **Revisión documental o de fuentes.** Implica consultar libros, revistas, artículos, bases de datos, páginas web confiables, entre otros, para obtener información ya registrada.
- **Grupos focales.** Son discusiones en grupo moderadas para explorar temas específicos y obtener diferentes perspectivas del tema tratado.

Método cuantitativo y cualitativo

El método de investigación cualitativo se centra en el “por qué” y básicamente se enfoca en recopilar datos que no son numéricos. Sus características son: la observación, es subjetiva, se infieren los datos, orientada al proceso y no generalizada.

El método de investigación cuantitativo es aquel que permite examinar los datos de manera numérica, especialmente en el campo de la Estadística. Sus características son: es objetiva, confirmatoria, datos sólidos y repetibles, generalizable.

Tipos de investigación según su propósito o alcance.

El alcance de una investigación se refiere a la profundidad o el nivel de conocimiento que esperamos obtener sobre un tema. Existen cuatro tipos principales:

- **Investigación Exploratoria.** Su objetivo es examinar un tema o problema poco estudiado o del que se tiene poca información. Sirve para familiarizarse con él, identificar conceptos clave, encontrar ideas preliminares y establecer el terreno para futuras investigaciones más profundas.
- **Investigación Descriptiva.** Busca describir características de un fenómeno, una población, una situación o un evento. Responde a las preguntas: "¿Qué es?", "¿Cómo es?", "¿Dónde está?", "¿Cuándo ocurre?". No busca el "porqué", solo la descripción detallada.
- **Investigación Correlacional.** Busca establecer la relación o asociación entre dos o más variables (cosas que pueden cambiar o variar). Responde a la pregunta: "¿Cómo se relacionan X y Y?". Es importante recordar que una correlación no significa causa y efecto.

- Investigación Explicativa. Busca explicar las causas de los fenómenos, es decir, responder a la pregunta: "¿Por qué ocurre X?" o "¿Qué causa Y?". Va más allá de la descripción o la correlación para encontrar las razones y los motivos.

Citas textuales y notas al pie de página

Cita textual

La cita textual se refiere a la extracción de fragmentos de una fuente externa. Se sugiere restringir su uso a situaciones particulares, por ejemplo, la inclusión de una definición exacta, datos numéricos que no se puedan aproximar, una idea memorable de algún autor o ideas precisas que luego se vayan a analizar o contrastar. Para este tipo de cita es necesario incluir el apellido del autor, el año de la publicación y la página de la que se retoma la información. Su formato varía de acuerdo con el énfasis de la cita. Hay dos formas de realizar una cita dependiendo de lo que se quiera enfatizar con ella. Por un lado, encontramos la citación narrativa, en la que se destaca el pensamiento o la posición específica de un autor. Por otro lado, en las citas parentéticas (o entre paréntesis) se hace referencia a una idea en la que el autor tiene un papel secundario.

A la luz de lo dicho, en la cita narrativa el autor se incluye en la redacción del párrafo, la fecha se pone entre paréntesis, se hace énfasis en el autor, implica el uso de frases de citación. Ejemplo:

Quintero (2020) plantea que...

Por otra parte, en la cita parentética se menciona la idea y los datos de autor y fecha aparecen entre paréntesis. Asimismo, se hace énfasis en el texto y no implica el uso de frases de citación. Ejemplo:

(Quintero, 2020)

Sumado a lo anterior, en los tipos de citas, además del énfasis, podemos encontrar el mecanismo que se usa para incluir la información de las otras fuentes. En ese sentido, las citas pueden ser textuales o directas, cuando se retoma la información tal como la han expresado los otros autores, y parafraseadas, cuando se elabora con las propias palabras, pero manteniendo su sentido original.

Finalmente, cuando la cita textual tiene menos de 40 palabras se integra en el párrafo y se pone entre comillas, sin cursiva. Se escribe punto al finalizar la oración que incluye la cita.

Nota al pie de página

Una nota al pie es una nota breve que proporciona información adicional o complementaria al texto. Debe contener solo una idea y evitar información excesivamente compleja, irrelevante, poco esencial o que pueda distraer al lector. Se deben numerar las notas al pie con números arábigos en superíndice. Pueden aparecer al interior del texto, en el pie de página, o en un apartado específico después de las referencias.

Bibliografía sugerida

- Baez Pinal, G. E. (2005). Diccionario básico de lingüística. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Barajas Sánchez, B. y Huitrón Torres, R. (2018). Prontuario del estudiante. herramientas básicas para desarrollar la escritura.
<https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/ProntuarioEstudiante.pdf>
- Bal, M. (2006). Teoría de la narrativa. (6° ed.) Cátedra.
- Berlo, D. (2014) El proceso de la comunicación. El Ateneo.
- Campbell, J. (1959). El héroe de las mil caras. Psicoanálisis del mito. (Trad. del inglés de Luisa Josefina Hernández) Fondo de Cultura Económica.
- Clases de lengua (2020). El teatro: género, representación. Tragedia, rama, comedia.
<https://www.claseslengua.com/2020/06/el-teatro.html>
- El Rincón de la Rodríguez. (2023). Descubre los 12 elementos esenciales del teatro: análisis.
<https://elrincondelarodriguez.es/cuales-son-los-12-elementos-del-teatro/>
- Escandell Vidal, M. V. (2014). La comunicación. Lengua, cognición y sociedad. Akal.
- Gómez Chagoya, M., Textos argumentativos. Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
<https://es.scribd.com/document/405804025/Textos-Argumentativos>
- Gonzalos (2021) Los subgéneros literarios y sus características. Tendencias Media
<https://espaciolibros.com/los-subgeneros-literarios/>
- Gracida Juárez, M.Y. y Martínez Montes, G.T. (Coord.). (2007). El quehacer de la escritura. Propuesta didáctica para la enseñanza de la redacción en el ámbito universitario. Universidad Nacional Autónoma de México.
https://portalacademico.cch.unam.mx/materiales/libros/pdfs/librocch_quehacerescritura.pdf
- Morales, A. (s.f.). Figuras literarias.
<https://www.significados.com/figuras-literarias/>
- Narváez, M. (s.f.) Método de investigación cualitativo: Qué es y cómo usarlo. QuestionPro.
<https://www.questionpro.com/blog/es/metodo-de-investigacion-cualitativo/>
- Real Academia Española. (2010). Manual de la nueva gramática de la lengua española. Espasa.
- Mendoza, D. (2024). Elementos básicos del teatro. Studocu.
<https://www.studocu.com/es-mx/document/escuela-normal-rural-j-guadalupe-aguilera/de-lo-humano-a-lo-comunitario/elementos-basicos-del-teatro/94614919>
- Mendoza, O. (2016). "Subjetividad y objetividad". Diccionario iberoamericano de filosofía de la educación.
<https://www.fondodeculturaeconomica.com/dife/definicion.aspx?l=S&id=21>

Propp, V. (2018). Morfología del cuento. Akal.

<https://archive.org/details/morfologia-del-cuento-propp-vladimir/mode/2up>

Sampieri, R. (2003). Metodología de la investigación. M-Graw-Hill.

https://apiperiodico.jalisco.gob.mx/api/sites/periodicooficial.jalisco.gob.mx/files/metodologia_de_la_investigacion_-_roberto_hernandez_sampieri.pdf

Sánchez-Rodríguez, M. y Yépez-Cano, M. (2015). Taller de lectura y redacción. Secretaría de Educación Pública.

https://0201.nccdn.net/1_2/000/000/09b/a7d/Taller-de-Lectura-y-Redaccion-I.pdf

Saniz Balderrama, L. (2008). El esquema actancial explicado. Punto Cero.

<https://www.redalyc.org/pdf/4218/421839608011.pdf>

Soy Literatura (2020). Géneros y subgéneros literarios de la literatura universal y moderna.

<https://soyliterauta.com/generos-literarios/>

Suárez, E. (2023) Diferencia entre investigación cualitativa y cuantitativa. Experto Universitario.

<https://expertouniversitario.es/blog/diferencia-entre-investigacion-cualitativa-y-cuantitativa/>

Sule Fernández, T. (Coord.). (2010). Conocimientos fundamentales de español. Universidad Nacional Autónoma de México.

<https://es.scribd.com/document/451071639/UNAM-Enciclopedia-de-Conocimientos-Fundamentales-Tomo-I-pdf>

Universidad Autónoma de México. (s.f.) Figuras Retóricas. Ejemplos.

<https://cursoparalaunam.com/metafora-y-otras-figuras-retorica> Vidal, L. (2020). Lenguaje y Comunicación I y II. Ed. Asterión.

Wayra. (2019). El teatro griego: origen y desarrollo. Educa.

<https://www.youtube.com/watch?v=hx640mxyfRM>

8. Lengua adicional al español – Inglés

8.1 La comunicación y las relaciones interpersonales

Conocer y preguntar información personal y de los demás

En inglés, una habilidad básica de comunicación es poder dar y pedir información personal. Esto incluye datos como el nombre, la edad, el lugar de origen, la ocupación, o los gustos e intereses, usando preguntas simples.

Preguntas “Wh”

Se les conoce como Wh preguntas porque comienzan con esas letras (excepto how).

Son utilizadas para preguntar toda la información necesaria respecto a algún evento, cosa o persona y son las siguientes:

- What Utilizada para preguntar: “Qué”
- When Pedir información respecto al tiempo “Cuándo”
- Where Pedir información respecto al lugar “Dónde”
- Who Pedir información respecto a la(s) persona(s) “Quién(es)”
- Why Pedir información con respecto a la razón “Por qué”
- Which Pedir información con respecto a la elección “Cuál”
- How Pedir información respecto al modo “Cómo”

Habilidades, pedir permisos, dar recomendaciones

Saber expresar lo que somos capaces de hacer, pedir permiso de manera respetuosa y dar recomendaciones útiles a otras personas forman parte de nuestras interacciones cotidianas, tanto en el ámbito escolar como en la vida social y familiar. Para lograrlo, el idioma inglés utiliza una herramienta clave: los verbos modales (modal verbs), que nos permiten comunicar estas ideas de forma clara, sencilla y con el tono adecuado.

Verbos auxiliares de modo para deberes u obligaciones

Should y Must

Should + verb en forma simple para expresar consejo:

- You should study more Deberías de estudiar más

Must + verb en forma simple para expresar obligación:

- You must obey the law Tienes que obedecer la ley

Nota: Must expresa un fuerte compromiso, deber u obligación a diferencia de should que sirve para dar recomendación, consejo o sugerencia.

Verbos auxiliares de modo para expresar habilidad o pedir permiso

Can, Could, May y Might

can/could/may/might + verb en forma simple para expresar habilidad:

- I can work Yo puedo trabajar
- I could work Yo podría trabajar
- I may work Yo podría trabajar
- I might work Yo podría trabajar

Nota: May y might aunque expresan lo mismo, son expresiones con un grado mayor de cortesía

Verbos auxiliares de modo para expresar situaciones hipotéticas

Would

Would + verb en forma simple para expresar una situación imaginaria:

- I would work Yo trabajaría
- She would buy Ella compraría
- We would live in other place Nosotros viviríamos en otro lugar

8.2 La estructura y los elementos lingüísticos de cada tiempo verbal

Tiempos verbales y su estructura

Los tiempos verbales en inglés indican cuándo ocurre una acción: en el pasado, en el presente o en el futuro. Usarlos correctamente es esencial para comunicarse con claridad, ya que ayudan a organizar ideas en el tiempo.

Presente simple

Se utiliza para hablar sobre acciones o rutinas diarias y la frecuencia con la que las realizamos.

- I always go to the park on Friday Siempre voy al parque los viernes
- My father works every day Mi padre trabaja todos los días
- I am a teacher Soy maestro

Presente continuo

Se utiliza para describir acciones que están ocurriendo en el momento exacto en que hablamos.

- I am studying for my exam right now Estoy estudiando para mi examen ahora mismo
- She is watching TV Ella está viendo televisión
- They are playing soccer outside Ellos están jugando fútbol afuera

Pasado simple

Se utiliza para expresar eventos en el pasado.

- I visited my mother yesterday Visité a mi madre ayer
- Sam saw a cat in the park Sam vio un gato en el parque
- We ate fish yesterday Comimos pescado ayer

Pasado continuo

Son acciones en progreso que suceden en el pasado.

- I was jumping the rope yesterday Estuve saltando la cuerda ayer
- We were talking on the phone last night Estuvimos hablando por teléfono anoche
- Tom was doing his homework yesterday Tom estaba haciendo su tarea ayer

Futuro “will” y futuro “going to”

Se utilizan para expresar situaciones o acciones futuras.

will + verbo en forma simple para expresar una acción futura cuya decisión ha sido tomada repentinamente, y para expresar predicciones basadas en información previa.

- It is cold, I will close the window Hace frío, cerraré la ventana
- It is too much, I will not finish Es mucho, creo que no terminaré

be + going to + verbo en forma simple principalmente para expresar acciones futuras basadas en planes hechos y en rutinas u horarios establecidos.

- I am going to travel to Paris in two weeks and I am going to see the Eiffel tower.
Voy a viajar a Paris en dos semanas y voy a ver la torre Eiffel.

Primer condicional

Se utiliza para expresar causas y consecuencias.

will + verbo en forma simple para expresar una consecuencia futura basada en una causa presente. En las causas se comienza la frase con “if”

- If I don't care my health, I will be sick Si no cuido mi salud, me enfermaré

El orden

El orden puede ser invertido sin que el significado de la oración resulte afectado.

- I will be sick If I don't care my health Me enfermaré si no cuido mi salud

8.3 Comprensión de textos

Información general y específica de un texto

Quando se realiza una lectura, es fundamental distinguir entre lo más importante y los detalles. Esto se refiere a la capacidad de identificar la información general y la información específica en un texto. Esta capacidad no es solo un truco de lectura; es la base para realmente comprender lo que el autor quiere comunicar y para usar esa información de manera efectiva.

Estrategias de lectura de comprensión

Leer en un idioma que no es el materno requiere un enfoque un poco diferente. No se trata solo de traducir palabra por palabra, sino de entender el mensaje general y los detalles importantes. Algunas estrategias clave para la comprensión de textos, son las siguientes:

- Skimming (lectura general). Leer rápidamente el texto para entender de qué trata, sin detenerse en cada palabra. Útil para captar la idea principal.
- Scanning (búsqueda específica). Buscar información puntual como fechas, nombres, lugares o cifras. Ideal para responder preguntas concretas.
- Identificar palabras clave. Subrayar palabras importantes (nombres, verbos, conectores) que ayuden a seguir el sentido del texto. Ayuda en la comprensión global.
- Usar el contexto. Si no se conoce una palabra, se recomienda intentar adivinar su significado por el resto de la oración.
- Relacionar ideas. Identificar la idea principal y las ideas secundarias. Observar cómo se conectan usando palabras como because, but, so, however, etc. Esto mejora la interpretación y el análisis.
- Localizar los cognados verdaderos (son las palabras parecidas al español). Ayudan a comprender de manera general el texto.
- Las palabras conocidas, es decir, las que se reconocen en inglés y su significado serán otro apoyo para comprender el texto.

Nota: No es necesario comprender todas y cada una de las palabras para lograr entender el texto.

Bibliografía sugerida

Michael McCarthy, Jeann McCarten. (2004). Touchstone 1. Cambridge University Press.

https://uapa.cuaieed.unam.mx/avi/ing_1/U_4/ing1_u4_t1/index.html

Michael McCarthy, Jeann McCarten. (2014). Touchstone 2. Second edition. Cambridge University Press.

https://uapa.cuaieed.unam.mx/avi/ing_2/U_3/ing2_u3_t2/index.html

Michael McCarthy. (2012). Touchstone 3. Cambridge University Press.

<https://www.slideshare.net/danyboytiburon/student-book-touchstone-3-62753501>

Ambiente virtual de idiomas. Simple Past. Universidad Autónoma de México.

https://uapa.cuaieed.unam.mx/avi/ing_2/U_2/ing2_u2_t1/index.html

Ambiente virtual de idiomas. Past continuos. Universidad Autónoma de México.

https://uapa.cuaieed.unam.mx/avi/ing_3/U_2/ing3_u2_t1/index.html

Texto: The rabbit and the turtle

<http://www.web-esl.com/advreadings/rabbitturtle.htm>

Ejercicios de comprensión lectora

<https://www.grammarbank.com/lectura-en-ingles.html>

9. Ciencias Sociales

9.1 Ciencias Sociales

Definición general

Las ciencias sociales son un conjunto de disciplinas que estudian al ser humano en su dimensión colectiva, es decir, como ser social. Su objeto de estudio son las relaciones, estructuras, procesos y fenómenos que surgen de la vida en sociedad. Estas ciencias se desarrollaron a partir de los siglos XVII y XVIII, cuando surgió la necesidad de explicar los problemas sociales mediante el uso de la razón y el método científico, dejando de lado explicaciones de tipo teológico o sobrenatural.

Las ciencias sociales se sustentan en diversos marcos teóricos que permiten interpretar la realidad desde distintos enfoques. Entre ellos destacan el positivismo, que propone el estudio de los hechos sociales con base en la observación y la aplicación del método científico; el materialismo histórico, que analiza los procesos sociales e históricos a partir de las relaciones económicas y los conflictos de clase; y el estructural funcionalismo, que explica la sociedad como un sistema compuesto por partes interrelacionadas que cumplen funciones específicas para mantener el orden social.

La metodología de las ciencias sociales combina enfoques cuantitativos, como encuestas y análisis estadísticos, y cualitativos, como entrevistas y observación participante. A través de estas herramientas, las ciencias sociales analizan fenómenos como la desigualdad, el poder, la cultura, el conflicto y las instituciones. Su finalidad no es solo describir la realidad, sino también comprenderla, explicarla críticamente y proponer transformaciones.

Características específicas

Las ciencias sociales se distinguen de las ciencias experimentales y de las humanidades por su objeto de estudio, sus métodos y su finalidad. A diferencia de las ciencias experimentales, que estudian fenómenos naturales a partir del método hipotético-deductivo y buscan leyes universales y reproducibles, las ciencias sociales analizan fenómenos humanos en contextos específicos y utilizan métodos que valoran la interpretación y la comprensión de los significados sociales.

Por otra parte, en contraste con las humanidades, que se centran en la expresión subjetiva, simbólica y reflexiva del ser humano (como la literatura, el arte o la filosofía), las ciencias sociales abordan estructuras colectivas, relaciones de poder y procesos históricos, aplicando métodos sistemáticos que combinan lo empírico con lo teórico. Mientras que las humanidades privilegian la introspección y el análisis ético o estético, las ciencias sociales buscan identificar causas sociales, explicar dinámicas colectivas y aportar al conocimiento científico sobre la sociedad.

Disciplinas que conforman las ciencias sociales

El campo de las ciencias sociales está conformado por diversas disciplinas que abordan distintos aspectos de la vida en sociedad:

Disciplina	Objeto de estudio
Economía	Analiza la producción, distribución y consumo de bienes y servicios, así como las relaciones económicas entre individuos, grupos y Estados.
Ciencia Política	Se ocupa del poder, el gobierno, el Estado y la participación ciudadana. Estudia las instituciones políticas, los sistemas de gobierno y las relaciones de poder.
Sociología	Examina las relaciones sociales, las instituciones, los grupos y los fenómenos que configuran la estructura social.
Derecho	Estudia el sistema normativo que regula la convivencia social. Analiza las leyes, los derechos, las obligaciones y la administración de justicia.
Antropología	Analiza las culturas humanas desde una perspectiva biocultural. Estudia las creencias, costumbres, lenguas, sistemas de parentesco y formas de vida.
Comunicación	Examina los procesos de transmisión de mensajes y significados en los distintos medios. Estudia la interacción social a través del lenguaje, los discursos y la tecnología.
Psicología Social	Analiza cómo los individuos piensan, sienten y actúan en función de los grupos y el entorno social.
Geografía Humana	Estudia la relación entre la sociedad y el espacio geográfico. Analiza fenómenos como la urbanización, la migración, el desarrollo regional y la distribución de la población.
Historia	Estudia los procesos sociales en el tiempo. Analiza hechos, estructuras y transformaciones históricas que permiten comprender el presente.

Cada una de estas disciplinas aporta herramientas teóricas y metodológicas para analizar distintos aspectos de la realidad social, lo que permite una comprensión más completa y profunda del mundo contemporáneo.

9.2 Formación cívica

Estado y gobierno

El Estado es una forma de organización política que ejerce soberanía sobre una población en un territorio determinado. Está compuesto por tres elementos: población, territorio y poder. Su función principal es garantizar el orden, la seguridad, la justicia y el bienestar social mediante la creación de leyes e instituciones. Para cumplir estos fines, el Estado actúa a través de distintas funciones: legislativa (crear leyes), ejecutiva (aplicar leyes y gobernar) y judicial (impartir justicia). A diferencia del Estado, el gobierno es la administración temporal del poder político, encargada de dirigir las políticas públicas y coordinar las instituciones. El gobierno puede cambiar sin que desaparezca el Estado.

Democracia en México

La democracia es una forma de gobierno donde el poder reside en el pueblo. En México, la democracia se manifiesta a través de distintas modalidades. La democracia representativa es aquella en la que los ciudadanos eligen a sus representantes mediante el voto, como sucede con el presidente, senadores, diputaciones y autoridades locales. La democracia directa permite a la población tomar decisiones sin intermediarios, por ejemplo, a través del plebiscito

o el referéndum. La democracia participativa amplía la intervención ciudadana en asuntos públicos mediante consultas, mecanismos de transparencia, presupuestos participativos y otras formas de involucramiento social.

El marco jurídico de la democracia en México está establecido en los artículos 39, 40 y 41 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos. El artículo 39 reconoce que la soberanía nacional reside esencial y originariamente en el pueblo; el 40 establece que México es una república representativa, democrática, laica y federal; y el 41 regula la organización de los partidos políticos y los procesos electorales.

La división de poderes es otro principio fundamental del Estado mexicano y de toda democracia moderna. Está estructurada en tres poderes: el Poder Legislativo, responsable de crear leyes, compuesto por la Cámara de Diputados y la Cámara de Senadores; el Poder Ejecutivo, que aplica las leyes y está encabezado por el presidente de la república; el Poder Judicial, encargado de interpretar las leyes y garantizar la justicia, a través de tribunales y la Suprema Corte de Justicia.

Instituciones sociales en México

Las instituciones sociales son estructuras que regulan la conducta de los individuos en la vida colectiva. En México, estas instituciones cumplen funciones políticas, jurídicas, educativas, culturales y comunitarias.

Las instituciones políticas incluyen al gobierno, los partidos políticos, los organismos electorales y los órganos autónomos (como el INE), que canalizan la participación ciudadana y garantizan la gobernabilidad. Las instituciones jurídicas, como el Congreso, el Poder Judicial, la Fiscalía o la Comisión Nacional de los Derechos Humanos, se encargan de establecer y hacer cumplir las normas legales.

La familia es una institución básica en la formación de valores, afectos y normas de convivencia. La escuela cumple un papel clave en la transmisión de conocimientos y en la educación cívica. También existen otras instituciones sociales, como las comunidades deportivas, recreativas o artísticas, que fomentan la participación, el sentido de pertenencia y la integración comunitaria.

Principios civiles

La ciudadanía es la condición legal y política que permite a una persona ejercer derechos y asumir responsabilidades dentro de un Estado. Implica el derecho al voto, a la libre expresión, a la participación política y a gozar de protección legal, así como la obligación de respetar las leyes, pagar impuestos, cuidar los bienes comunes y participar en la vida democrática. Los derechos humanos son prerrogativas inherentes a todas las personas por el solo hecho de ser humanas. Son universales, inalienables y progresivos, y están protegidos tanto por la Constitución mexicana como por tratados internacionales. Junto con los derechos, existen obligaciones civiles, que garantizan la convivencia social. Entre ellas están: respetar los derechos ajenos, contribuir al sostenimiento del Estado, respetar el entorno natural y participar en los asuntos públicos.

Finalmente, los valores cívicos son principios éticos que sustentan una sociedad democrática y justa. Entre los más importantes están: libertad, como la capacidad de actuar sin coacción; igualdad y equidad, como condiciones de justicia social; justicia, entendida como dar a cada quien lo que le corresponde; respeto, tolerancia y solidaridad, que permiten la convivencia en la diversidad, responsabilidad, como el cumplimiento de deberes.

9.3 Modelos teóricos

Desde el siglo XIX en las ciencias sociales surgieron diferentes modelos teóricos que han buscado explicar cómo funciona la sociedad, cuál es su dinámica y los principios metodológicos para estudiarla. Tres modelos fundamentales son el positivismo, el materialismo histórico y el estructural-funcionalismo.

Positivismo

El positivismo es una corriente surgida con Auguste Comte, quien propuso construir las ciencias sociales bajo los mismos principios del método científico, utilizando la observación, la recolección de datos empíricos y la inducción para descubrir leyes sociales universales. Comte definió etapas en el desarrollo del conocimiento humano (teológico, metafísico, positivo) y colocó a la sociología como la ciencia suprema capaz de ordenar la sociedad con base en datos. Los conceptos esenciales del positivismo incluyen: progreso —la sociedad avanza mediante la ciencia—; el hecho social o *positum* —lo observable y medible—; la objetividad, es decir, la neutralidad del investigador; y la sociedad como un conjunto de fenómenos susceptibles de ser clasificados y explicados científicamente. Metodológicamente, el positivismo privilegia pruebas documentales y cuantitativas, menosprecia las interpretaciones subjetivas y busca reproducibilidad en los resultados.

Materialismo histórico

El materialismo histórico, desarrollado por Karl Marx y Friedrich Engels, plantea que el motor del cambio social no está en las ideas, sino en la realidad material y económica: las relaciones de producción, las fuerzas productivas y las clases sociales. Entre sus conceptos centrales están la dialéctica (contradicciones que generan cambio), la lucha de clases, la conciencia de clase, y los modos de producción (como modos esclavista, feudal, capitalista) que determinan la estructura social. En términos metodológicos, se basa en un enfoque crítico y militante que interpreta los fenómenos sociales a partir de su rol en las relaciones productivas, apunta a descubrir leyes del cambio social y procura explicar los conflictos desde el análisis material.

Estructural-funcionalismo

El estructural-funcionalismo se ubica en una tradición sociológica encabezada por Émile Durkheim y desarrollada por Talcott Parsons, que concibe la sociedad como un sistema compuesto por elementos interrelacionados que cumplen funciones esenciales para mantener el equilibrio y la cohesión social. Entre sus conceptos clave figuran: función social (propósito o contribución de cada parte al sistema), sistema, equilibrio, adaptación y la noción de anomia social —cuando la sociedad falla en regular normas, generando desintegración individual o colectiva. Metodológicamente, este enfoque emplea investigaciones empíricas, observación de campo y estudios comparativos enfocándose en cómo las instituciones y normas sostienen la estabilidad del conjunto social.

9.4 Formación de la nación

México Prehispánico

Antes de la llegada de los europeos, el actual territorio mexicano estaba dividido en tres grandes superáreas culturales: Mesoamérica, Aridoamérica y Oasisamérica. Mesoamérica fue la región más desarrollada culturalmente, con civilizaciones como los olmecas, considerados la cultura madre; los mayas, destacados por sus conocimientos astronómicos y escritura; los toltecas, con influencia en el altiplano; los mixtecas, con un alto grado de desarrollo artístico, y los mexicas o aztecas, que dominaron la región central hacia el siglo XV. Estas culturas compartían rasgos como la agricultura intensiva, la construcción de ciudades-estado, la religión politeísta y la utilización de calendarios complejos.

La Conquista

La conquista española comenzó con expediciones exploratorias desde Cuba, como las de Francisco Hernández de Córdoba y Juan de Grijalva, y culminó con la llegada de Hernán Cortés en 1519. Gracias a alianzas con pueblos indígenas y al uso de armas de fuego, caballos y enfermedades, Cortés logró la caída de Tenochtitlán en 1521, marcando el fin del Imperio Mexica. Las fuentes historiográficas más relevantes de este periodo incluyen las Cartas de relación de Cortés, las crónicas de Bernal Díaz del Castillo y textos indígenas como los Códices y las narraciones de Sahagún y otros frailes.

Virreinato de la Nueva España

El territorio conquistado fue organizado como el Virreinato de la Nueva España, con capital en la Ciudad de México. Su delimitación geográfica abarcaba gran parte de América del Norte, Centroamérica, el Caribe y Filipinas. La evangelización fue un proceso clave liderado por órdenes religiosas como franciscanos, dominicos y agustinos; más tarde, los jesuitas, expulsados en 1767 por la Corona española, tuvieron un papel destacado en la educación y la organización de pueblos indígenas. En el ámbito político, el virreinato fue administrado por instituciones burocráticas como el virrey, las audiencias y los cabildos. Las Reformas Borbónicas, implementadas en el siglo XVIII, buscaron centralizar el poder y aumentar los ingresos de la Corona. La sociedad estaba organizada en un sistema de castas, que jerarquizaba a las personas según su origen étnico. Las principales actividades económicas eran la minería, particularmente de plata; la agricultura, centrada en haciendas; y el comercio, tanto interno como con Europa y Asia (a través del galeón de Manila).

Independencia de México

La lucha por la independencia tuvo cuatro etapas. En la primera etapa, encabezada por Miguel Hidalgo y Costilla (1810–1811), se destacó el levantamiento del pueblo y la toma de ciudades como Guanajuato y Valladolid. En la segunda etapa, José María Morelos y Pavón (1811–1815) logró articular un proyecto político con ideas liberales y republicanas, como lo muestra el documento Sentimientos de la Nación. La tercera etapa (1815–1820) consistió en una guerra de guerrillas, en la que destacaron líderes como Vicente Guerrero.

Finalmente, en la cuarta etapa, se logró la consumación de la independencia en 1821 con la alianza entre el ejército insurgente y parte del ejército virreinal, encabezada por Agustín de Iturbide y Vicente Guerrero, lo cual se formalizó con el Plan de Iguala y la entrada triunfal del Ejército Trigarante a la Ciudad de México.

9.5 México independiente (1821–1855)

Proyectos de nación (1821–1855)

Tras la independencia, México enfrentó grandes retos para definir su sistema de gobierno. El primer intento fue el Primer Imperio Mexicano (1822–1823), encabezado por Agustín de Iturbide, quien se proclamó emperador. Su mandato fue breve debido al descontento de diversos sectores sociales y políticos, lo que llevó a su abdicación y al establecimiento de una república.

Durante las décadas siguientes, el país osciló entre dos grandes modelos: el federalismo, que promovía la autonomía de los estados, y el centralismo, que concentraba el poder en el gobierno central. Estas diferencias provocaron constantes conflictos políticos y reformas constitucionales. En este periodo también surgió la figura de Antonio López de Santa Anna, un caudillo que ocupó la presidencia en múltiples ocasiones y llegó a instaurar una dictadura personalista, favoreciendo el centralismo y reprimiendo la oposición.

Conflictos bélicos

La inestabilidad política interna se reflejó en diversos conflictos bélicos, tanto internos como externos. Entre los más notables destacan:

Expedición de Isidro Barradas. En 1829, el militar español Isidro Barradas intentó reconquistar México tras la independencia. Con un ejército enviado desde Cuba, Barradas desembarcó en la costa de Veracruz, pero fue derrotado por las fuerzas mexicanas lideradas por Antonio López de Santa Anna. Esta expedición marcó el último intento serio de España de recuperar el territorio mexicano.

República del Río Grande. Fue un intento fallido de secesión de los territorios del noreste de México, incluidos los actuales estados de Tamaulipas, Coahuila, Nuevo León y Texas. En 1836, un grupo de separatistas proclamaron la República del Río Grande, pero no lograron el reconocimiento ni la estabilidad política, y fueron derrotados por el ejército mexicano.

Independencia de Texas. En 1836, Texas se separó de México después de una serie de rebeliones y conflictos armados, culminando en la batalla de San Jacinto, donde las fuerzas texanas, lideradas por Sam Houston, derrotaron al ejército mexicano. Texas se declaró independiente y, en 1845, fue anexado a los Estados Unidos, lo que desencadenó la Guerra con México.

Primera Intervención Francesa. En 1838, Francia intervino militarmente en México debido a las quejas de los comerciantes franceses sobre los daños a sus propiedades en México. El conflicto se resolvió tras el pago de una indemnización de 600,000 pesos a Francia, este episodio de la historia es popularmente conocido como la "Guerra de los Pasteles".

Independencia de Yucatán. En 1841 Yucatán declaró su independencia de México debido a tensiones políticas y económicas con el gobierno central, pero después de varios conflictos y un intento fallido de unirse a la República de Centroamérica, la región volvió a incorporarse a México en 1848, tras una serie de negociaciones.

Intervención de los Estados Unidos de América

Abonando a las difíciles décadas que vivía la joven nación mexicana, entre 1846 y 1848 tuvo lugar la Intervención de los Estados Unidos, un conflicto armado derivado de la anexión de Texas a ese país en 1845. Esta acción provocó una disputa territorial con México, particularmente en torno al límite fronterizo entre ambos países: México reconocía el río Nueces, mientras que Estados Unidos reclamaba el río Bravo (o Río Grande) como frontera.

Tras el fracaso de las negociaciones diplomáticas, el presidente estadounidense James K. Polk, impulsado por la doctrina del Destino Manifiesto, ordenó el envío de tropas a la región en disputa, lo cual desencadenó enfrentamientos armados en 1846. La guerra se desarrolló en varios frentes, incluyendo la ocupación de California y Nuevo México, y culminó con la toma de la Ciudad de México por parte del ejército estadounidense.

El conflicto concluyó con la firma del Tratado de Guadalupe Hidalgo en 1848, mediante el cual México cedió más de la mitad de su territorio, incluyendo los actuales estados de California, Arizona, Nuevo México, Nevada, Utah y Texas, entre otros, a cambio de 15 millones de dólares y la promesa (frecuentemente incumplida) de que se respetarían los derechos de los mexicanos residentes en las tierras cedidas.

Las consecuencias de esta guerra fueron profundas: México sufrió un golpe devastador a su territorio, economía y soberanía, lo que generó una fuerte crisis política interna, debilitó aún más sus instituciones y acentuó la desconfianza hacia los Estados Unidos. El episodio también marcó un parteaguas en la definición del proyecto nacional mexicano, al tiempo que consolidaba la expansión territorial de su vecino del norte.

9.6 Proceso de Reforma Liberal (1855–1876)

Antecedentes de la guerra (1855–1858)

Tras la caída de la dictadura de Santa Anna en 1855, se instauró un gobierno liberal encabezado por Juan Álvarez y luego por Ignacio Comonfort, quienes impulsaron un ambicioso programa de reformas conocido como el Proyecto de Reforma Liberal. Entre sus principales logros se encuentra la promulgación de la Constitución de 1857, que consagró principios como las libertades de expresión, tránsito y trabajo, así como la abolición de fueros eclesiásticos y militares. Este texto legal representó una ruptura con el antiguo orden colonial y con los intereses de la Iglesia católica y sectores conservadores.

La oposición no tardó en reaccionar. En diciembre de 1857, el sector conservador promovió el Plan de Tacubaya, con el cual desconocieron la nueva Constitución y buscaron derrocar al gobierno de Comonfort. Este último, en un intento por evitar una guerra civil, inicialmente se unió a los sublevados, lo que provocó una crisis de legitimidad y abrió paso al conflicto armado.

Guerra de Reforma

El conflicto entre liberales y conservadores se consolidó en la llamada Guerra de Reforma (1858–1861), una guerra civil que enfrentó a dos proyectos antagónicos de nación: uno liberal, de corte republicano y laico; y otro conservador, defensor del orden tradicional, de la Iglesia y del centralismo. Los liberales, encabezados por Benito Juárez, establecieron su gobierno itinerante tras la huida de Ciudad de México, mientras los conservadores instalaron un gobierno paralelo.

Durante este periodo, Juárez asumió la presidencia y promulgó las Leyes de Reforma, entre ellas la nacionalización de los bienes del clero, la separación definitiva entre Iglesia y Estado, y la creación del registro civil. Estas leyes no solo marcaron un parteaguas en la historia jurídica de México, sino que consolidaron el carácter laico del Estado mexicano. A pesar de los avances, la guerra causó una profunda inestabilidad política, económica y social.

Segunda Intervención Francesa

Apenas terminada la Guerra de Reforma, México enfrentó una nueva amenaza: la Segunda Intervención Francesa. Entre sus causas se encuentran la suspensión del pago de la deuda externa decretada por Juárez en 1861, el interés del imperialismo francés por expandirse en América bajo el argumento de proteger los intereses europeos, y la firma de la Convención de Londres entre Francia, Inglaterra y España para intervenir en México.

Aunque inicialmente la intervención fue conjunta, Francia continuó sola con el proyecto de instaurar una monarquía católica en México. En este contexto, el archiduque Maximiliano de Habsburgo fue invitado a gobernar como emperador, respaldado por el ejército francés y sectores conservadores mexicanos. La ocupación militar incluyó batallas decisivas como la del 5 de mayo de 1862 en Puebla, que, aunque no detuvo la invasión, fortaleció el ánimo nacional.

Finalmente, la intervención fracasó debido al agotamiento financiero francés, el retiro de tropas ordenado por Napoleón III, y el triunfo militar de los liberales liderados por Juárez. En 1867, Maximiliano fue capturado y fusilado en Querétaro, lo que marcó el fin del imperio y el inicio de la República Restaurada. Esta etapa consolidó la soberanía nacional y reafirmó el modelo republicano, federal y laico como fundamento del Estado mexicano moderno.

República restaurada (1867-1876)

Después de la retirada del ejército francés y de la caída de Maximiliano de Habsburgo, en México se restaura la república bajo el gobierno de Benito Juárez y Sebastián Lerdo de Tejada sucesivamente. No obstante, cuando Lerdo

de Tejada busca reelegirse, Porfirio Díaz aprovecha para declararse en contra con el Plan de Tuxtepec y, contrario a lo sucedido con su Plan de la Noria, está vez consigue el apoyo militar necesario para derrocar al gobierno y ocupar el poder.

9.7 Porfiriato y Revolución (1876–1920)

Porfiriato

El Porfiriato fue un largo periodo que abarcó de 1876 a 1911, caracterizado por el control político ejercido por Porfirio Díaz, quien gobernó con breves interrupciones durante más de tres décadas. Aunque su lema era “Sufragio efectivo, no reelección”, Díaz modificó la Constitución para perpetuarse en el poder, dando lugar a un sistema autoritario sostenido por el centralismo, el clientelismo político y el militarismo.

En términos de política y ejército, Díaz consolidó un régimen de orden y control mediante la neutralización de opositores, el fortalecimiento del Ejército federal y la creación de una red de lealtades a través de jefes políticos. A la vez, estableció alianzas con científicos —grupo tecnocrático de corte positivista—, quienes promovieron una visión de modernización basada en el orden, el progreso y el autoritarismo.

La economía porfirista experimentó un crecimiento notable, impulsado por la inversión extranjera, la expansión ferroviaria y el desarrollo de sectores como la minería, el petróleo, el henequén y el textil. Sin embargo, este modelo se basó en la desigualdad social, el despojo de tierras comunales (a través de leyes como la de desamortización de terrenos baldíos) y la explotación laboral en haciendas, fábricas y plantaciones.

En lo social, coexistían dos realidades: una elite urbana modernizada y una mayoría rural empobrecida, sujeta a sistemas de peonaje por deudas. A nivel educativo, se impulsó una educación científica y laica, con influencia positivista, centrada en la disciplina y el trabajo, aunque con escasa cobertura en zonas rurales. En el ámbito cultural, se promovió una imagen de nación “moderna”, con expresiones arquitectónicas afrancesadas, academias de arte y avances científicos, pero sin integrar a las culturas indígenas ni a las clases populares.

Revolución Mexicana

La Revolución Mexicana fue un complejo proceso social, político y militar que se desarrolló entre 1910 y 1920 como reacción al régimen porfirista. Su primer momento fue la Revolución maderista, encabezada por Francisco I. Madero, quien en 1910 llamó a desconocer a Díaz tras unas elecciones fraudulentas. El Plan de San Luis, que incluía la promesa de restitución de tierras, sirvió de base para el levantamiento. La presión revolucionaria forzó la renuncia de Díaz en 1911.

No obstante, el gobierno de Madero fue breve e inestable. En 1913 se produjo la Decena Trágica, una insurrección militar en Ciudad de México que, con la traición del general Victoriano Huerta, culminó con el asesinato de Madero y del vicepresidente Pino Suárez. Huerta asumió el poder mediante un golpe de Estado, lo que provocó una nueva etapa revolucionaria.

La lucha contra Huerta derivó en una guerra de facciones, protagonizada por diversos líderes: Venustiano Carranza, líder del constitucionalismo, cuyo proyecto defendía la legalidad institucional. Emiliano Zapata, en el sur, con una propuesta agraria radical reflejada en el Plan de Ayala, centrado en la restitución de tierras. Francisco Villa, en el norte, líder militar con amplio respaldo popular, defensor de una revolución social y económica.

Las tensiones entre facciones escalaron después de la caída de Huerta en 1914. El conflicto armado se agravó con la Convención de Aguascalientes, que fracasó en unificar a las fuerzas revolucionarias. Finalmente, Carranza logró consolidar su poder en 1917, promulgando la Constitución de 1917, documento fundamental que recogió demandas sociales como la reforma agraria (art. 27), los derechos laborales (art. 123) y el control del Estado sobre la Iglesia.

Durante el gobierno de Carranza, las relaciones internacionales estuvieron marcadas por la Primera Guerra Mundial (1914–1918). México mantuvo una posición de neutralidad, pero se vio envuelto en tensiones diplomáticas, como el Telegrama Zimmermann, en el que Alemania propuso una alianza con México en caso de que EE.UU. entrara a la guerra, ofreciendo la recuperación de territorios perdidos. Aunque México no aceptó, este hecho incrementó la desconfianza de EE.UU. hacia el gobierno carrancista.

9.8 México Siglo XX

Reconstrucción Nacional: 1920–1934

Tras una década de conflicto armado, la prioridad nacional fue la reconstrucción institucional, económica y social. Este periodo estuvo marcado por tres fases principales:

Álvaro Obregón (1920–1924) impulsó la pacificación del país mediante amnistías a grupos rebeldes y acuerdos con caudillos regionales. Consolidó relaciones exteriores —como el Tratado de Bucareli (1923) con EE. UU.— y promovió la educación rural con apoyo de José Vasconcelos, entonces secretario de Educación. Aunque impulsó el reparto agrario, fue limitado.

Plutarco Elías Calles (1924–1928) fortaleció al Estado, consolidó instituciones económicas como el Banco de México (1925) y formalizó el Código Agrario. Su gobierno enfrentó un fuerte conflicto con la Iglesia, la Guerra Cristera (1926–1929), derivado de la aplicación estricta de los artículos constitucionales anticlericales.

El Maximato (1928–1934) fue un periodo de poder tras bambalinas ejercido por Calles, autoproclamado “Jefe Máximo de la Revolución”, quien controló a tres presidentes consecutivos (Portes Gil, Ortiz Rubio y Abelardo L. Rodríguez). Durante este periodo se fundó el Partido Nacional Revolucionario (PNR) en 1929, primer antecedente del PRI, como instrumento de control político y unidad posrevolucionaria.

Cardenismo

El gobierno de Lázaro Cárdenas del Río (1934–1940) representó una ruptura con el autoritarismo del Maximato y la consolidación del Estado postrevolucionario con un enfoque social.

En política, Cárdenas reorganizó el partido oficial como PRM (Partido de la Revolución Mexicana), estructurado por sectores (obreros, campesinos, popular y militar). Redujo el poder de los militares, descentralizó el poder presidencial y aplicó un populismo progresista.

En economía, el momento culminante fue la expropiación petrolera en 1938, mediante la cual el Estado recuperó el control sobre los recursos naturales frente a compañías extranjeras. También impulsó la reforma agraria más significativa del siglo, con entrega de ejidos a comunidades campesinas.

En el ámbito educativo, social y cultural, se promovió una educación socialista, centrada en el trabajo y el colectivismo; se amplió la cobertura rural y se integraron contenidos que buscaban formar una conciencia social. Se apoyaron expresiones artísticas como el muralismo y se impulsaron proyectos culturales orientados a la identidad nacional.

México en su contexto internacional: Siglo XX

Durante la Segunda Guerra Mundial (1939–1945), México mantuvo una posición de neutralidad hasta que Alemania hundió barcos petroleros mexicanos en 1942. El país declaró la guerra al Eje y participó con el Escuadrón 201 en Filipinas. El conflicto facilitó la industrialización vía exportaciones y fortaleció la alianza con EE. UU.

En el contexto de la Guerra Fría, México adoptó una política exterior de no intervención y autodeterminación de los pueblos, al tiempo que mantenía relaciones diplomáticas tanto con el bloque capitalista como con países socialistas. Internamente, el gobierno fortaleció un modelo de capitalismo regulado con control estatal de sectores estratégicos, pero restringió las libertades políticas para evitar insurgencias.

De la posguerra al colapso del modelo económico (1940–1982)

Este periodo se caracteriza por un crecimiento sostenido con desigualdad social y control político desde el presidencialismo autoritario. Los modelos económicos que se implementaron en la nación fueron: Sustitución de importaciones (1940–1958): Impulsado por gobiernos como el de Ávila Camacho y Miguel Alemán, buscaba industrializar al país reduciendo importaciones y protegiendo la industria nacional; Desarrollo Estabilizador (1958–1970): Bajo presidentes como López Mateos y Díaz Ordaz, se logró crecimiento económico sostenido con baja inflación, pero sin mejoras sociales significativas; Desarrollo Compartido (1970–1982): Implementado por Echeverría y López Portillo, buscaba redistribución del ingreso y gasto público expansivo, pero terminó en endeudamiento y crisis.

Las reformas electorales que hubo durante el periodo fueron: en 1963 se crea la figura de diputados de partido (plurinominales), para dar cabida a partidos minoritarios; en 1977 la reforma política impulsada por Jesús Reyes Heróles permitió el registro de partidos de oposición y buscó abrir el sistema político frente al descontento social.

Entre los movimientos sociales se debe mencionar: movimiento estudiantil de 1968 que contempló protestas por libertades democráticas, reprimidas violentamente por el Estado en la matanza de Tlatelolco; la Guerra Sucia desde su campaña de represión del Estado (1970–1982) contra movimientos guerrilleros y disidentes hasta las desapariciones forzadas y la tortura. Enseguida se resumen los hechos relevantes por sexenio durante este periodo.

Manuel Ávila Camacho (1940-1946): durante su gobierno, se mantuvo una política económica basada en la estabilidad y el control del gasto público. Se fomentó la industria nacional tras la Segunda Guerra Mundial, pero con una política de moderación fiscal. Con el PRI se consolidó el sistema político autoritario y no se implementaron reformas electorales significativas. Gracias a que Ávila Camacho mantuvo un equilibrio entre las fuerzas políticas y evitó grandes conflictos su gobierno fue visto como un periodo de estabilidad después de los excesos de la Revolución Mexicana, destacada la fundación del IMSS en 1943.

Miguel Alemán Valdés (1946-1952): impulsó una política de industrialización, con un enfoque en la modernización del país y el fomento a la inversión privada. Se promovieron grandes obras de infraestructura, como el aeropuerto de la Ciudad de México y la carretera Panamericana. Durante su mandato, se modificó el Código Electoral para fortalecer la intervención del gobierno en las elecciones. Alemán, conocido como el "presidente del progreso", favoreció a las élites económicas y consolidó un modelo económico capitalista y moderno, a él se le debe la autonomía de la UNAM decretada en 1945.

Adolfo Ruíz Cortines (1952-1958): continuó con el modelo del desarrollo estabilizados, impulsó políticas de austeridad y mantuvo una estabilidad económica. La inflación se controló, y el país experimentó un crecimiento moderado. En 1953, bajo su mandato, las mujeres obtuvieron el derecho al voto, un hito histórico en la política mexicana. Esta reforma fue un gran avance en los derechos civiles.

Adolfo López Mateos (1958-1964): continuó con crecimiento sostenido y control de la inflación. Durante su gobierno se nacionalizó la industria eléctrica en 1960, lo que provocó un conflicto con Estados Unidos, pero representó un avance en la soberanía económica. López Mateos mantuvo el control sobre las elecciones y la política lo que consolidó aún más la hegemonía del PRI.

Gustavo Díaz Ordaz (1964-1970): aumentó la deuda externa y fomentó la industria pesada y la infraestructura, aunque mantuvo el modelo de desarrollo estabilizador. Durante su mandato, la represión política aumentó especialmente hacia los movimientos estudiantiles, con la matanza de Tlatelolco en 1968, un hecho de gran repercusión política y social, un año antes, en el edificio sede de la Secretaría de Relaciones Exteriores, también ubicado en Tlatelolco, se firmó un tratado para el desarme de nuclear en América Latina.

Luis Echeverría Álvarez (1970-1976): México experimentó una acelerada expansión del gasto público y de la deuda externa durante este periodo. Aunque Echeverría implementó el modelo de "desarrollo compartido", la inflación y la deuda comenzaron a aumentar significativamente. Al igual que su predecesor su mandato estuvo marcado por un autoritarismo y la represión de movimientos sociales. En 1971, durante el "Halconazo", se reprimió violentamente a los estudiantes.

José López Portillo (1976-1982): implementó un modelo económico orientado hacia la modernización y la explotación de recursos naturales, motivado también por el auge del petróleo. La crisis de 1976 lo obligó a recurrir a la deuda externa, lo que aumentó la dependencia financiera de México. En 1977, implementó una serie de reformas fiscalistas para modernizar la economía, pero al final de su gobierno en 1982 se produjo una crisis económica debido al colapso de los precios del petróleo. Durante su mandato la oposición comenzó a crecer debido a las crisis políticas y económicas y el creciente descontento hacia el PRI.

Neoliberalismo

A partir de la crisis económica de 1982, se instauró un modelo neoliberal, caracterizado por la apertura comercial, reducción del Estado y privatización de empresas públicas. El neoliberalismo implica un modelo de libre mercado, con reducción del gasto social, privatización de sectores estratégicos, apertura al comercio exterior y promoción de la inversión extranjera. Se basa en el supuesto de que el mercado es el mejor regulador económico, sin embargo, en la práctica también significa un aumento de la desigualdad y debilitamiento del Estado social. Las principales acciones neoliberales por sexenio son:

Miguel de la Madrid (1982-1988): durante este periodo el país vivió una fuerte devaluación del peso y una inflación elevada. Ante la crisis, el gobierno de la Madrid adoptó las recomendaciones del Fondo Monetario Internacional (FMI) y el Banco Mundial. Esto incluyó políticas recortes en el gasto público, privatización parcial de empresas estatales y una política económica más orientada hacia el mercado. México reestructuró su deuda externa bajo acuerdos con bancos internacionales, buscando aliviar los pagos a largo plazo. En la industria se inició un proceso gradual de apertura con la firma de acuerdos de libre comercio y la reducción de aranceles.

Carlos Salinas de Gortari (1988-1994): asumió la presidencia luego de un fraude electoral en el que su opositor del PRD, Lázaro Cárdenas, había ganado según las primeras actas computadas, pero la tendencia se revirtió tras una supuesta caída del sistema de conteo de votos. Su gestión continuó las reformas neoliberales privatizando más de 1,000 empresas estatales, incluidas las grandes empresas del sector energético, telecomunicaciones, transporte y la banca. En su gobierno también se firmó el TLCAN entre México, Estados Unidos y Canadá, promoviendo la apertura comercial y la integración económica regional, aunque con costos muy altos para la industria nacional, especialmente para el campo. Por otro lado, para incrementar la inversión extranjera la banca fue privatizada, se promovió la competitividad y la globalización de las empresas mexicanas. En los últimos días de este sexenio estalló

el conflicto armado del EZLN en Chiapas en el que numerosos indígenas se declaraban en contra de las reformas neoliberales del gobierno y a favor del reconocimiento de sus derechos y autonomía.

Ernesto Zedillo (1994-2000): comenzó su gobierno no solo con la crisis social y política provocada por el levantamiento del EZLN en Chiapas y el asesinato de Luis Donaldo Colosio, entonces candidato del PRI a la presidencia, sino también con la crisis económica de diciembre de 1994, conocida como el "error de diciembre", provocada por la devaluación del peso y una fuga de capitales. Estas situaciones pusieron en evidencia las vulnerabilidades del modelo neoliberal. A pesar de ello, Zedillo reformó el sistema bancario, liberó el mercado de las telecomunicaciones y siguió privatizando empresas. Destacó por la polémica que provocó el rescate que hizo con dinero público de las deudas privadas de los bancos, conocido como Fobaproa.

Vicente Fox (2000-2006): dado el descontento con los gobiernos anteriores, luego de Zedillo, asumió la presidencia el candidato del PAN, partido opositor, por lo que se considera que este fue el periodo de la alternancia política, sin embargo, Fox, mantuvo muchas de las políticas neoliberales implementadas por el PRI, continuó con la implementación del TLCAN y fortaleció la integración económica con Estados Unidos. Durante su gobierno enfrentó movimientos sociales opositores como el de los maestros en Oaxaca (APPO), o los pobladores de San Salvador Atenco en el Estado de México estos últimos fueron reprimidos por el entonces gobernador Enrique Peña Nieto.

Felipe Calderón (2006-2012): una vez más, el candidato del PAN asumió el gobierno, tras reclamos de fraude e impugnaciones por parte de su opositor del PRD, Andrés Manuel López Obrador. El gobierno de Calderón enfrentó la falta de legitimidad social a través de una política de seguridad nacional enfocada en el combate al narcotráfico, lo que afectó gravemente la seguridad en varias regiones del país. En términos económicos continuó con la desregulación del mercado laboral, por ejemplo, con la extinción de grandes empresas y sindicatos como el de la compañía paraestatal de Luz y Fuerza del Centro y promovió la privatización de servicios y sectores productivos.

Enrique Peña Nieto (2012-2018): el PRI recuperó la presidencia de México con Peña Nieto, pero heredó una desaceleración económica y altos niveles de corrupción y violencia. A pesar de esto, se continuó implementando las reformas neoliberales de todos los años anteriores. Una de las más importantes fue la reforma energética, que permitió la inversión privada en el sector energético, especialmente en petróleo y gas, que buscaba debilitar el control de PEMEX y la CFE de los hidrocarburos y la producción de electricidad. Peña Nieto también promovió reformas en diversas áreas como educación, telecomunicaciones, competencia económica, y laboral, buscando dar mayor dinamismo a la economía mexicana. Sin embargo, la imagen del gobierno fue duramente afectada por escándalos de corrupción, como el caso de la "Casa Blanca", y atropellos a los derechos humanos como la desaparición de 43 estudiantes de la normal rural Raúl Isidro Burgos en Ayotzinapa, Guerrero.

9.9 Población y demografía

Diversidad social

México es un país de extraordinaria diversidad étnica y cultural, reflejada en sus múltiples regiones y comunidades, que albergan una rica variedad de lenguas, tradiciones, costumbres y manifestaciones artísticas. Cada una de sus regiones tiene características propias que enriquecen el panorama nacional. En el sur, por ejemplo, el estado de Chiapas es hogar de diversos grupos indígenas como los tzeltales y tzotziles, cuyas costumbres y lenguas siguen vivas a través de los siglos. En el sureste, en Oaxaca, conviven un gran número de pueblos originarios, como los zapotecos y mixtecos, quienes mantienen vivas sus tradiciones textiles y gastronómicas. En el centro, el Estado de Puebla es famoso por su mezcla de tradiciones indígenas y coloniales, reflejada en su arquitectura y festividades como la Guelaguetza. En el norte, estados como Sonora y Chihuahua tienen una fuerte influencia de las culturas mestizas y nativas, pero también de tradiciones estadounidenses, debido a su cercanía con la frontera. Esta diversidad se

extiende a las lenguas, ya que México es hogar de 68 lenguas indígenas, siendo el náhuatl y el maya algunos de los más hablados.

En conjunto, estas diferencias culturales y étnicas convierten a México en un mosaico de tradiciones vivas que se celebran y preservan a través de una gran variedad de festividades, gastronomía, arte y costumbres que definen la identidad del país. En este contexto, cabe señalar, que la etnicidad, al igual que la raza, es una construcción social; no una predeterminación biológica. Sin embargo, las diferencias étnicas en México lamentablemente han generado problemas de discriminación y asilamiento de diferentes grupos sociales y sus prácticas culturales.

Población

México es un país con una población de aproximadamente 126 millones de habitantes (según el INEGI, 2020), y esta población muestra una notable diversidad en cuanto a características demográficas. En términos de grupos de edad, el país presenta una estructura demográfica relativamente joven, con una mediana de edad de 29 años. Sin embargo, este perfil está cambiando gradualmente debido al envejecimiento poblacional. Mientras que los estados del sur, como Chiapas y Guerrero, tienen una mayor proporción de población joven, en entidades del norte y centro del país, como Nuevo León y CDMX, hay un aumento progresivo de la población adulta mayor.

Desarrollo demográfico

El estudio del desarrollo demográfico parte de categorías como migración, crecimiento urbano, natalidad, mortalidad y esperanza de vida. Por ejemplo, en cuanto a la esperanza de vida, México ha mostrado avances significativos, con un promedio de 75 años a nivel nacional, aunque existen variaciones entre las entidades federativas. Por ejemplo, la CDMX tiene una esperanza de vida más alta, cercana a los 77 años, debido a mejores servicios de salud y condiciones de vida, mientras que estados como Chiapas y Guerrero presentan cifras más bajas, con una esperanza de vida promedio de alrededor de 72 años, reflejando disparidades en acceso a salud y condiciones socioeconómicas.

En términos de población rural y urbana, el país sigue siendo mayoritariamente urbano, con cerca del 80% de la población viviendo en áreas urbanas. Esta urbanización ha crecido especialmente en ciudades como Guadalajara, Monterrey y la Ciudad de México, que concentran la mayor parte de la población y recursos económicos del país. Esto se entiende porque el crecimiento urbano es un proceso económico con una dimensión espacial, en la que los factores de producción, las empresas y las localidades adquieren niveles de especialización cada vez mayores. A medida que una zona urbana aumenta en población, adquiere nuevas funciones, amplía las existentes y modifica las relaciones que son el vínculo entre las condiciones técnicas y las espaciales del progreso económico.

Esto nos lleva a revisar también el concepto de migración se puede definir como el movimiento de las personas desde un lugar hasta otro; con la intención de fijar su residencia en el destino de forma permanente o semipermanente. En nuestro país, la migración se ha vuelto un fenómeno social cada vez más grande, lo que produce tensiones latentes entre los residentes de las ciudades de acogida y la búsqueda de mejores condiciones de vida para las personas que migran, ya sea de países vecinos o de connacionales hacia EUA.

9.10 Desarrollo social

Salud

México cuenta con un sistema de salud mixto en el que coexisten varios servicios, tanto públicos como privados. Según el INEGI y la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición (ENSANUT), alrededor del 80% de la población tiene acceso a algún servicio de salud, a través de diferentes instituciones. Los principales organismos de salud pública en México son: IMSS (Instituto Mexicano del Seguro Social), que atiende principalmente a trabajadores asalariados y sus familias. ISSSTE (Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado), dirigido a los

empleados públicos. Seguro Popular (hasta su sustitución por el INSABI en 2020), que buscaba ofrecer cobertura a quienes no estaban afiliados a otros servicios, principalmente en áreas rurales. INSABI (Instituto de Salud para el Bienestar), creado para asegurar la atención médica universal gratuita, aunque enfrenta desafíos operativos. Sin embargo, persisten desigualdades en el acceso a los servicios entre las zonas urbanas y rurales, con las regiones del sur del país enfrentando mayores limitaciones en cuanto a infraestructura y cobertura médica.

Otras variables importantes a tomar en cuenta cuando analizamos el sector de salud en México, es la cobertura de la salud mental por los servicios de seguridad social. La salud mental ha emergido como una de las preocupaciones más importantes en México, especialmente con los efectos de la pandemia de COVID-19. Según los datos del INEGI y la ENSANUT, se ha observado un aumento en los casos de trastornos mentales, como la depresión y la ansiedad. Un par de puntos proposiciones descriptivas y estadísticas sobre la salud mental en México son que casi el 10% de la población adulta mexicana presenta algún tipo de trastorno mental, siendo la depresión y los trastornos de ansiedad los más comunes y, por otra parte, el suicidio es una causa significativa de muerte, especialmente entre los jóvenes. Las tasas más altas de suicidio se han registrado en estados como Durango y Chihuahua.

En cuanto a la discapacidad, otro tema pendiente en la agenda de salud en México también enfrenta desafíos importantes. Según el INEGI: 7.6% de la población mexicana (alrededor de 9.4 millones de personas) vive con alguna discapacidad, ya sea motriz, visual, auditiva, intelectual o psicosocial. Las personas con discapacidad enfrentan barreras significativas en términos de acceso a la educación, el empleo y servicios de salud adecuados. El gobierno mexicano ha implementado políticas y programas, como el Programa de Inclusión Social para Personas con Discapacidad y la Ley General para la Inclusión de las Personas con Discapacidad, pero la integración plena de estas personas en la sociedad y la eliminación de barreras arquitectónicas y sociales sigue siendo un reto importante.

Educación

El sector educativo en México ha avanzado significativamente, pero persisten desafíos importantes, especialmente en lo que respecta a la desigualdad regional, el analfabetismo, y el acceso a la educación superior. Los programas de becas y los esfuerzos para aumentar la cobertura en todos los niveles han tenido un impacto positivo, pero se necesita continuar trabajando para garantizar que todos los estudiantes, independientemente de su origen social o geográfico, tengan acceso a una educación de calidad.

En términos de cobertura y acceso a la educación los niveles de escolaridad han mejorado en las últimas décadas, pero persisten disparidades significativas entre las zonas urbanas y rurales. Por ejemplo:

Educación básica (primaria y secundaria): La cobertura es casi universal, alcanzando cerca del 98% de la población en edad escolar. Sin embargo, en estados del sur como Chiapas, Guerrero y Oaxaca, el acceso a la educación secundaria es menor que en otras regiones.

Educación media superior (preparatoria): La cobertura ha aumentado en las últimas décadas, pero aún existen diferencias significativas entre las regiones del país, y solo alrededor del 50-60% de los jóvenes de 18 a 23 años acceden a la preparatoria, con mayores brechas en zonas rurales y marginadas.

Educación superior (universitaria): Aproximadamente el 40% de los jóvenes en edad de ingresar a la universidad tiene acceso a este nivel educativo, aunque el acceso es más limitado en áreas rurales y para los grupos socioeconómicos más bajos.

Por otro lado, México ha logrado avances importantes en la reducción del analfabetismo, especialmente en las últimas décadas. Según el INEGI y datos del Censo 2020, el porcentaje de analfabetismo en la población adulta (de 15 años y más) ha disminuido al 4.0% a nivel nacional, pero sigue siendo mayor en zonas rurales y entre mujeres

adultas mayores. En estados como Chiapas, Guerrero y Oaxaca, las tasas de analfabetismo son más altas, lo que refleja la desigualdad en el acceso a la educación básica.

También hay que tomar en cuenta que, aunque la educación pública predomina en México, los servicios educativos privados han crecido, especialmente en las grandes ciudades y entre los sectores de clase media y alta. La educación privada representa alrededor del 10-15% de la matrícula escolar, principalmente en los niveles de educación media superior y superior. Las instituciones privadas tienen una fuerte presencia en áreas urbanas y ofrecen alternativas educativas con estándares internacionales, lo que también genera una brecha en la calidad educativa.

Frente a este panorama México ha implementado varios programas sociales de becas para mejorar la equidad en el acceso a la educación, como parte de sus políticas para combatir la pobreza y promover la inclusión. Algunos de los programas más importantes incluyen la Beca Universal para Estudiantes de Educación Media Superior (Becas Benito Juárez), dirigida a estudiantes de preparatoria en familias de bajos recursos, con el objetivo de reducir la deserción escolar, la beca para la Educación Superior (Beca Elisa Acuña) que ofrece apoyos a estudiantes de universidades públicas en situaciones de vulnerabilidad económica o las becas al Bienestar Benito Juárez en el nivel primaria y secundaria, con el fin de asegurar que los estudiantes continúen sus estudios sin ser afectados por limitaciones económicas.

Una vez asegurada la educación básica, se enfrenta el problema del acceso a la educación superior. Aunque este ha crecido en las últimas décadas, sin embargo, hoy en día la demanda supera la oferta en muchas universidades públicas, especialmente en las más prestigiadas. Por ello el proceso de admisión en universidades públicas como la UNAM, IPN y UAM es altamente competitivo, con exámenes de selección que filtran a los aspirantes. La tasa de ingreso a la universidad varía entre el 40% y 50% de la población joven, con diferencias notables entre entidades federativas y estratos socioeconómicos. El aumento de las universidades privadas ha contribuido a satisfacer la demanda de acceso a educación superior, pero la calidad y el costo siguen siendo factores determinantes en el acceso para estudiantes de menores recursos.

Empleo y desempleo

El empleo y desempleo en México muestran una realidad compleja que varía considerablemente tanto a nivel nacional como estatal. Según datos más recientes del INEGI, la tasa de desempleo a nivel nacional se mantiene alrededor del 3.5%, aunque con diferencias notables entre regiones. Los estados del norte, como Nuevo León y Baja California, tienden a tener menores tasas de desempleo, gracias a su cercanía con los Estados Unidos y su enfoque en la manufactura, mientras que los estados del sur como Chiapas y Guerrero presentan tasas más altas debido a una menor industrialización. En términos de género, las mujeres enfrentan una tasa de desempleo ligeramente superior a la de los hombres, y están más concentradas en trabajos informales y de bajos salarios, con mayores dificultades para acceder a puestos en sectores de alta remuneración. En cuanto a edades, el desempleo es más elevado entre los jóvenes (15-29 años), que enfrentan barreras significativas para ingresar al mercado laboral formal debido a la falta de experiencia y las limitadas oportunidades en sectores como la tecnología y la industria. El empleo en México está muy marcado por la informalidad, representando aproximadamente el 56% de la población ocupada, con la mayoría en actividades de comercio y servicios. Además, las condiciones laborales suelen ser precarias, con una gran parte de los empleados contratados bajo salarios bajos y contratos temporales o por honorarios, especialmente en sectores como agricultura y servicios. El nivel salarial en el país está por debajo de la media de América Latina, con una gran parte de la población laboral ganando menos del salario mínimo, lo que afecta su calidad de vida y limita su acceso a servicios de salud, educación y seguridad social.

Distribución de la riqueza

En México, la distribución de la riqueza es extremadamente desigual, con una concentración significativa de los recursos en manos de una pequeña élite, mientras que una gran parte de la población vive en condiciones de pobreza. La distribución de la riqueza se refiere a cómo se reparte la propiedad de los recursos y activos, como tierras, bienes y patrimonio, mientras que la distribución del ingreso está relacionada con la manera en que se distribuyen los ingresos generados por el trabajo, el capital y el sector productivo.

México enfrenta niveles de pobreza alarmantes: cerca del 40% de la población vive en situación de pobreza, y de estos, aproximadamente 20% se encuentran en pobreza extrema. Estas cifras reflejan la dificultad de una gran parte de la población para acceder a necesidades básicas como alimentación, vivienda y servicios de salud. A nivel de desarrollo humano, México se encuentra en el puesto 74 en el Índice de Desarrollo Humano (IDH) global, lo que indica un desarrollo moderado, con avances en áreas como la esperanza de vida, pero persistentes desigualdades en educación y calidad de vida.

El Índice de Gini en México, que mide la desigualdad en la distribución del ingreso, es uno de los más altos del mundo, con un valor cercano a 0.48 (siendo 0 la igualdad total y 1 la desigualdad extrema). Esto refleja una gran disparidad en los ingresos entre los distintos segmentos de la población. La brecha en el poder adquisitivo entre los diferentes deciles de la población es considerable; mientras que el primer decil (el 10% más pobre) tiene ingresos extremadamente bajos, el décimo decil (el 10% más rico) concentra una proporción desmesurada de la riqueza nacional.

Para mitigar esta desigualdad, el gasto público en México incluye programas de transferencias monetarias, becas, y subsidios a los más pobres, a través de iniciativas como Prospera (ahora Sembrando Vida) y el programa de Becas Benito Juárez. Sin embargo, el gasto en educación, salud e infraestructura sigue siendo insuficiente para cerrar las brechas de desigualdad, y la informalidad laboral limita el acceso de una gran parte de la población a servicios sociales y prestaciones básicas.

La distribución del ingreso y de la riqueza se usan de manera indistinta, sin embargo, no son lo mismo. El ingreso es un flujo de dinero que se recibe en muchos casos mensualmente, como por ejemplo un sueldo, o una vez por año en el caso de la venta de una cosecha. La riqueza se puede definir como la suma de activos (todos los bienes o patrimonio que una persona posee) menos los pasivos (todo lo que una persona debe). Es decir, los activos pueden tener la forma de bienes físicos, como un campo, un comercio, una fábrica o un camión, o de activos financieros, como acciones, bonos del gobierno, depósitos en bancos, etc.

9.11 Economía

Distribución de sectores productivos y PIB por regiones del país

La economía mexicana es altamente diversa y se caracteriza por una fuerte concentración en ciertas regiones, mientras que otras enfrentan desafíos significativos en términos de desarrollo económico. El Producto Interno Bruto (PIB) de México se distribuye de manera desigual entre las diferentes regiones, reflejando las disparidades en desarrollo industrial, infraestructura y recursos naturales.

El noroeste del país, que incluye estados como Sonora y Baja California, es clave para la industria maquiladora y las exportaciones a Estados Unidos. La agricultura (especialmente el cultivo de hortalizas y frutas) también es importante, y la cercanía con la frontera ha facilitado el comercio internacional. El PIB en esta región es relativamente alto debido a la manufactura y el comercio.

El noreste incluye estados como Nuevo León y Coahuila, que se destacan por su industria automotriz, metalmecánica y energética. Monterrey, en Nuevo León, es el principal motor económico del noreste, concentrando gran parte del

sector industrial y comercial. Esta región tiene un PIB elevado, principalmente por el sector manufacturero y la minería.

En el occidente, representado por estados como Jalisco y Nayarit existe un sector industrial diversificado, que va desde la electrónica y la tecnología hasta la agricultura (especialmente agave y café). Jalisco, con Guadalajara como su centro económico, es también un punto importante para la tecnología y los servicios.

Para el oriente, un estado clave en términos de comercio exterior gracias a su puerto marítimo es Veracruz. Aquí el sector petrolero es esencial, aunque la región también cuenta con un sector agrícola significativo. El PIB aquí varía, con una fuerte dependencia de la exportación de petróleo y productos agrícolas.

Con estados como San Luis Potosí y Zacatecas, la región centro norte es un importante productor de minerales y metales. También destaca por la agricultura y un sector automotriz creciente, impulsado por la cercanía con el norte del país. El PIB aquí depende en gran medida de la minería y la industria automotriz.

En el centro sur, estados como Querétaro, Guanajuato y Aguascalientes tienen una economía industrial robusta, con fuerte presencia de la manufactura automotriz y electrónica. Estas regiones han experimentado un crecimiento económico sostenido gracias a la inversión extranjera. El ejemplo icónico es la Ciudad de México (CDMX) capital y el principal motor económico del país, aunque geográficamente forma parte de esta región, la CDMX tiene características económicas y sociales que la distinguen de otros estados de la misma área, debido a su importancia como centro político, cultural y comercial. Contribuye de manera significativa al PIB nacional, ya que concentra una gran parte de los sectores de servicios, comercio, finanzas y tecnología. Además, alberga a una gran cantidad de empresas multinacionales y tiene una infraestructura de transporte y comunicación muy desarrollada.

Por el contrario, en el suroeste del país, que incluye a Guerrero y a Oaxaca, se enfrenta altos índices de pobreza y un PIB bajo en comparación con otras regiones. La agricultura sigue siendo crucial, pero la infraestructura limitada y la informalidad laboral afectan su crecimiento. El turismo también es una fuente clave de ingresos en algunos estados como Oaxaca.

Otro caso es el del sureste, con estados como Chiapas, Tabasco y Yucatán que tienen una economía agrícola predominante, aunque la industria petrolera ha sido importante, especialmente en Tabasco y Campeche. El PIB es bajo en comparación con el resto del país, y la pobreza es más pronunciada en esta región, aunque el turismo en lugares como la Riviera Maya contribuye a la economía.

Economía nacional en el marco del mercado internacional

México se posiciona como un actor clave en el mercado internacional, beneficiándose de su ubicación geográfica estratégica y su participación en acuerdos comerciales que le permiten acceder a mercados globales y diversificar sus exportaciones. Sin embargo, enfrenta retos como la desigualdad interna, la dependencia del mercado estadounidense y las tensiones comerciales con otras potencias económicas. Su estrategia de integración global continúa siendo un factor fundamental para su crecimiento económico y desarrollo sostenido. A continuación, se describen algunas de las características más relevantes de su participación en la economía global:

México es la 15ª economía más grande del mundo por PIB nominal, con un PIB cercano a los 1.3 billones de dólares (según datos más recientes). En América Latina se encuentra en la segunda posición respecto de este índice, solo superado por Brasil. Su PIB per cápita (es decir, el promedio de ingreso de la población) es moderado en comparación con países desarrollados, pero ha mostrado crecimiento en las últimas décadas, aun así, su PIB per cápita está por debajo de países como Chile, Uruguay y Costa Rica, reflejando la desigualdad en la distribución de la riqueza y los desafíos socioeconómicos internos. A nivel global, México representa aproximadamente el 1.5% del PIB mundial.

El Índice de Bienestar Económico Sustentable (IBES) de México ha mostrado una relación estrecha con el crecimiento económico y las políticas de desarrollo sustentable. Aunque el país ha tenido avances en términos de desarrollo humano, la desigualdad económica sigue siendo un desafío significativo. La informalidad laboral, las brechas en el acceso a la educación y la pobreza afectan el bienestar general, a pesar de que el país ha mostrado resiliencia en varios indicadores macroeconómicos.

En términos de acuerdos regionales de comercio, nuestro país ha firmado tratados clave que le permiten ser parte de varios bloques económicos regionales. Uno de los más destacados es el Tratado entre México, Estados Unidos y Canadá. El llamado T-MEC reemplazó al NAFTA (TLC) en 2020 y sigue permitiendo un acceso preferencial al mercado de los Estados Unidos y Canadá, sus principales socios comerciales. Esto ha impulsado las exportaciones mexicanas, especialmente en sectores como automotriz, electrónica y productos agrícolas.

México también es parte del Acuerdo de Asociación Transpacífico (CPTPP), un bloque comercial con países de Asia-Pacífico, que fomenta el libre comercio y la cooperación económica con naciones como Japón, Australia y Malasia. Además, el país mantiene acuerdos comerciales con la Unión Europea, lo que facilita el intercambio de productos y servicios y promueve la inversión extranjera directa.

En cuanto a exportaciones, el país se sitúa como uno de los principales exportadores mundiales de productos manufacturados, especialmente automóviles, electrónica, petróleo y agroindustria. Las exportaciones mexicanas en 2023 se estimaron en más de 500 mil millones de dólares, con Estados Unidos como su principal socio, representando alrededor del 80% de las exportaciones mexicanas. En cuanto a las importaciones, México depende de insumos como maquinaria, vehículos, productos electrónicos y combustibles, principalmente provenientes de Estados Unidos y China.

Nuestro país participa activamente en cumbres internacionales que promueven la cooperación económica y el comercio global, comprometido con la globalización comercial, mantiene un rol activo en las discusiones y acuerdos dentro de la Organización Mundial del Comercio (OMC) así como en las cumbres del G20, un foro internacional clave para la coordinación de políticas económicas globales entre las principales economías del mundo. En términos regionales, el país es miembro de la Alianza del Pacífico, un bloque económico que busca estrechar la relación entre México, Chile, Perú y Colombia no solo en el intercambio comercial sino también en áreas como educación, innovación y desarrollo de pequeñas y medianas empresas, esto puede ser un contrapeso al Mercosur que agrupa a países de América del Sur y del cual no forma parte nuestro país.

Bibliografía sugerida

Ciencias Sociales

Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión (2024) Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos. Disponible en <https://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/ref/cpeum.htm>

Colegio de Bachilleres (2000) Introducción a las Ciencias Sociales I. Compendio Fascicular. Disponible en <https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/index.php/compendios-fasciculares/>

Cortés, J. P. (2016) Introducción a las Ciencias Sociales. Telebachillerato comunitario. Segundo Semestre. SEP. Disponible en <https://dgb.sep.gob.mx/storage/recursos/2024/09/ufMmc9aXEA-Introduccion-a-las-Ciencias-Sociales.pdf>

Gelles, Richard J. Levine, Ann. (1996). Introducción a la sociología. (5 ed. ed.). McGraw-Hill.

Montoya, J. M. (2010) Introducción a las Ciencias Sociales y Humanidades. Universidad Autónoma de Sinaloa.

Historia de México

Cosío, D. (Ed.). (2010). Nueva historia general de México. El Colegio de México.

Escalante, P., García, B., Jauregui, L., Vázquez, J., Speckman, E., Garcíadiego, J. y Aboites, L. (2022) Nueva historia mínima de México. El Colegio de México. Disponible para descarga gratuita en:

<https://repositorio.colmex.mx/concern/books/3r074z14d?locale=es>

Medina, L. (2014). Hacia el nuevo Estado: México, 1920-2000. Fondo de Cultura Económica.

Estructura Socioeconómica de México

Castillo, V., et al. (2014). Estructura Socioeconómica de México II. Colegio de Bachilleres. Consulta libre en:

<https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/index.php/compendios-fasciculares/>

CONAPO. (2024) Información sociodemográfica - Salud Sexual y Reproductiva y Grupos en condición de vulnerabilidad. Catálogo Digital. Consulta libre en:

<https://www.gob.mx/conapo/documentos/catalogo-digital-informacion-sociodemografica-salud-sexual-y-reproductiva-y-grupos-en-condicion-de-vulnerabilidad?idiom=es>

CONEVAL. (2021) Treinta años de evolución de las carencias sociales a partir de instrumentos censales y la Encuesta Intercensal, 1990-2020. Consulta libre en:

www.coneval.org.mx/Medicion/Documents/Carencias_sociales_censales_90_20/Presentacion_evolution_carencias_sociales_censales_1990_2020.pdf

INEGI (2020) Censos de Población y Vivienda. <https://www.inegi.org.mx/programas/ccpv/>

Estadísticas de salud y mortalidad: <https://www.inegi.org.mx/temas/salud/>

Banco de Información Económica <https://www.inegi.org.mx/app/indicadores/?tm=0>

Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo (ENOE):

<https://www.inegi.org.mx/programas/enoe/15ymas/>

Méndez, J. (2012). Problemas Económicos de México. McGraw Hill.

México, ¿Cómo Vamos? (2023) Plataforma con indicadores económicos y sociales actualizados por estado.

<https://mexicocomovamos.mx/>

Paredes, C. y Rivera, P. (2012). Estructura socioeconómica de México. Gafra.

Sistema de Información de la Secretaría de Salud (2023) Datos en salud. Consulta libre en:

<http://sinaiscap.salud.gob.mx:8080/DGIS/>

10. Introducción al Trabajo

Esta asignatura se encuentra organizada para que los sustentantes identifiquen los elementos teórico-metodológicos que les permitan ser capaces de reconocer un plan de vida ocupacional, así como, una estrategia de búsqueda de empleo e identificar el contexto legal de las relaciones laborales.

10.1 Plan de vida ocupacional

El diseño de un plan de vida ocupacional orientado a la inserción en el sector productivo es esencial para establecer una trayectoria profesional clara y enfocada. Este plan debe considerar las fortalezas, intereses y habilidades de cada individuo, alineándolos con las demandas del mercado laboral. De esta forma, se fomenta un aumento en las oportunidades de empleo y se facilita la adaptación a los cambios del sector productivo, permitiendo un crecimiento profesional y una contribución efectiva al desarrollo económico.

10.1.1 Características personales

Las características personales son los rasgos individuales que nos distinguen y determinan la forma en que pensamos, actuamos y nos relacionamos con los demás. Estas abarcan aspectos físicos, emocionales, sociales e intelectuales entre los cuáles se encuentran las fortalezas, habilidades, necesidades, actitudes y áreas de oportunidad.

Las fortalezas son aquellos aspectos positivos que nos ayudan a alcanzar nuestras metas. Las habilidades se refieren a las capacidades que desarrollamos para realizar una tarea. Las necesidades son aspectos personales o emocionales que requerimos satisfacer para mantener el bienestar. Las actitudes reflejan nuestra disposición ante distintas situaciones. Finalmente, las áreas de oportunidad son los aspectos que podemos mejorar para fortalecer nuestro desarrollo personal y profesional.

10.1.2 Sectores económicos

Los sectores económicos comprenden las diferentes áreas en las que se organiza la actividad productiva de un país, tales como:

- Sector primario. Comprende las actividades relacionadas con la extracción y aprovechamiento de los recursos naturales, como la agricultura.
- Sector secundario. Incluye las actividades que transforman las materias primas en productos elaborados, como la industria manufacturera.
- Sector terciario. Está formado por las actividades que ofrecen servicios, como el comercio.
- Sector cuaternario. Abarca actividades relacionadas con la investigación, como la biotecnología.

Conocer la estructura y funcionamiento de los sectores económicos permite a las personas identificar sus intereses, habilidades y metas profesionales, y vincularlas con las necesidades reales del mercado laboral. De esta manera, es posible reconocer áreas de oportunidad, elegir trayectorias de formación más adecuadas y tomar decisiones informadas sobre el futuro profesional.

10.1.3 Plan de vida

Un plan de vida es una herramienta que permite reconocer las características personales y profesionales de una persona, así como organizar metas y objetivos a corto, mediano y largo plazo, de acuerdo con sus prioridades y posibilidades, definiendo los recursos necesarios para alcanzarlos. Al elaborarlo, podemos identificar nuestros gustos, intereses y aspectos que deseamos mejorar.

Es fundamental establecer metas realistas y flexibles, ya que, aunque existen factores externos que no podemos controlar, sí podemos decidir cómo reaccionar y adaptarnos ante ellos. De este modo, el plan de

vida se convierte en una guía dinámica que orienta nuestras decisiones y favorece el crecimiento personal y profesional.

10.2 Herramientas para la inserción laboral

El uso de herramientas no solo optimiza el proceso de búsqueda de empleo, sino que también facilita la inserción en el sector productivo al brindar acceso a una amplia variedad de oportunidades laborales. Además, permite mejorar las habilidades de autopromoción y fortalecer la empleabilidad en un entorno altamente competitivo.

10.2.1 Fuentes y medios de reclutamiento

La capacidad de distinguir entre fuentes y medios de reclutamiento constituye una competencia clave para diseñar estrategias de búsqueda de empleo, especialmente para quienes se integran por primera vez al ámbito laboral. Este conocimiento permite a los candidatos identificar los canales más apropiados según su perfil profesional, el sector al que aspiran y las características particulares del mercado laboral.

Las fuentes de reclutamiento se refieren al origen de donde provienen los candidatos potenciales, que pueden ser internas (promociones) o externas (bolsas de trabajo). Por su parte, los medios de reclutamiento son las herramientas o plataformas concretas utilizadas para atraer y contactar a estos candidatos, tales como plataformas.

10.2.2 Documentos para la búsqueda de empleo

Distinguir el uso, la estructura y el llenado de documentos profesionales como el currículum vitae, la carta de presentación, la solicitud de empleo y otros instrumentos de postulación es fundamental para construir un expediente claro, coherente y preciso. La descripción detallada de talentos, competencias, objetivos profesionales, metas alcanzadas, formación académica, experiencia laboral, certificaciones, idiomas y demás información pertinente de los candidatos contribuye a que los empleadores y responsables de recursos humanos analicen los diferentes perfiles de manera ágil, objetiva y efectiva.

Cada uno de estos documentos cumple una función específica dentro del proceso de selección: el currículum vitae sintetiza la trayectoria académica y profesional del candidato; la carta de presentación personaliza la postulación y destaca la motivación e idoneidad para el puesto; mientras que la solicitud de empleo estandariza la información requerida por la organización para su análisis comparativo.

10.2.3 Factores de selección

Los departamentos de recursos humanos emplean diversas formas de entrevistas y pruebas para obtener información clara y consistente sobre los objetivos y características de los candidatos. La entrevista de trabajo constituye una etapa clave del proceso de selección, ya que permite evaluar la idoneidad del aspirante para el puesto. Entre los tipos de entrevista se incluyen las cerradas, abiertas, por competencias, de estrés, estructuradas, grupales y de juego de roles.

Por otro lado, las pruebas psicométricas complementan este análisis, ofreciendo una visión más amplia de los rasgos cognitivos, conocimientos, habilidades y personalidad de los candidatos. Estas herramientas permiten predecir el desempeño y comportamiento laboral, contribuyendo a identificar al aspirante que mejor se adapte a la cultura organizacional.

10.2.4 Trámites laborales y seguridad social

Todo empleado debe realizar ciertos trámites administrativos según la naturaleza de su labor. Es fundamental que el trabajador comprenda la función y el propósito de cada trámite, ya que cada uno cumple un papel específico dentro de su vida laboral.

Algunos de estos trámites son la obtención del Registro Federal de Contribuyentes (RFC), que lo identifica ante el Servicio de Administración Tributaria (SAT) para el cumplimiento de sus obligaciones fiscales; el Número de Seguridad Social (NSS), que lo registra ante el Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) para acceder a los servicios médicos y prestaciones; y el registro en una Administradora de Fondos para el Retiro (AFORE), la cual administra las aportaciones destinadas a su retiro, garantizando un ahorro para el futuro.

Además, se deben distinguir las características, requisitos y dependencias responsables de cada uno, ya que le permitirá realizar los procesos correctamente, evitar errores y mantener su información actualizada. Conocer y cumplir con estos trámites no solo constituye una obligación legal, sino también una acción responsable que contribuye a su seguridad social, estabilidad económica y bienestar a largo plazo.

10.3 Normatividad en una relación de trabajo

La normatividad en una relación laboral es fundamental para garantizar que empleadores y empleados respeten sus derechos y obligaciones dentro del marco legal. El cumplimiento de las disposiciones establecidas en la Ley Federal del Trabajo contribuye a prevenir conflictos y abusos, promoviendo una convivencia armónica en el lugar de trabajo y fomentando el respeto mutuo entre las partes involucradas.

10.3.1 Modalidades de la relación de trabajo

El contrato de trabajo es un acuerdo celebrado entre el trabajador y el empleador, mediante el cual el trabajador se compromete a prestar sus servicios de manera voluntaria a cambio de una retribución previamente convenida. Este acuerdo establece los derechos y obligaciones de ambas partes y constituye la base legal de la relación laboral.

Existen diferentes tipos de contratos laborales:

- Contrato individual. Se define como el acuerdo mediante el cual un individuo se compromete a realizar actividades laborales para otro bajo una relación de dependencia, a cambio de un salario.
- Contrato colectivo. Representa un acuerdo formal establecido entre una o varias organizaciones sindicales de empleados y uno o más empleadores, cuya finalidad es determinar los términos y condiciones bajo las cuales se desarrollará la actividad laboral en uno o más centros de trabajo.
- Contrato ley. Es el acuerdo normativo celebrado entre uno o varios sindicatos y varios empleadores, con el propósito de definir las condiciones de prestación del servicio laboral en una rama industrial específica, y cuya vigencia se extiende de manera obligatoria a uno o más estados.

Así mismo, las relaciones laborales pueden clasificarse según distintas modalidades de contratación, que determinan la duración y las condiciones del vínculo laboral:

- Por tiempo indeterminado. El contrato no tiene una fecha de finalización establecida y se mantiene mientras persistan las condiciones de trabajo.
- Por tiempo determinado. El contrato se acuerda por un periodo específico, finalizando al concluir el plazo.

- Por obra determinada. Se celebra para la realización de un proyecto o actividad específica, y termina al concluir la obra.
- Por temporada. Aplicable a actividades que se realizan en periodos determinados del año.
- Por capacitación inicial. Destinado a personas que se incorporan al trabajo para recibir formación y adquirir experiencia práctica.
- Periodo de prueba. Permite evaluar las competencias y desempeño del trabajador antes de formalizar un contrato.

10.3.2 Jornadas de trabajo

La jornada de trabajo se define como el tiempo durante el cual una persona trabajadora está a disposición del empleador para prestar sus servicios. La Ley Federal del Trabajo regula las jornadas laborales con el objetivo de garantizar condiciones dignas y equitativas para los trabajadores. Esta ley establece tres tipos principales de jornada:

- Diurna. Comprende el periodo de trabajo entre las 6:00 y las 20:00 horas, con una duración máxima de ocho horas diarias.
- Nocturna. Se desarrolla entre las 20:00 y las 6:00 horas, con una duración máxima de siete horas diarias.
- Mixta. Combina horas de trabajo diurno y nocturno, sin que la parte nocturna exceda de tres horas y media; su duración máxima es de siete horas y media diarias.

Asimismo, es importante asegurar el reconocimiento de los días de descanso, tanto los obligatorios como los incluidos dentro de la jornada laboral. Otro aspecto relacionado con la jornada laboral es la forma de remuneración (salario, salario mínimo), la cual debe garantizar una compensación justa por el tiempo y esfuerzo dedicados.

10.3.3 Prestaciones

La Ley Federal del Trabajo establece que las personas trabajadoras tienen como derecho laboral la obtención de ciertas prestaciones mínimas que el empleador debe otorgar para asegurar un empleo digno, estable y justo. Entre ellas se encuentran las vacaciones, las cuales se otorgan a los trabajadores que tengan más de un año de servicios dentro de la empresa; el aguinaldo, es un pago anual que equivale a 15 días de salario, por lo menos; y el reparto de utilidades, que son las ganancias obtenidas por la empresa a las cuales tiene derecho de participar el trabajador.

10.3.4 Derechos, obligaciones y prohibiciones adquiridos en una relación de trabajo

Los derechos, obligaciones y prohibiciones que regulan a patrones, trabajadores y madres trabajadoras en una empresa u organización establecen las responsabilidades y prerrogativas de las partes involucradas en la relación laboral. Su objetivo es garantizar el conocimiento y cumplimiento de las normas esenciales para mantener un ambiente de respeto en los centros de trabajo, promoviendo una convivencia armoniosa y el logro de los objetivos de la relación laboral.

10.3.5 Suspensión, rescisión y terminación de una relación laboral

En el ámbito laboral, pueden presentarse diversas situaciones que pueden afectar la continuidad de la relación de trabajo. Se pueden identificar tres conceptos fundamentales: terminación, rescisión y suspensión.

La terminación de la relación de trabajo puede concluir por razones de oportunidad o conveniencia, ya sea por decisión unilateral o por acuerdo mutuo entre las partes; la rescisión permite dar por terminado un contrato laboral debido al incumplimiento imputable a alguna de las partes; y la suspensión implica las circunstancias en las que las obligaciones contractuales pueden suspenderse temporalmente sin generar responsabilidad legal para ninguna de las partes, siempre que se cumplan los requisitos legales correspondientes.

Bibliografía sugerida

Adsuara, G. (19 de junio de 2024). *Cualidades de una persona: qué son, cuáles son y ejemplos*. Psicología-Online <https://www.psicologia-online.com/cualidades-de-una-personaque-son-cuales-son-y-ejemplos-4893.html>

Arias, F. (1989). *Administración de Recursos Humanos*. Trillas.

Carvazos, B. (1998). *Nueva Ley Federal del Trabajo, tematizada y actualizada*. Trillas.

Barranco, M. A. (2013). *La entrevista de selección de personal*. CEP.

Barrón Rosas, N. A. (2019). *Introducción al Trabajo*. SADAMA.

Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. (2024). *Ley Federal del Trabajo*. [archivo PDF]. <https://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/LFT.pdf>

Casares, S. (2006) *Planeación de vida y carrera*. Limusa.

Castañeda, L. (2001). *Un plan de vida para jóvenes. ¿Qué harás con el resto de tu vida?* Poder.

Castillo, I. (24 de noviembre de 2021). *Sectores económicos de México*. Lifeder. <https://www.lifeder.com/sectores-economicos-mexico/>

Fernández, M. (15 diciembre de 2023). *Pruebas psicométricas: 9 ejemplos clave en reclutamiento y selección*. factorial. <https://factorial.mx/blog/pruebas-psicometricas/>

Frederick, D. (noviembre de 2017). *Sectores económicos*. Enciclopedia Iberoamericana. Recuperado el 05 de diciembre de 2024 de <https://enciclopediaiberoamericana.com/sectores-economicos/>

Gordillo, A. (31 mayo de 2023). *¿Qué empresas no están obligadas al pago de reparto de utilidades o PTU? El Contribuyente*. <https://www.elcontribuyente.mx/2023/05/que-empresas-no-estan-obligadas-al-pago-de-reparto-de-utilidades-o-ptu/>

<http://www.imss.gob.mx/imssdigital#menu1>

<https://www.sat.gob.mx/personas/tramites-del-rcf>

<https://www.gob.mx/profedet>

<https://www.gob.mx/stps>

<https://www.gob.mx/consar/articulos/como-me-registro-en-una-afore>

<https://www.gob.mx/conampros/acciones-y-programas/derechos-laborales-de-los-trabajadores>

IDC. (18 abril de 2022). *Generalidades de PTU*. <https://idconline.mx/laboral/2022/04/18/generalidades-de-ptu>

indeed Orientación profesional. (21 de agosto de 2024). *Qué es una carta de presentación y cómo hacerla*. Recuperado el 5 de diciembre de 2024 de <https://mx.indeed.com/orientacion-profesional/cv-cartas-presentacion/que-es-una-carta-de-presentacion>

Maslow, A. (1991). *Motivación y Personalidad*. Díaz de Santos.

Pardo, & B.I. (2001). *Jóvenes construyendo su proyecto de vida*. Neisa.

Ramos, A. (26 marzo de 2015). *Modalidades de las relaciones de trabajo*. Actualidad y Estudio. <https://caridadenlaverdad.wordpress.com/2015/03/26/modalidades-de-las-relaciones-de-trabajo/>

Reyes, P. A. (1994). Administración de personal: sueldos y salarios. Segunda parte. Limusa

Torres, A. (3 de octubre de 2024). *Cómo hacer un plan de vida (en 8 pasos)*. Psicología y Mente. Recuperado el 05 de diciembre de 2024 de <https://psicologiaymente.com/vida/plan-de-vida>

Voccia, L. (11 de mayo de 2022). Profesiones y oficios en México: cuáles cursar en 2022. cursos ycarreras.com. <https://www.cursosycarreras.com.mx/orientacion/profesiones/>

11. Recursos Humanos

11.1. Desarrollo de la administración

11.1.1. El origen de la administración y evolución de las diferentes teorías

En los inicios de la aparición del hombre en la tierra, se tuvo la necesidad de trabajar en grupo para el desarrollo humano. Dado que la administración existió no como una disciplina, sino como un medio para coordinar los esfuerzos y lograr objetivos comunes. Estos logros que el ser humano desarrolló en el ámbito tecnológico, social y económico, se relacionan con la administración. Así surgieron las escuelas y teorías que contribuyeron con la consolidación de la administración como una ciencia.

En la prehistoria, el ser humano necesitó organizar actividades para su supervivencia, como la caza, la recolección y la búsqueda de asentamientos seguros. Estas tareas, aunque sencillas, emplearon de una planificación y coordinación básica.

Las grandes civilizaciones, como la egipcia, la romana, o la griega, desarrollaron formas más complejas en la gestión de recursos, organizar ejércitos y construir obras monumentales. Filósofos como Sócrates y Platón visualizaron la importancia de la especialización, la jerarquía y la planeación para el buen funcionamiento de una sociedad.

La administración ha evolucionado desde los rudimentarios esfuerzos de supervivencia en la prehistoria hasta convertirse en una disciplina formal y compleja, impulsada por las contribuciones de visionarios y sus teorías, como Charles Babbage, Frederick Winslow Taylor, Henry L. Gantt, Henri Fayol, Max Weber, Robert Owen, entre otros, y marcada por los cambios tecnológicos y sociales de la Revolución Industrial.

La teoría científica se caracteriza por la optimización de los procesos, la especialización de las tareas y la selección de los trabajadores más adecuados para cada puesto, basándose en estudios de tiempos y movimientos; Frederick Winslow Taylor es uno de sus representantes. En cuanto a la teoría humanista destaca la importancia de las relaciones sociales y la motivación del personal para lograr los objetivos organizacionales, por lo que se interesó en el efecto de las condiciones sociales de trabajo y la atención que se presta a los empleados; uno de sus representantes es Elton Mayo quien lideró los famosos experimentos en Western Electric. Mientras que la teoría neohumano-relacionista es una evolución de las teorías anteriores, que critica la falta de profundidad en el estudio del comportamiento individual de la teoría de las relaciones humanas; se enfoca en la participación del trabajador y el desarrollo de técnicas sofisticadas para motivar el aumento de la productividad; entre sus representantes se encuentran Douglas McGregor, Abraham Maslow y Frederick Herzberg.

11.1.2. La importancia de la administración en las empresas y en la vida cotidiana

Con el paso del tiempo, surgieron teorías administrativas contemporáneas que retoman aspectos de las teorías y escuelas antecesoras. Cabe señalar que la importancia de las estrategias administrativas radica en que también es aplicable en aspectos cotidianos, por ejemplo, a la hora de una planificación para algún evento escolar.

Las teorías administrativas contemporáneas incluyen la planeación estratégica, que se enfoca en establecer metas a largo plazo y diseñar planes para alcanzarlas, y la planeación por objetivos (o Administración por Objetivos - APO), define metas SMART (Específicas, Medibles, Alcanzables, Relevantes y Temporales) para cada área de la organización, buscando alinear esfuerzos y evaluar el desempeño de manera continua.

Entonces, se entiende por administración como el proceso de planificar, organizar, dirigir y controlar recursos (humanos, financieros, materiales y tecnológicos) y actividades dentro de una organización, o incluso a nivel personal, con el fin de alcanzar objetivos específicos de manera eficiente y eficaz. ¿Cuál es el alcance de la administración? En las organizaciones, la administración es fundamental para definir estructuras, coordinar equipos y procesos, y adaptarse a entornos cambiantes; mientras que, en la vida diaria, se manifiesta en la planificación de metas, la gestión del presupuesto familiar y la organización de estudios y actividades, asegurando un crecimiento personal y familiar.

11.2. El proceso administrativo

11.2.1. El proceso administrativo

El proceso administrativo es un conjunto de fases o etapas interrelacionadas que las organizaciones siguen para alcanzar sus objetivos de manera eficiente. Fue conceptualizado inicialmente por Henri Fayol, quien lo definió como la base de la administración y lo desglosó en varias funciones esenciales.

11.2.1. Etapas del proceso administrativo

El proceso administrativo se divide tradicionalmente en cuatro etapas principales: dos en una fase mecánica (planeación y organización) y dos en una fase dinámica (dirección y control).

- I. Fase mecánica o estructural. Se enfoca en la planificación y organización de las actividades, es la parte teórica y estática del proceso. Con la planeación se establecen los objetivos, las estrategias, los planes de acción y las metas a corto, mediano y largo plazo; con lo que se prevé el futuro y se define el camino a seguir, considerando los recursos disponibles. En cuanto a la organización se distribuyen y coordinan los recursos, incluyendo el tiempo de los empleados, los materiales, la tecnología y los recursos financieros; por lo que, se definen las tareas, responsabilidades y la jerarquía de la empresa.
- II. Fase dinámica u operativa. Se centra en la ejecución y el seguimiento de las actividades previamente estructuradas. En la dirección se ejecutan las actividades necesarias, orientando, supervisando e inspirando a los equipos para que logren los objetivos establecidos; esto quiere decir que implica el ejercicio del liderazgo para la conducción y orientación de los recursos. Finalmente, con el control se establecen estándares para evaluar los resultados obtenidos en comparación con lo planeado. Tiene como finalidad corregir desviaciones, prevenir errores, asegurar la calidad y garantizar el cumplimiento de los planes.

11.3. La empresa y el recurso humano

11.3.1. La empresa, sus áreas funcionales y recursos

La empresa nació para atender las necesidades de la sociedad al crear factores a cambio de una retribución que compensara el riesgo, los esfuerzos y las inversiones de los empresarios. Para que una empresa cumpla con sus objetivos, es necesario que se distribuyan las funciones. Es así como las áreas funcionales integran las actividades específicas y responsabilidades. Como ejemplos de áreas funcionales se encuentran Producción, Finanzas, Marketing, Recursos Humanos y, en ocasiones, Tecnología y Logística.

También es necesario que para que una empresa puede operar, cuente con recursos que la sostengan, como los recursos humanos que son las personas que trabajan en las empresas y son considerados como el recurso más importante dentro de la empresa. Otros ejemplos de recursos están los financieros (dinero o préstamos), materiales (maquinaria o materias primas) o tecnológicos (*software* o sistemas de

información), los cuales son administrados por las áreas funcionales correspondientes para llevar a cabo sus operaciones y metas.

Es importante que exista una colaboración y coordinación entre las áreas funcionales y una gestión correcta de los recursos para garantizar el éxito y la eficiencia de cualquier empresa.

11.3.2. Aplicación del proceso administrativo en el área de recursos humanos

Ejemplificar el uso del proceso administrativo permite reconocer las diferencias entre cada una de las etapas por las que está integrado. Un ejemplo práctico del proceso administrativo es el lanzamiento de un nuevo producto por parte de una empresa. Este proceso involucra planificar la investigación de mercado y el desarrollo del producto; organizar el equipo de marketing y producción; dirigir la campaña publicitaria y la distribución; y controlar las ventas y la retroalimentación del cliente para asegurar el éxito del producto.

11.4. Manuales administrativos

11.4.1. Finalidad de implementar los distintos manuales administrativos en las empresas

Los manuales administrativos son instrumentos que persiguen alcanzar la máxima eficacia y eficiencia en la ejecución del trabajo asignado. Tienen por objetivo orientar al personal, optimizar las operaciones y facilitar la comunicación.

Los manuales administrativos contienen los antecedentes, la estructura los objetivos, las políticas, las funciones, las responsabilidades, los procedimientos y las operaciones de una empresa.

Hay diferentes tipos de manuales administración, como de bienvenida, organización, procedimientos o de políticas.

11.5. Manual de procedimientos

11.5.1. Importancia de los manuales que describan los procedimientos de la empresa

El manual de procedimientos es un componente del sistema de control interno, con el fin de obtener información detallada, ordenada y sistemática, en el que se integran las instrucciones, responsabilidades e información sobre políticas, funciones, sistemas y procedimientos de las distintas actividades que se realizan en una organización. Su propósito principal es estandarizar operaciones, facilitar la capacitación del personal, mejorar la toma de decisiones, optimizar el uso de recursos y permitir el control y la evaluación del trabajo.

11.5.2. Herramientas gráficas

Para la organización de las funciones a describir en un manual de procedimientos, hay herramientas gráficas de apoyo, como el diagrama de flujo o una gráfica de Gantt, cada una de ellas tiene características específicas que podrán visualizar y resumir un objetivo.

Un diagrama de flujo representa visualmente el orden y la secuencia de los pasos en un proceso; enfoca la secuencia de acciones y puntos de decisión. Mientras que un diagrama de Gantt es una herramienta de gestión de proyectos que muestra tareas, su duración, dependencias y el cronograma en una línea de tiempo con barras horizontales; por lo tanto, se centra en la planificación y el progreso de las tareas de un proyecto a lo largo del tiempo.

¿Cuáles son las diferencias entre estas dos herramientas gráficas?

- Enfoque. Un diagrama de flujo se enfoca en la secuencia de un proceso; mientras que, un diagrama de Gantt se enfoca en la programación temporal de un proyecto.
- Representación. Los diagramas de flujo usan símbolos para identificar una serie de pasos y decisiones; en cuanto a los diagramas de Gantt usan barras para las tareas.
- Función. El diagrama de flujo optimiza la visualización de un proceso y el diagrama de Gantt es de gran ayuda para la visualización en la planificación de proyectos.

11.6. Reclutamiento interno y externo

11.6.1. Características de un puesto para el reclutamiento de personal

El reclutamiento es un conjunto de actividades cuya finalidad es atraer candidatos debidamente calificados y que reúnan los requisitos para ocupar un puesto dentro de la organización. Este proceso es un paso clave dentro de la contratación, que abarca desde la publicación de anuncios en portales de empleo y redes sociales, hasta la búsqueda activa de talento y finaliza una vez que se han recibido a los postulantes, dando paso a la fase de selección.

¿Cuál es la importancia del reclutamiento?

- Identificar candidatos al encontrar a las personas con el potencial y las habilidades para un puesto vacante.
- Atraer talento y motivar a los candidatos para que se interesen en las oportunidades y postulen a las vacantes disponibles.
- Construir equipos sólidos e integrar una fuerza laboral diversa y talentosa que impulse el éxito y el crecimiento de una empresa.
- Asegurar la cultura organizacional al buscar personas que se alineen con los valores y la visión de la empresa.

11.6.2. Fuentes y medios para la captación de personal

Para encontrar a posibles candidatos, se requiere de difundir por fuentes y medios internos o externos de las vacantes disponibles.

Las fuentes de reclutamiento son los lugares en donde se encuentran a candidatos potenciales. Se clasifican en internas cuando se busca talento dentro de la propia empresa; como promoción o transferencias de empleados actuales a un nuevo puesto, recontractación de personal que laboraron anteriormente, currículums de postulantes que no fueron seleccionados en un momento anterior. O externas cuando se busca fuera de la organización; mediante bolsas de trabajo o agencias de colocación.

En cuanto a los medios de reclutamiento son los canales mediante los cuales se transmite el mensaje que dará a conocer dicha vacante. También se clasifican en internos como boletines o pizarrón; como en externos como medios impresos, periódicos, o volantes.

Hacer uso de una combinación de fuentes y medios permitirá a una empresa optimizar el proceso de reclutamiento para encontrar al candidato más adecuado.

11.7. Selección de personal

11.7.1. Selección de personal

La selección de personal es el proceso estratégico del área funcional de Recursos Humanos que consiste en evaluar a los candidatos que aplican a un puesto vacante para identificar y contratar al profesional con las habilidades, experiencia y competencias que mejor se alinean con las necesidades de la empresa y su cultura. Comienza después de la fase de reclutamiento y permite a la empresa incorporar el talento adecuado, transformando el capital humano en una ventaja competitiva. Durante la selección de personal intervienen los siguientes momentos:

1. Criba curricular donde se realiza un primer filtro de las solicitudes para identificar a los candidatos que cumplen con los requisitos básicos del puesto.
2. Se aplican pruebas y exámenes, como test de aptitud, inteligencia y personalidad, para evaluar las competencias de los candidatos.
3. Las entrevistas para profundizar en las habilidades, experiencia y adecuación del candidato a un determinado puesto y a la empresa.
4. Verificación de referencias donde se contacta a empleadores anteriores para corroborar la información proporcionada por los candidatos.
5. Evaluación del encaje cultural donde se identifica si los valores individuales del candidato se alinean con los valores de la organización.
6. Para pasar a la contratación momento en el que se elige al candidato idóneo para la vacante.

11.8. Contratación e inducción de personal

11.8.1. Contratación de personal

La contratación de personal es el proceso de seleccionar a candidatos calificados para ocupar puestos vacantes, culminando con la formalización del contrato de trabajo y la incorporación del nuevo empleado a una organización. Este proceso requiere de la identificación de la necesidad de capital humano. Hay que tomar en cuenta los siguientes puntos:

- Considerar cuando sea una necesidad real ya que es importante no apresurarse pues una decisión apresurada puede impactar negativamente en la cultura y futuro de la empresa.
- El proceso debe apegarse a las leyes laborales vigentes, como la Ley Federal del Trabajo, para garantizar los derechos de ambas partes.

11.8.2. Inducción del empleado de nuevo ingreso

La inducción de personal es el proceso formal de integración de un nuevo empleado a una empresa, donde se le familiariza con su puesto de trabajo, el equipo, la cultura, la misión, la visión y los valores de la organización. Su objetivo principal es facilitar la adaptación del nuevo colaborador, aumentar su compromiso y productividad, disminuir el estrés y la ansiedad, y reducir la rotación de personal. Intervienen los siguientes elementos:

- Se recibe al nuevo empleado de manera acogedora para que se sienta cómodo desde el primer día.
- Se presenta la historia, filosofía, cultura, misión, visión y valores de la empresa.

- Se explica el organigrama y se presentan las personas con las que el nuevo colaborador trabajará.
- Se especifica el rol del nuevo empleado, sus tareas y responsabilidades.
- Se proporciona información sobre políticas, normas y procedimientos básicos de la empresa.
- Se introduce al nuevo miembro a la cultura de la empresa y sus patrones de conducta.

¿Cuáles son los beneficios de una buena inducción?

- Ayuda al nuevo empleado a adaptarse rápidamente a su nuevo entorno laboral.
- Un colaborador bien informado e integrado es más productivo y eficiente.
- Reduce la ansiedad y la desilusión que pueden surgir en los primeros días por falta de información.
- Fomenta un lazo más fuerte entre la empresa y el trabajador, aumentando su lealtad.
- Una información adecuada evita confusiones y malentendidos en las tareas.

11.9. Marco legal de la nómina

11.9.1. Leyes vigentes que regulan el pago de la nómina.

Las leyes que regulan el pago de la nómina en México incluyen principalmente la Ley Federal del Trabajo (LFT), la Ley del Seguro Social (LSS), la Ley del Impuesto sobre la Renta (LISR), el Código Fiscal de la Federación (CFF), artículo 123 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos y las leyes relacionadas con las aportaciones al INFONAVIT y al FONACOT. Estas leyes establecen obligaciones sobre salarios, tiempo extra, prestaciones, retenciones de impuestos, aportaciones a la seguridad social y otros elementos relacionados con el pago de los trabajadores.

- Ley Federal del Trabajo regula las relaciones laborales y se enfoca en aspectos como salario mínimo, prestaciones, jornadas laborales y pago del salario.
- Ley del Seguro Social regula el pago de cuotas al Instituto Mexicano del Seguro Social y otros beneficios para los trabajadores.
- Ley del Impuesto sobre la Renta establece la obligación de retener y pagar el impuesto sobre la renta (ISR) a los trabajadores.
- Código Fiscal de la Federación es un compendio de leyes fiscales que rige las obligaciones tributarias de los contribuyentes, incluyendo las deducciones y el cumplimiento de pagos al gobierno.
- Ley del Instituto del Fondo Nacional de la Vivienda para los Trabajadores regula las aportaciones que los empleadores deben realizar para la vivienda de los trabajadores.
- Ley del Instituto del Fondo Nacional para el Consumo de los Trabajadores establece las normas para las retenciones de nómina destinadas a los créditos otorgados por el Fondo Nacional para el Consumo de los Trabajadores (Fonacot).

Se debe considerar los siguientes puntos:

- Actualizaciones. Es fundamental estar al tanto de las actualizaciones anuales en las leyes fiscales, laborales y de seguridad social que puedan afectar el cálculo y el timbrado de la nómina.

- Consecuencias del incumplimiento. No cumplir con estas leyes puede resultar en multas, recargos, auditorías por parte del SAT o IMSS, y generar conflictos laborales.
- Digitalización. La digitalización del proceso de nómina es una buena práctica para integrar el cálculo, el timbrado, los reportes fiscales y las actualizaciones normativas en un solo sistema.

11.10. Cálculo de las percepciones, deducciones e integración de la seguridad social

11.10.1. Cálculo de las percepciones de la nómina

Los recibos de nómina contienen percepciones, que se definen como la cantidad de dinero que recibe un trabajador por realizar las tareas y funciones que demanda una empresa durante un periodo comprendido, puede ser semanal, quincenal o mensual. Hay percepciones ordinarias (salario, aguinaldo o prima vacacional) y extraordinarias (prima dominical, tiempo extraordinario y días de descanso obligatorio).

Para calcular las percepciones de nómina, se debe sumar el salario base con todas las percepciones adicionales (bonos, horas extra y comisiones) para obtener el sueldo bruto del trabajador. Este total se utiliza para calcular las deducciones legales y voluntarias (ISR, IMSS, Infonavit y préstamos), y la resta de estas al sueldo bruto resulta en el salario neto a pagar.

1. Identificar el salario base que es el sueldo fijo que recibe el trabajador por su trabajo, usualmente se basa en un salario mensual o diario.
2. Agregar las percepciones adicionales:
 - Comisiones y bonos que son los pagos por cumplimiento de objetivos o desempeño.
 - Horas extra que es el pago por el tiempo de trabajo extraordinario.
 - Primas como la prima dominical, que es un pago adicional por laborar en día domingo.
 - Prestaciones son los beneficios adicionales que pueden incluir vales de despensa, fondo de ahorro, o ayuda de transporte.
3. Sumar todas las percepciones, es decir, se suma el salario base con todos los pagos adicionales para obtener el total de percepciones, a este monto se le denomina sueldo bruto.

Mariana tiene un sueldo base mensual de \$15,000.00. Si este mes laboró tiempo extra por el que le pagaran \$1,500.00 y también recibirá un bono de \$1,000.00, ¿cuál es el monto del sueldo bruto que le corresponde a Mariana?:

- Salario base: \$15,000.00 pesos
- Horas extra: \$1,500.00 pesos
- Bonos: \$1,000.00 pesos
- Total de percepciones: $\$15,000.00 + \$1,500.00 + \$1,000.00 = \$17,500.00$ pesos

Una vez calculado el total de percepciones, se procede a determinar las deducciones para llegar al sueldo neto.

11.10.2. Cálculo de las deducciones de la nómina

Por otro lado, también se encuentran las deducciones, que son aquellos montos que se descuentan al salario base del trabajador. El artículo 101 de la Ley Federal del Trabajo menciona que los trabajadores tienen derecho a ser informados sobre sus descuentos de forma detallada. Entre las deducciones están la retención de ISR, descuentos como faltas, licencias, permisos, caja de ahorro, cuota sindical o préstamos.

Para calcular las deducciones de nómina de un empleado, se resta el total de las deducciones del salario bruto para obtener el salario neto. Un ejemplo básico sería un sueldo bruto de \$10,000.00.00 pesos y deducciones totales por \$2,000.00 pesos, resultando en un pago neto de \$8,000.00.

Para calcular el sueldo neto para un empleado con un salario bruto mensual de \$11,500.00 pesos, considerando la deducción del impuesto sobre la renta y la siguiente tabla:

- V. Tarifa aplicable durante 2025 para el cálculo de los pagos provisionales mensuales a que se refieren los artículos 96 de la Ley del ISR y 175 de su Reglamento, así como la regla 3.12.2.

Límite inferior	Límite superior	Cuota fija	Por ciento para aplicarse sobre el excedente del límite inferior
\$	\$	\$	%
0.01	746.04	0.00	1.92
746.05	6,332.05	14.32	6.40
6,332.06	11,128.01	371.83	10.88
11,128.02	12,935.82	893.63	16.00
12,935.83	15,487.71	1,182.88	17.92
15,487.72	31,236.49	1,640.18	21.36
31,236.50	49,233.00	5,004.12	23.52
49,233.01	93,993.90	9,236.89	30.00
93,993.91	125,325.20	22,665.17	32.00
125,325.21	375,975.61	32,691.18	34.00
375,975.62	En adelante	117,912.32	35.00

Secretaría de Hacienda y Crédito Público (2024). Anexo 8 de la Resolución Miscelánea Fiscal para 2025. *Diario Oficial de la Federación*.

- Se busca el límite inferior en la tabla de ISR para el salario de \$11,500.00.
- La base para el cálculo es: \$11,500.00 (sueldo bruto) - \$11,128.02 (límite inferior) = \$371.98.
- Se aplica la tasa del 16% a esta base: \$371.98 x 16% = \$59.5168.
- Se le suma la cuota fija: \$59.5168 + \$893.63 = \$953.1468.
- Este es el monto total del ISR a deducir del salario bruto.
- Al salario bruto \$11,500.00 se le resta \$953.1468 y se obtiene el salario neto de \$10,546.85.

El cálculo del ISR se realiza con base en tablas oficiales que varían según el rango de ingresos y son emitidas por el Diario Oficial de la Federación.

11.10.3. Incorporación a la seguridad social o INFONAVIT

Las cuotas obrero patronal son la suma total del monto que se aporta al Instituto Mexicano del Seguro Social, están a cargo del patrón y el trabajador. Para realizar dicho cálculo es importante saber cuál es el salario base de cotización (artículo 27 de la Ley de Seguro Social) y su factor de integración, así como su respectivo calculo. Estos cálculos nos permiten saber cuánto se deberá pagar al IMSS y al trabajador, contemplando las percepciones y deducciones. Esta incorporación depende de la situación laboral de cada persona. Existen diferentes modalidades para afiliarse, siendo las más comunes la afiliación para trabajadores asalariados, la incorporación voluntaria para independientes y la continuación voluntaria para quienes dejan de trabajar.

En cuanto a obtener un crédito Infonavit es necesario tener una relación laboral vigente, contar con al menos 880 puntos, haber acumulado por lo menos 3 bimestres de cotización continua y tener saldo en tu Subcuenta de Vivienda.

11.11. Salud, higiene y seguridad laboral

11.11.1. La salud laboral de los trabajadores

La salud laboral es el conjunto de actividades y disciplinas enfocadas en el bienestar físico, psíquico y social de los trabajadores, que tiene por fin la prevención de enfermedades, lesiones y accidentes derivados de las condiciones de trabajo. Por lo tanto, la salud laboral pretende proteger la integridad de los trabajadores mediante la identificación, evaluación y control de los riesgos en el ambiente laboral, incluyendo factores ambientales, ergonómicos y psicosociales. Entre sus objetivos están evitar que los trabajadores se enfermen o sufran lesiones, preservar la integridad física y mental de las personas, asegurar un ambiente de trabajo saludable y seguro o promover la salud y el bienestar general de la fuerza laboral.

11.11.2. Medidas de seguridad e higiene en la organización

Para promover la mejora de la seguridad y salud de los trabajadores, es importante reconocer las medidas de seguridad e higiene como aquellas prácticas y regulaciones que previenen accidentes y enfermedades laborales. Por ejemplo, en la higiene personal como el lavado de manos, hasta el uso de equipo de protección personal, mantenimiento de maquinaria, y capacitación en seguridad. En México, estas normativas son establecidas por la Secretaría del Trabajo y Previsión Social a través de las Normas Oficiales Mexicana para garantizar un ambiente laboral seguro y saludable.

Medidas generales de seguridad e higiene

- Higiene personal. Incluye lavarse las manos con agua y jabón, bañarse diariamente, mantener las uñas limpias y cortas, y usar cubrebocas si es necesario.
- Uso de equipo de protección personal. Es obligatorio el uso de batas, delantales, manguitos, mascarillas y guantes para proteger al trabajador de riesgos.
- Capacitación y formación. Los trabajadores deben recibir capacitación para realizar sus tareas de forma segura y deben comunicar si no se sienten capacitados.
- Mantenimiento de equipos. Asegurar que la maquinaria esté en buenas condiciones, con protectores y dispositivos de seguridad funcionando, es crucial para prevenir accidentes.

- Orden y limpieza. Mantener el lugar de trabajo limpio y ordenado, eliminando líquidos en el suelo o paredes y realizando una buena gestión de residuos.
- Señalización. Utilizar letreros para identificar riesgos, rutas de evacuación y áreas restringidas.
- Ergonomía. Adaptar los puestos de trabajo para que sean cómodos y no causen fatiga o lesiones.
- Control de sustancias peligrosas. Gestionar de manera segura y controlada las sustancias químicas y peligrosas presentes en el entorno laboral.
- Preparación y respuesta ante emergencias. Tener planes para actuar en caso de incendios, derrames u otras emergencias, incluyendo la revisión y mantenimiento de extintores.

11.11.3. Consideraciones jurídicas

Toda empresa debe cumplir con condiciones mínimas para garantizar la seguridad de sus trabajadores, por lo que la clasificación general de las Normas Oficiales Mexicanas de Seguridad y Salud en el Trabajo, se enfocan en los factores de riesgo que podrían poner en riesgo la integridad de los empleados. Estas normas son regulaciones obligatorias emitidas por la Secretaría del Trabajo y Previsión Social (STPS) que establecen los requisitos mínimos para proteger la integridad física y la salud de los trabajadores en los centros laborales de México. Son 41 normas vigentes que se agrupan en cinco categorías: de seguridad, salud, organización, específicas y de producto.

¿Cuál es la importancia de reconocer estas normas? Porque protegen a los trabajadores al prevenir accidentes y enfermedades laborales, mejorando el bienestar de los empleados; establecen estándares al delimitar las condiciones mínimas de operación y mantenimiento; también, porque promueven la calidad al aseguran que los procesos y servicios cumplan con estándares de seguridad.

11.12. Factores de riesgo y prácticas de riesgo

11.12.1. Importancia de identificar los factores de riesgo y las condiciones peligrosas

Para prevenir oportunamente los accidentes de trabajo o las enfermedades en el personal de una empresa es importante identificar las características y clasificación de los factores de riesgo en: físicos, químicos, biológicos, ergonómicos y psicosociales. Se deben analizar las condiciones del puesto de trabajo para detectar estos riesgos y establecer las medidas preventivas pertinentes. A continuación, se describen los factores de riesgo:

- Físicos son aquellos que provienen del ambiente laboral y pueden causar daños. Como ejemplos están las temperaturas extremas, ruido constante, vibraciones, radiaciones, iluminación inadecuada o condiciones climáticas.
- Químicos son los riesgos causados por la exposición a sustancias tóxicas en estado sólido, líquido o gaseoso, como con polvos, vapores, humos, aerosoles, neblinas o gases.
- Biológicos son los peligros asociados a la exposición a organismos vivos, como los virus, bacterias, hongos, parásitos, y la exposición a vectores (como mosquitos) o animales.
- Ergonómicos son los relacionados con la exigencia física y la interacción entre el trabajador y su entorno de trabajo. Por ejemplos, posturas forzadas, movimientos repetitivos, sobreesfuerzo en el manejo manual de cargas o utilizar una silla fija.

- Psicosociales son los factores que afectan la relación del trabajador con su entorno laboral y las demandas del puesto. Por ejemplos, carga excesiva de trabajo, monotonía, falta de control sobre las decisiones, relaciones interpersonales conflictivas, violencia laboral o jornadas laborales extensas.

En cuanto a las prácticas de riesgo son acciones o comportamientos de los trabajadores que aumentan el riesgo de un accidente. Por ejemplo, no prestar atención al trabajo, improvisar en lugar de seguir procedimientos seguros o no utilizar el equipo de protección personal proporcionado por la empresa.

11.12.2. Importancia de identificar las prácticas de riesgo

Identificar los riesgos laborales es crucial porque previene accidentes y enfermedades, protege la salud y el bienestar de los trabajadores, asegura el cumplimiento de la normativa legal, mejora la productividad al reducir paros y daños, y fomenta una cultura de seguridad dentro de la empresa, lo que beneficia la reputación corporativa y la moral del equipo. Entre los beneficios de identificar las prácticas de riesgo se encuentran:

- Protección de los trabajadores. Es la base para proteger la salud y seguridad de las personas en su entorno de trabajo, previniendo lesiones y enfermedades profesionales.
- Cumplimiento legal. Las regulaciones de salud y seguridad laboral exigen la identificación y evaluación de riesgos. Cumplir estas normativas evita sanciones y demuestra el compromiso de la empresa.
- Prevención de accidentes. Al reconocer los peligros, las organizaciones pueden implementar medidas preventivas para reducir la probabilidad de incidentes.
- Mejora continua. Permite adaptar la empresa a cambios en los procesos, tecnologías o el entorno laboral, mejorando la capacidad de gestionar los riesgos de forma dinámica.
- Cultura de seguridad. Involucra a todos los miembros de la empresa, desde los trabajadores hasta los directivos, para crear un entorno más seguro y colaborativo.
- Impacto económico. La prevención de accidentes reduce los costos asociados a bajas laborales, daños materiales y pérdida de productividad, mejorando la eficiencia de la empresa.
- Mejora de la imagen corporativa. Una empresa que se preocupa por la seguridad de sus trabajadores proyecta una imagen de responsabilidad, lo que atrae talento y fortalece sus relaciones comerciales.

11.13. Medidas preventivas

11.13.1. Prevención de riesgos

Un programa de prevención de riesgos laborales es un conjunto de medidas y acciones planificadas, diseñadas para identificar, evaluar y controlar los peligros en el entorno de trabajo, con el fin de garantizar la seguridad y salud de los empleados. Su implementación es obligatoria en la mayoría de las empresas, ya que crea una cultura preventiva, minimiza accidentes y enfermedades profesionales y ayuda a cumplir con la normativa legal, evitando sanciones y multas. Para su elaboración es necesario identificar los riesgos, evaluar los riesgos, las medidas de seguridad, formación y capacitación, los procedimientos y protocolos a seguir.

¿Por qué es importante implementar un programa de prevención de riesgos? Porque asegura el cumplimiento de las normativas y evita sanciones, brinda un entorno de trabajo más seguro y saludable para los involucrados, así como disminuye los gastos asociados a accidentes, bajas laborales y

compensaciones. Lo que conlleva a contar con un personal saludable y seguro que contribuya a la eficiencia de la empresa y promueva una actitud de seguridad en todos los niveles de la organización.

11.13.2. Medidas preventivas

Una vez que se reconocen los factores de riesgo que pueden afectar la salud de los trabajadores, es necesario analizar estrategias que reflejen las medidas preventivas que ayuden a minimizar su impacto. Estas medidas preventivas deben evitar riesgos, adaptar el trabajo a la persona, mantener el orden y la limpieza, priorizar el uso del equipo de protección personal, así como realizar los procedimientos correctamente y dar y recibir la información sobre estos riesgos. Algunos de los propósitos de las medidas preventivas se encuentran:

- Evitar riesgos al eliminar los peligros en su raíz siempre que sea posible.
- Combatir los riesgos con la implementación de medidas para controlar los riesgos identificados desde su origen.
- Adaptar el trabajo a la persona al diseñar el puesto de trabajo de manera ergonómica y segura para el trabajador.
- Comunicar y recibir instrucciones sobre los riesgos y las medidas de seguridad.
- Asegurar que las áreas de trabajo, maquinaria y herramientas estén en un estado de limpieza y orden.

Dependiendo el entorno, donde se desarrolle el trabajo, se delimitarán las medidas preventivas tanto para trabajadores:

- Usar solo el equipo proporcionado y asegurarse de que los dispositivos de seguridad estén instalados y funcionando.
- Notificar de inmediato a los superiores sobre cualquier situación que pueda ser un riesgo para la seguridad.
- Participar activamente en las medidas de prevención implementadas por la organización.
- Realizar las actividades de acuerdo con los métodos y procedimientos establecidos para cada tarea.

Y también hay medidas preventivas para la empresa, por ejemplo:

- Identificar y evaluar los peligros existentes en el entorno laboral.
- Reemplazar sustancias o procesos peligrosos por otros que presenten poco o ningún peligro.
- Dar prioridad a la protección colectiva sobre la individual, como la ventilación general o barandillas.
- Utilizar sensores y dispositivos para verificar en tiempo real las condiciones del ambiente de trabajo.

En conclusión, las medidas preventivas buscan evitar que ocurran accidentes, enfermedades o daños a la salud de los trabajadores, actuando antes de que el riesgo se materialice. Es de suma importancia que se actualice de acuerdo con los cambios en los procedimientos, las técnicas o las herramientas a utilizar.

Bibliografía sugerida

- Álvarez, M. G. (2008). *Manual para elaborar manuales de políticas y procedimientos*. Panorama Editorial.
- Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. (2025). Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos. *Diario Oficial de la Federación*.
- Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. (2025). Ley Federal del Trabajo. *Diario Oficial de la Federación*.
- Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. (2025). Ley del Instituto del Fondo de la Vivienda para los Trabajadores. *Diario Oficial de la Federación*.
- Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. (2024). Ley del Seguro Social. *Diario Oficial de la Federación*.
- Carrera, E. R.; Rivadeneira, C. I.; Navarrete, E. D. y Paredes, A. M. (2019). *Seguridad y salud ocupacional*. Ediciones Grupo Compás.
- Chiavenato, I. (2011). *Administración de recursos humanos. El capital humano de las organizaciones*. McGraw-Hill.
- Chiavenato, I. (2019). *Introducción a la teoría general de la administración*. McGraw-Hill.
- Cortés, J. M. (2012). *Seguridad e higiene del trabajo. Técnicas de prevención de riesgos laborales*. Tébar Flores, S.L.
- Cuéllar, A. (2018). *Seguridad integral de la empresa*. Trillas.
- Dessler, G. y Varela, R. A. (2011). *Administración de recursos humanos. Enfoque latinoamericano*. Pearson Educación.
- Münch, L. (2019). *Administración de capital humano: la gestión del activo más valioso de la organización*. Trillas.
- Münch, L. (2006). *Fundamentos de administración: casos y prácticas*. Trillas.
- Münch, L. (2014). *Administración. Gestión organizacional, enfoques y proceso administrativo*. Pearson Educación.
- Secretaría de Hacienda y Crédito Público (2024). Anexo 8 de la Resolución Miscelánea Fiscal para 2025. *Diario Oficial de la Federación*.

12. Contabilidad

12.1 Antecedente histórico

La contabilidad es una de las primeras disciplinas económicas desarrolladas por el ser humano, vinculada desde tiempos remotos a la noción de economía doméstica. Surgió como una técnica destinada a llevar un registro claro y preciso de actividades, recursos, dinero y otros aspectos esenciales para la organización económica.

Los registros más antiguos de operaciones contables se han encontrado en Babilonia, durante el Antiguo Imperio de Hammurabi (2123-2081 a.C.), así como en diversas dinastías de China, en Grecia y en Italia. En esta última, hacia el siglo XIII, destacan las cuentas llevadas por un comerciante florentino anónimo alrededor del año 1211, con características de la llamada Escuela Florentina. También sobresale el método empleado por la Comuna Genovesa, que utilizaba términos como “debe” y “haber”, asientos cruzados y la cuenta de pérdidas y ganancias, marcando un avance significativo en la contabilidad.

En cuanto a la partida doble, aunque ya se utilizaba antes de este periodo, fue formalizada gracias al fraile franciscano **Fray Luca Pacioli**, originario de San Sepolcro, Toscana. En 1494, Pacioli publicó su obra *Summa de arithmetica, geometría, proportioni et proportionalita*, donde describió este método contable. Es importante señalar que Pacioli no inventó la partida doble, sino que documentó y sistematizó el método empleado por los mercaderes de Venecia en su época, preservándolo para futuras generaciones.

Concepto

De acuerdo a la definición del Instituto Mexicano de Contadores Públicos la contabilidad es una **técnica** que se utiliza para **producir sistemática y estructuradamente**, información cuantitativa expresada en unidades monetarias de las transacciones que realiza una entidad económica y de ciertos eventos económicos identificables y cuantificables que la afectan, con el objeto de facilitar a los diversos interesados el tomar decisiones en relación con dicha entidad económica.

Es **sistemática** porque se procesa poco a poco, desde el momento en que se realiza una operación se debe documentar hasta obtener y proporcionar una información, para fomentar la toma de decisiones.

Es **estructurada** porque sus partes se captan, registran o contabilizan en libros o documentos contables: libro de diario, libro mayor y libros auxiliares, y se analizan para obtener y proporcionar información financiera mediante estados financieros (estado de situación financiera o balance general y estado de resultados).

Conforme a la **Norma de Información Financiera (NIF)¹ A1**, la contabilidad es una técnica que permite registrar las operaciones que afectan económicamente a una entidad y generar información financiera de manera sistemática y estructurada.

¹ Las **NIF** (Normas de Información Financiera) son un conjunto de reglas que establecen cómo presentar los estados financieros de las empresas, con el objetivo de unificar un lenguaje contable entre los países que participan en el mercado global, de igual forma, así mismo, se encargan de garantizar que la información financiera que se proporciona a los usuarios sea confiable y fidedigna, para que pueda ser utilizada en la toma de decisiones. En México, las NIF son emitidas por el **Consejo Mexicano de Normas de Información Financiera (CINIF)**, y su aplicación es obligatoria para las entidades que deben presentar estados financieros bajo los estándares nacionales.

Es importante diferenciar el concepto de contabilidad del de Contaduría Pública. La Contaduría Pública es una disciplina social de carácter científico que fundamentada en una teoría específica y a través de un proceso, obtiene y comprueba información financiera sobre transacciones celebradas por entidades económicas. En ese sentido, la Contaduría Pública es un concepto que incluye el de la contabilidad.

Objetivos de la contabilidad

La contabilidad tiene como propósito principal proporcionar información financiera útil para la toma de decisiones económicas. Sus objetivos específicos incluyen:

1. **Registrar las operaciones financieras**
 - Llevar un registro detallado, ordenado y cronológico de las transacciones económicas de una entidad.
2. **Informar sobre la situación financiera**
 - Mostrar, mediante estados financieros, el patrimonio, los activos, los pasivos, los ingresos y los egresos de una organización en un periodo determinado.
3. **Facilitar la toma de decisiones**
 - Brindar información confiable y oportuna para que los dueños, inversionistas, acreedores y otros interesados puedan evaluar el desempeño y tomar decisiones estratégicas.
4. **Determinar la utilidad o pérdida**
 - Establecer si una entidad ha obtenido ganancias o incurrido en pérdidas en un periodo específico, a través de la relación entre ingresos y gastos.
5. **Cumplir con obligaciones legales y fiscales**
 - Proveer los datos necesarios para el cumplimiento de leyes fiscales, laborales y comerciales.
6. **Proteger y controlar los recursos de la entidad**
 - Facilitar el control interno al supervisar el uso y manejo adecuado de los bienes y recursos de la organización.
7. **Facilitar la planificación y previsión**
 - Ayudar en la elaboración de presupuestos, estimaciones y proyecciones que permitan planificar el futuro financiero de la entidad.

El cumplimiento de estos objetivos asegura que la contabilidad sea una herramienta esencial para la administración, el análisis y la supervisión de las actividades económicas en cualquier tipo de organización.

Tipos de contabilidad

La contabilidad se clasifica en diferentes tipos según el enfoque o área de aplicación. A continuación, se presentan los principales:

1. Contabilidad financiera
2. Contabilidad fiscal
3. Contabilidad administrativa
4. Contabilidad de costos

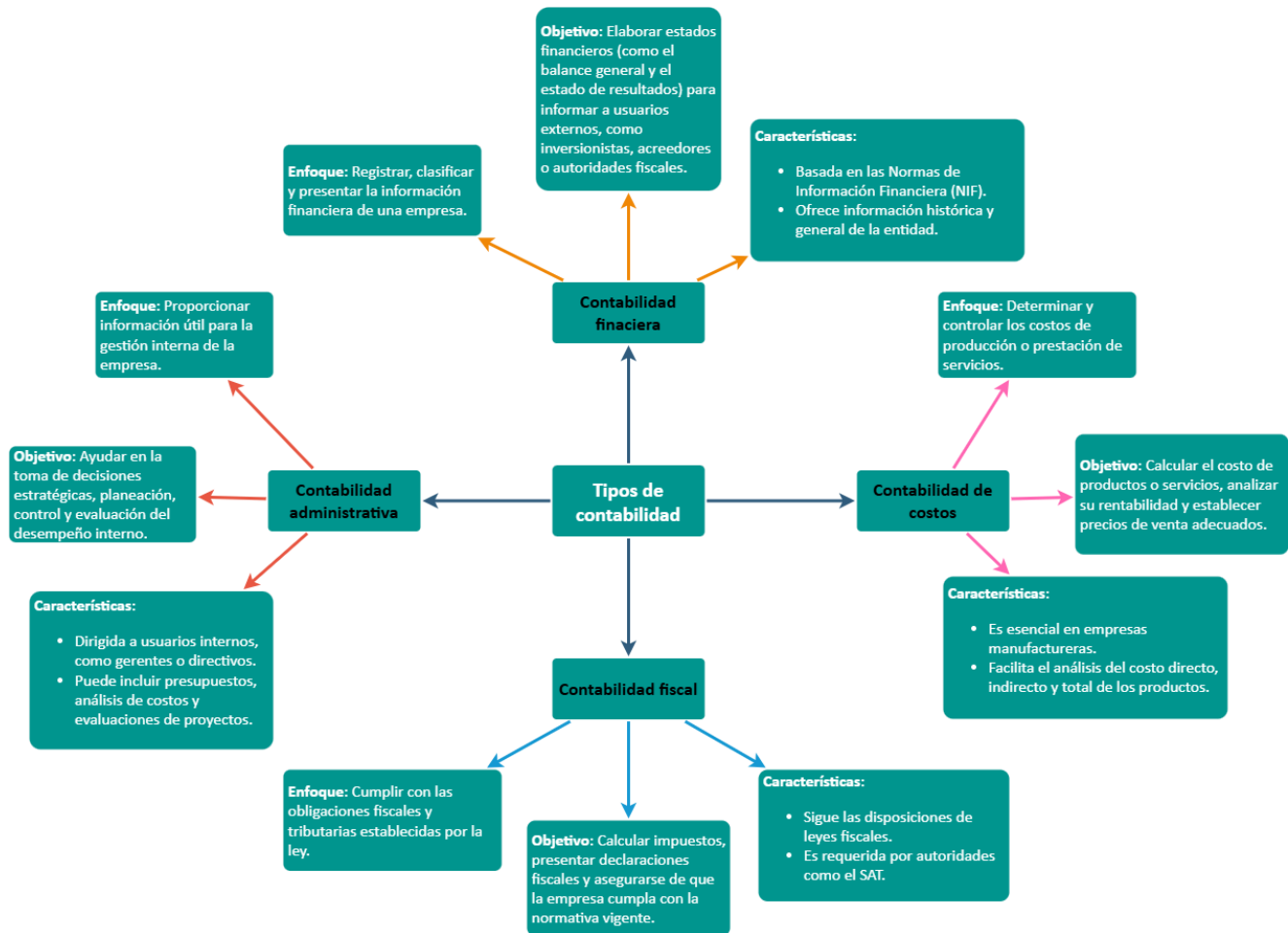


Gráfico 1. Tipos de contabilidad

12.2 Estados financieros principales

Son aquellos en donde se refleja la situación financiera de una entidad económica, mostrando diversas características como son: capacidad de pago, capacidad económica, el resultado de operaciones, etcétera.

Estos son:

1. Estado de situación financiera o balance general
2. Estado de resultados
3. Estado de variaciones en el capital contable
4. Estado de flujo de efectivo

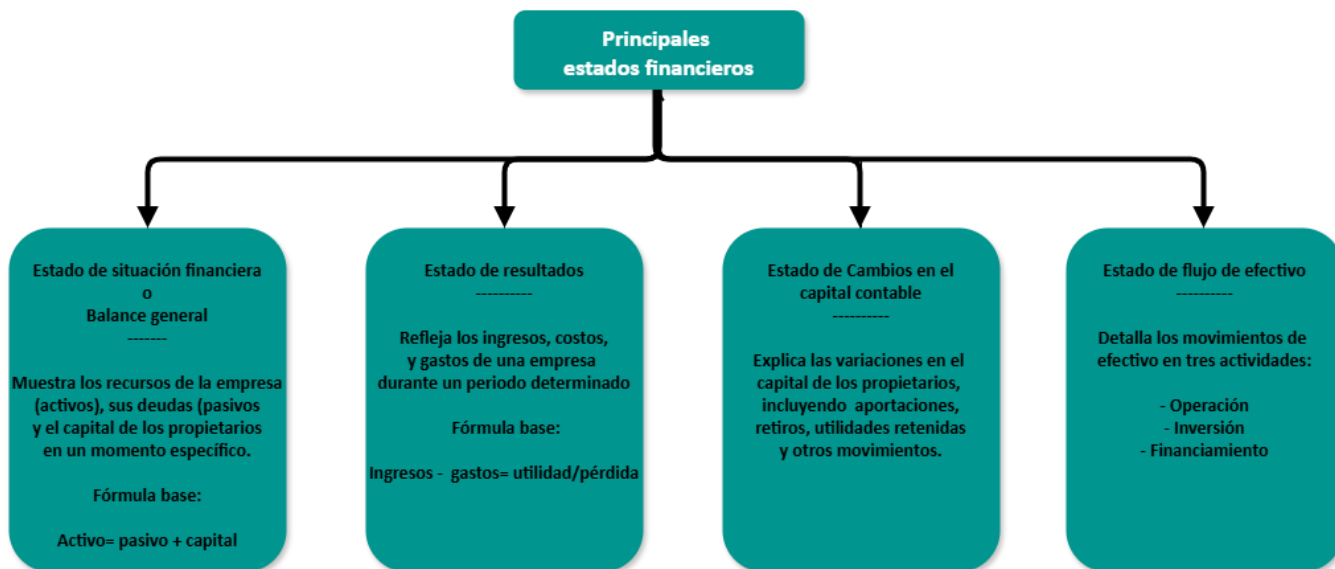


Gráfico 2. Principales estados financieros

Estos estados proporcionan una visión completa del desempeño y la posición financiera de una empresa

12.3 La cuenta

Para la contabilidad, la cuenta es el elemento que permite llevar a cabo la clasificación de las operaciones financieras y comerciales. A través de ésta se representa los elementos que componen financieramente a la empresa, como son bienes y derechos (activos), deudas u obligaciones (pasivo), inversión o patrimonio de los socios (capital), los movimientos y resultados (ganancias o pérdidas).

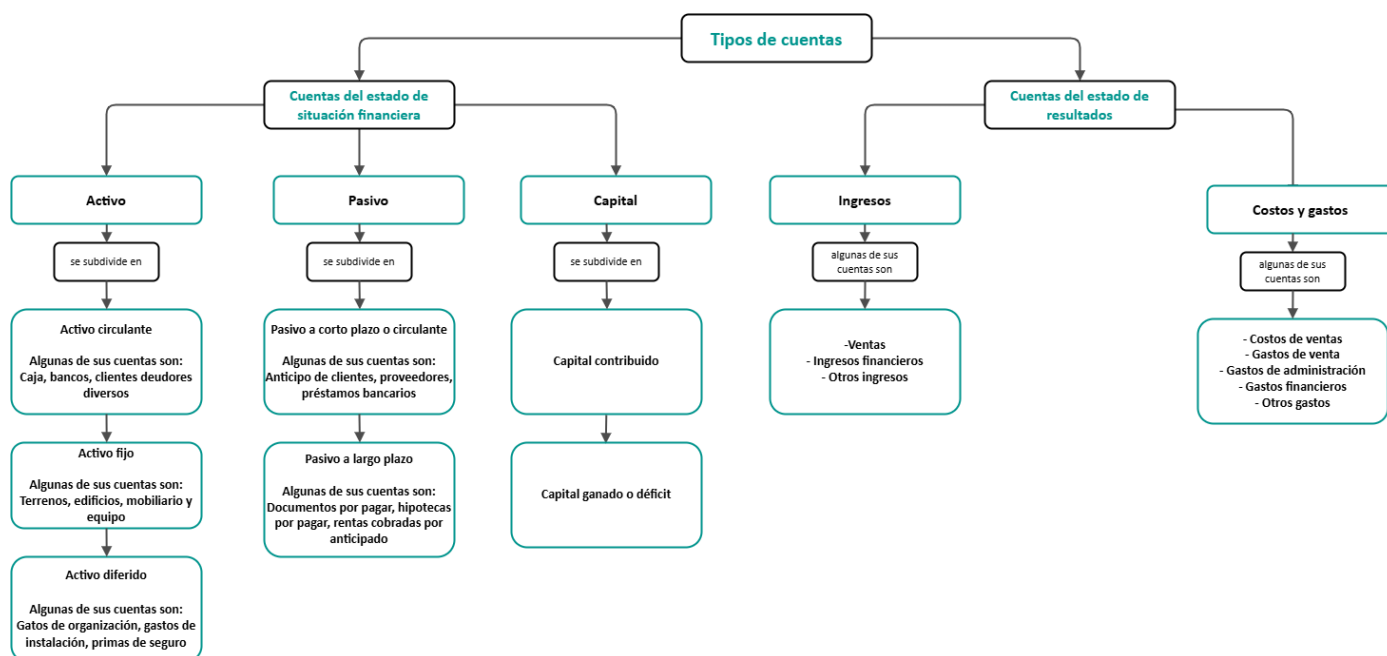
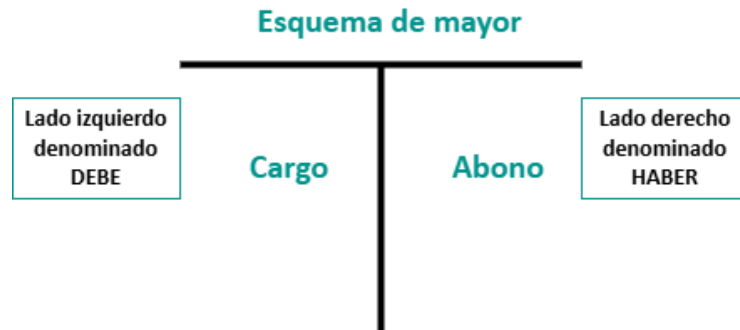


Gráfico3. Tipos de cuentas

La cuenta se representa en el esquema de mayor, conocida también como “T”, ya que corresponde a una representación esquemática de un libro que agrupa las cuentas que integran la contabilidad de una empresa, conocido como libro mayor.



Partes de la cuenta

Nombre de la cuenta: El nombre asignado debe a cada cuenta debe dar una idea clara del concepto a que se refiere.

Columnas de la cuenta. En todas las cuentas se incluyen dos columnas que tienen funciones diferentes:

Debe. Es la columna izquierda de una cuenta, donde se anotan los **cargos** o débitos

Haber. Es la columna derecha de una cuenta, donde se anotan los **abonos** o créditos.

Movimientos de la cuenta: Es la suma de los cargos y de los abonos.

Hay dos tipos de movimientos:

movimiento deudor: es la suma de los cargos de una cuenta. En contabilidad se usan las siglas MD

movimiento acreedor: es la suma de los abonos de una cuenta y sus siglas son MA

Saldo: Es la diferencia entre el movimiento deudor y el acreedor.

Existen dos clases de saldos:

- **Saldo deudor:** Una cuenta tiene saldo deudor cuando su movimiento deudor es mayor que el movimiento acreedor.

- **Saldo acreedor:** Una cuenta tiene saldo acreedor cuando su movimiento acreedor es mayor que el movimiento deudor

Naturaleza de las cuentas

Las cuentas se clasifican en naturaleza deudoras y acreedoras.

1. **Naturaleza deudora:** son cuentas de naturaleza deudora porque **umentan con los cargos (debe)** y **disminuyen con los abonos (haber)** y su saldo debe mantenerse siempre en la columna del “debe” (saldo deudor).

Algunos ejemplos son:

- **Cuentas de activo:** Bancos, inventarios, clientes, documentos por cobrar, terrenos y edificios las cuales **forma parte del estado de situación financiera**.
 - **Cuentas de gastos:** costo de ventas, gastos de venta, gastos de administración, sueldos y salarios, publicidad, y mantenimiento las cuales **forman parte del estado de resultados**.
2. **Naturaleza acreedora:** contrario a las cuentas de naturaleza deudora, son las cuentas en las que **los aumentos se registran con abonos** y **las disminuciones con cargos**, por lo tanto, su saldo es siempre acreedor.

Algunos ejemplos son:

- **Cuentas de pasivo:** proveedores, documentos por pagar, acreedores diversos, impuestos por pagar **conformadas en el estado de situación financiera**.
- **Cuentas de capital:** capital contable, utilidades retenidas, reservas las cuales **forman parte del estado de situación financiera**.
- **Cuentas de ingresos:** ventas, productos financieros y otros ingresos las cuales **forman parte del estado de resultados**.

12.4 Teoría de la Partida Doble

El franciscano Fray Luca de Pacioli, considerado el precursor de la partida doble, presentó este método en 1494 en su obra *Summa de arithmetica, geometría, proportioni et proportionalita*. En ella expuso que toda operación implica una causa que, a su vez, produce un efecto, basándose en el principio de causalidad: toda causa genera un efecto. Esta teoría sigue siendo aplicable en la actualidad.

En qué consiste

Consiste en registrar, por medio de cargos y abonos (**términos mencionados en el tema de cuenta**), los efectos que producen las operaciones en los diferentes elementos del balance, de tal manera que siempre subsista la igualdad entre el activo y la suma del pasivo más el capital contable.

Por ejemplo, en los siguientes movimientos se realizan:

- un cargo a la cuenta de mobiliario y equipo de cómputo por \$74,000.00 y por lo consiguiente
- un abono a la cuenta de bancos por \$20,000.00; y un abono a la cuenta de acreedores diversos por \$54,000.00.
- donde el saldo de los cargos es de \$74,000.00; y, por otro lado, el saldo de los abonos es de \$74,000.00 al sumar \$20,000.00 y \$54,000.00.

Mob. y equipo de oficina	Bancos	Acreedores diversos
① \$74,000.00	\$20,000.00 ①	\$54,000.00 ①

Al analizar el ejemplo anterior, se puede observar que:

- Cada transacción debe registrarse considerando tanto la causa como el efecto de la misma.
- Cualquier operación involucra al menos dos cuentas, las cuales originan una anotación en el debe (cargo) y otra en el haber (abono).

Por ejemplo:

Si una empresa compra mercancía y la paga en efectivo, debe anotar que tiene más mercancía (aumento en la cuenta de activo: mercancía y registrarse en el **DEBE**) y que tiene menos dinero en su cuenta de banco (disminución en otra cuenta de activo: banco y registrarse en el **HABER**), por la misma cantidad.

Reglas de la Partida Doble

A partir de lo anterior, la teoría de la partida doble se basa en tres reglas:

- 1. A todo aumento de activo puede corresponder un:**
 - aumento a capital
 - o aumento de pasivo
 - o disminución de pasivo

Para aplicar y que sea más clara esta regla es importante considerar que:

- Dado que las cuentas de **activo empiezan con un cargo**, para aumentar su saldo éstas se deben **cargar**.
- En cambio, para **disminuir** su saldo se deben **abonar**.
- El capital contable al tener una **naturaleza acreedora**, sus **aumentos** se deben **abonar**.

Lo anterior se puede observar en el siguiente ejemplo:

Caja		Capital contable		Almacén		Proveedores		Prop. y publicidad	
① \$50,000.00	\$25,000.00 ③	\$50,000.00 ①	② \$2,000.00		\$2,000.00 ②	③ \$25,000.00			

- 2. A toda disminución de pasivo puede corresponder:**
 - una disminución de activo
 - o un aumento de capital contable
 - o un aumento del propio pasivo

Para aplicar esta regla es importante considerar que:

- Como las cuentas de pasivo empiezan con un **abono**, para aumentar su saldo, necesitan seguir su misma naturaleza, por lo tanto, los aumentos de pasivo se deben **abonar**.
- En cambio, para **disminuir** su saldo se deben **cargar**.
- El capital contable al tener una **naturaleza acreedora**, sus **aumentos** se deben **abonar**.

Lo anterior se puede observar en el siguiente ejemplo:

- A toda disminución de pasivo corresponde: una disminución de activo (1), un aumento de capital contable (2) o un aumento del propio pasivo (3).

Proveedores		Bancos		Capital contable		Documentos por pagar	
①	\$10,000.00		\$10,000.00 ①		\$15,000.00 ②		\$25,000.00 ③
②	\$15,000.00						
③	\$25,000.00						

- 3. A toda disminución de capital contable puede corresponder:**
 una disminución de activo
 o un aumento de pasivo
 o un aumento del propio capital contable.

Para aplicar esta regla es importante considerar que:

Al igual que el pasivo, el capital contable, por ser de naturaleza acreedora, tendrá los mismos movimientos para registrar los aumentos y disminuciones, por lo tanto, **los aumentos de capital** siguiendo su naturaleza, se **deben de abonar**.

Lo anterior se puede observar en el siguiente ejemplo:

- A toda disminución de capital contable corresponde: una disminución de activo (1), un aumento de pasivo (2) o un aumento del propio capital contable (3).

Capital contable		Bancos		Documentos por pagar		
①	\$18,000.00	\$25,000.00 ③		\$18,000.00 ①		\$22,000.00 ②
②	\$22,000.00					
③	\$25,000.00					

12.5 Ecuación Contable

La ecuación contable es una fórmula fundamental en la contabilidad que muestra la relación entre los recursos de una empresa (*activo*), sus deudas (*pasivo*) y el dinero aportado por los propietarios (*capital*). Es la base para registrar y analizar todas las operaciones financieras.

Fórmula:

$$\text{Activo} = \text{Pasivo} + \text{Capital}$$

¿En qué consiste?

1. **Activo:** Representa los bienes y derechos que posee la empresa, como dinero, propiedades, inventarios, etc.
2. **Pasivo:** Son las obligaciones o deudas que la empresa debe pagar a terceros, como préstamos o facturas pendientes.
3. **Capital:** Es el aporte de los dueños más las ganancias retenidas (o menos las pérdidas).

La ecuación muestra que todo lo que la empresa tiene (*activo*) está financiado ya sea por deudas (*pasivo*) o por aportaciones y utilidades (*capital*). Siempre debe mantenerse en equilibrio.

Por ejemplo:

Si una empresa compra maquinaria por \$10,000.00 financiada con un préstamo de \$6,000.00 un aporte de capital de \$4,000.00:

$$\text{Activo} = \text{Pasivo} + \text{Capital}$$

$$10,000.00 = 6,000.00 + 4,000.00$$

El equilibrio demuestra que la ecuación es correcta.

12.6 Balanza de comprobación

La balanza de comprobación es un documento contable que sirve para verificar que todas las operaciones se registraron correctamente, siguiendo la regla de la partida doble. Este documento muestra todas las cuentas usadas durante un periodo, indicando:

1. Los **movimientos** de cada cuenta (*Debe y Haber*).
2. Los **saldos** de cada cuenta (lo que queda al final).

El objetivo es comprobar que la suma total de las columnas del *Debe* y el *Haber* sea igual, lo que asegura que los registros están balanceados.

Características principales

1. **Contiene todas las cuentas** del libro mayor, tanto deudoras como acreedoras.
2. **Incluye saldos iniciales**, movimientos del periodo y saldos finales.
3. Sirve como base para preparar los estados financieros.
4. Permite detectar errores como cifras mal registradas o desequilibrio en las cuentas.

Estructura

- Encabezado

Está compuesto por la siguiente información: - El nombre de la empresa - La indicación de que se trata de una balanza de comprobación - La fecha en que se elabora (la fecha del último día del periodo de que se trata).

- Columnas
 - Nombre de la cuenta
 - Saldos iniciales (Debe y Haber)
 - Movimientos del periodo (Debe y Haber)
 - Saldos finales (Debe y Haber)

Ejemplo de balanza de comprobación:

Panadería La Rosa S.A de C.V					
Balanza de comprobación al 30 de enero de 2022					
No.	Cuenta	Movimientos		SalDOS	
		Deudor	Acreedor	Deudor	Acreedor

12.7 La empresa

Una **empresa** es una organización o entidad que utiliza recursos (humanos, financieros, tecnológicos, etc.) para producir bienes o servicios con el objetivo de satisfacer necesidades del mercado y obtener una ganancia. También pueden perseguir objetivos sociales, culturales o ambientales si son de naturaleza no lucrativa.

Clasificación de las Empresas

Las empresas pueden clasificarse de acuerdo con diferentes criterios:

1. Según su Actividad Económica

- **Industriales:** Se dedican a la producción de bienes mediante la transformación de materias primas.
 - Ejemplo: Fábricas de alimentos, automotrices.
- **Comerciales:** Se enfocan en la compra y venta de productos terminados.
 - Ejemplo: Supermercados, tiendas de ropa.
- **De Servicios:** Ofrecen servicios en lugar de productos tangibles.
 - Ejemplo: Bancos, empresas de transporte, clínicas.

2. Según su tamaño

- **Microempresas:** Tienen pocos empleados (menos de 10) y capital limitado.
 - Ejemplo: Pequeñas tiendas de barrio.
- **Pequeñas Empresas (PyMEs):** Con un número de empleados entre 11 y 50, y una estructura algo mayor.
 - Ejemplo: Talleres mecánicos, cafeterías.
- **Medianas Empresas:** Cuentan con entre 51 y 250 empleados y mayor capacidad económica.
 - Ejemplo: Fábricas locales.
- **Grandes Empresas:** Tienen más de 250 empleados y operan a nivel nacional o internacional.
 - Ejemplo: Corporaciones como Coca-Cola, Amazon.

3. Según su finalidad

- **Con Fines de Lucro:** Su objetivo es obtener ganancias.
 - Ejemplo: Empresas comerciales, industriales.
- **Sin Fines de Lucro:** No buscan ganancias, sino satisfacer objetivos sociales, culturales o humanitarios.

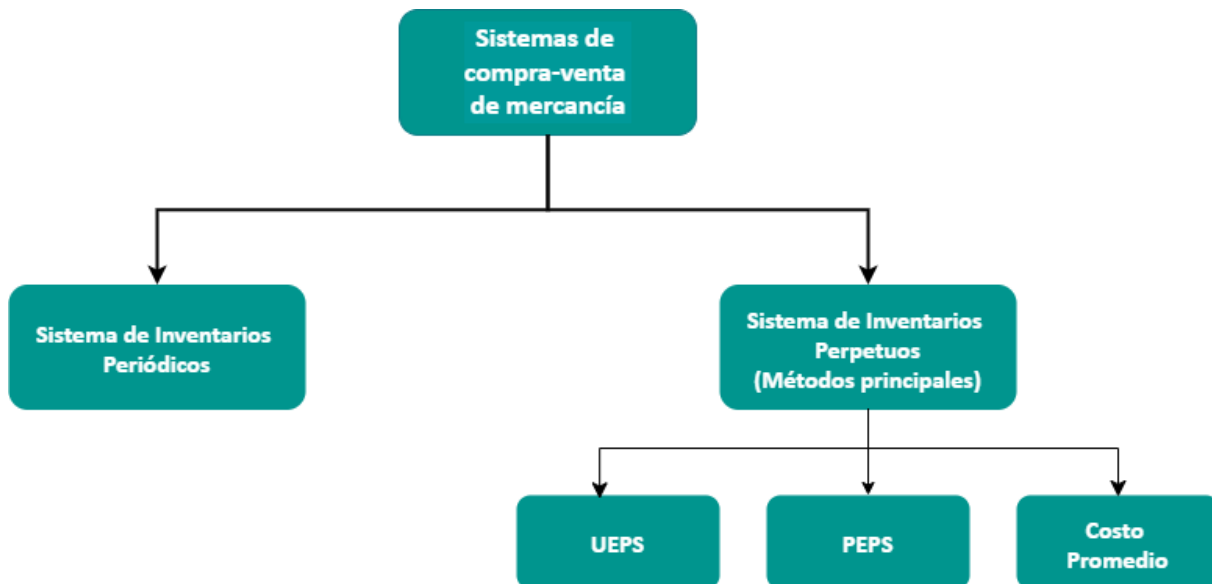
- Ejemplo: ONG, fundaciones

4. Según el origen de su capital

- **Privadas:** Propiedad de particulares o accionistas.
 - Ejemplo: Empresas familiares, multinacionales.
- **Públicas:** Propiedad del Estado o gobierno.
 - Ejemplo: Empresas de servicios públicos, correos.
- **Mixtas:** Combinación de capital público y privado.
 - Ejemplo: Empresas estatales con participación privada.

12.8 Sistema de compra -venta de mercancías

El **sistema de compra-venta de mercancías** se refiere a los métodos utilizados para registrar y controlar las transacciones relacionadas con la adquisición y venta de bienes en una entidad comercial. Estos sistemas permiten registrar tanto las entradas (compras) como las salidas (ventas) de mercancías, así como los costos asociados, para mantener un adecuado control contable.



- **¿En qué consiste?**
 - Registra las compras y ventas de mercancías, pero el inventario final y el costo de ventas se calculan al final del periodo contable mediante un conteo físico.
- **Ventajas:**
 - Es más simple y económico de implementar.
 - No requiere registro constante de cada transacción.
- **Desventajas:**
 - No permite conocer el inventario disponible en tiempo real.
 - Puede haber errores por faltantes o sobrantes no detectados hasta el conteo físico.

2. Sistema de inventarios perpetuos

- **¿En qué consiste?**
 - Registra las compras, ventas y el costo de ventas en tiempo real.
 - Mantiene un control constante del inventario disponible.
 - El costo de la mercancía vendida se calcula en cada transacción.

- **Ventajas:**
 - Permite conocer el saldo del inventario en cualquier momento.
 - Reduce errores en el control de mercancías.
 - Es ideal para empresas con grandes volúmenes de transacciones.
- **Desventajas:**
 - Requiere sistemas computarizados para un registro eficiente.
 - Puede ser costoso de implementar.
- **Principales métodos**
 - PEPS (Primeras Entradas, Primeras Salidas)
 - UEPS (Ultimas Entradas, Primeras Salidas)
 - Costo promedio

A continuación, se explicará a más detalle los principales métodos del sistema de inventarios perpetuos.

Método PEPS (Primeras Entradas, Primeras Salidas)

En este método los primeros productos que entraron al inventario son los primeros en venderse o usarse. Ejemplo:

1. Se realiza una primera compra

Nota de entrada no.1 por la compra de 50 artículos a \$ 300.00 c/u.

		Unidades			Costo		Valores		
Fecha	Referencia	Entrada	Salida	Existencia	Unitario	Promedio	Debe	Haber	Saldo
10/3	NE No. 1	50		50	\$300.00		\$15,00.00		\$15,00.00

El 10 de marzo entraron a almacén 50 unidades de \$300.00 c/u dando un saldo final de \$15,00.00.

2. Se realiza una segunda compra

Nota de entrada no. 2 por la compra de 90 artículos a \$ 350.00 c/u.

		Unidades			Costo		Valores		
Fecha	Referencia	Entrada	Salida	Existencia	Unitario	Promedio	Debe	Haber	Saldo
10/3	NE No. 1	50		50	\$300.00		\$15,00.00		\$15,00.00
13/3	NE No. 2	90		140	\$350.00		\$31,50.00		\$46,50.00

El 13 de marzo entraron a almacén 90 unidades de \$350.00 c/u dando un saldo final de \$46,50.00.

3. Finalmente, se **venden de los primeros 50** artículos que entraron, 40 a un precio de \$300.00.

El hecho de que los 40 artículos vendidos provengan de la primera compra de 50 unidades, y no de la compra de 90, sumado a que el precio de venta utilizado sea de \$300 y no de \$350, permite concluir que en este caso se aplica el principio de que lo **que primero que entra al almacén es lo primero que sale de él.**

Nota de salida no. 3 por la venta de 40 artículos a \$ 300.00 c/u.

		Unidades			Costo		Valores		
Fecha	Referencia	Entrada	Salida	Existencia	Unitario	Promedio	Debe	Haber	Saldo
10/3	NE No. 1	50/10		50	\$300.00		\$15,00.00		\$15,00.00
13/3	NE No. 2	90		140	\$350.00		\$31,500.00		\$46,500.00
15/3	NS No. 3		40	100	\$300.00			12,000.00	\$34,500.00

El 15 de marzo salen del almacén 40 artículos a un precio de \$300.00 c/u.

Al cruzar con una diagonal el 50, se da a entender que de esa compra quedan sólo 10 unidades, ya que la salida de las 40 fue a costo de \$300.00

Método UEPS (Últimas Entradas, Primeras Salidas)

Siguiendo con el mismo ejemplo, el método aplicado en este caso es el **UEPS** (Últimas Entradas, Primeras Salidas), ya que los 40 artículos vendidos provienen de la última compra de 90 unidades, y no de la primera compra de 50. Además, el precio de venta utilizado es de \$350.00, en lugar de \$300.00, lo que confirma que los últimos artículos que ingresaron al inventario son los primeros en salir.

Nota de salida no. 3 por la venta de 40 artículos a \$ 350.00 c/u.

		Unidades			Costo		Valores		
Fecha	Referencia	Entrada	Salida	Existencia	Unitario	Promedio	Debe	Haber	Saldo
10/3	NE No. 1	50		50	\$300.00		\$15,00.00		\$15,00.00
13/3	NE No. 2	90/50		140	\$350.00		\$31,500.00		\$46,500.00
15/3	NS No. 3		40	100	\$350.00			14,000.00	\$32,500.00

Al cruzar con una diagonal el 90, se da a entender que de esa compra quedan sólo 50 unidades, ya que la salida de las 40 fue a costo de \$350.00.

Costo promedio

Este método determina un costo promedio a todos los artículos en inventario, calculado al dividir el costo total de los productos entre el número total de unidades disponibles. De esta manera, cada unidad tiene el mismo costo promedio, sin importar cuándo ingresó al inventario.

Siguiendo con el mismo ejemplo, en esta ocasión el precio de salida de los 40 artículos vendidos es de \$325.00 debido a que se obtuvo el precio promedio basados en los dos primeros precios de entrada, \$300.00 y \$350.00.

Al utilizar este método, la salida de mercancía puede ser seleccionada indistintamente de cualquiera de las dos compras realizadas anteriormente.

Nota de salida no. 3 por la venta de 40 artículos a \$325.00 c/u

		Unidades			Costo		Valores		
Fecha	Referencia	Entrada	Salida	Existencia	Unitario	Promedio	Debe	Haber	Saldo
10/3	NE No. 1	50		50	\$300.00		\$15,00.00		\$15,00.00
13/3	NE No. 2	90		140	\$350.00		\$31,500.00		\$46,500.00
15/3	NS No. 3		40	100		\$325.00		13,000.00	\$33,500.00

12.9 Documentación comprobatoria

Son los soportes de contabilidad que sirven de base para registrar las operaciones comerciales de una empresa. Y tienen la función de comprobar razonablemente una operación, así mismo generan o amparan registros de contabilidad, además de servir como respaldo para cualquier persona u empresa. A continuación, se mencionan los más utilizados:

- Ticket
- Factura
- Nota de crédito
- Nota de remisión
- Recibo
- Nota de salida del almacén
- Nota de entrada al almacén
- Cheque
- Pagaré

12.10 Registro de documentación comprobatoria

Los documentos comprobatorios brindan soportes de contabilidad en las operaciones comerciales de una empresa u organización. Se apegarán a los requisitos que brinda el **código fiscal de la federación** para la elaboración de alguno de los documentos, ya sean de compra o venta como:

- Facturas
- Notas de créditos
- Recibos por servicios

12.11 Registro de operaciones comerciales

Se conoce bajo este término a un método analítico de control implementado en empresas de diversos niveles que busca registrar de manera detallada y organizada todos los movimientos contables realizados en un determinado periodo de tiempo. Dicho en otras palabras, se trata de una documentación en la cual se contemplan todos los datos inherentes al flujo de dinero dentro de la empresa, lo que incluye tanto ingresos de dinero como egresos de este y de mercancías generales. Este tema permitirá a los sustentantes tener claro el orden que deben llevar los registros de las operaciones de una entidad mediante el reconocimiento de las características o estructuras de las:

- Pólizas de diario
- Pólizas de cheque
- Pólizas de egreso
- Pólizas de ingreso

12.12 Fondos de caja

El efectivo es el elemento vital de cada negocio y quedarse sin él es una de las principales razones por las que las empresas fracasan. El flujo de efectivo es uno de los pilares en la administración de cualquier empresa, debido a que representa las entradas y salidas de efectivo, producto de la operación diaria de una empresa.

El efectivo es un elemento de balance y forma parte del activo circulante. Es el elemento más líquido que posee la empresa. Las empresas reciben dinero a través de las ventas y los rendimientos de las inversiones, es decir, el efectivo que fluye al negocio.

Es el plan de organización entre el sistema de contabilidad, funciones de empleos y procedimientos coordinados que tiene por objeto obtener información segura, salvaguardar el efectivo en caja y bancos, así como fomentar la eficiencia de operaciones y adición de la política administrativa de cualquier empresa.

El control interno comprende el conjunto de planes, métodos, principios, normas, procedimientos y mecanismos diseñados por una empresa para promover la eficiencia en las operaciones, salvaguardar los recursos de la entidad y verificar la veracidad de la información financiera y administrativa.

El dinero es un medio de intercambio, por lo general en forma de billetes y monedas, que es aceptado por una sociedad para el pago de bienes, servicios y todo tipo de obligaciones. El efectivo depositado en caja nos ayuda para hacerle frente a los gastos menores de la empresa y debe realizar arqueos sorpresivos, por lo menos una vez al mes.

12.13 Conciliación bancaria

La conciliación bancaria es aquella en la cual se comparan los registros de la empresa y los registros del banco, para encontrar las diferencias. Una vez que tengamos la conciliación entre los dos saldos, se procederá a realizar los asientos de corrección o en su caso la aclaración ante el banco.

En conclusión

En la economía moderna, el dinero es considerado como el lubricante del sistema económico, ya que es el mecanismo que pone en movimiento el proceso de producción de bienes y servicios, permitiendo la acumulación de capital por medio del ahorro y la inversión, que como ya sabemos, son factores de gran importancia para el crecimiento globalizado.

12.14 Contribuciones

Las contribuciones son las aportaciones económicas que las personas físicas y morales (empresas) están obligadas a realizar al Estado, de acuerdo con las leyes fiscales, para financiar el gasto público y garantizar el funcionamiento del gobierno y los servicios públicos. Estas aportaciones permiten al Estado cumplir con sus responsabilidades, como la seguridad, educación, salud, infraestructura, entre otros.

Clasificación de las contribuciones

Según el **Código Fiscal de la Federación (CFF)** en México, las contribuciones se dividen en cuatro categorías principales:

1. Impuestos

- Son pagos obligatorios establecidos por la ley, que no implican un beneficio directo o inmediato para el contribuyente.
- Ejemplos:
 - **ISR (Impuesto Sobre la Renta)**: Sobre ingresos personales o empresariales.
 - **IVA (Impuesto al Valor Agregado)**: Sobre el consumo de bienes y servicios.
 - **IEPS (Impuesto Especial sobre Producción y Servicios)**: Sobre productos como alcohol, tabaco y gasolina.

2. Aportaciones de Seguridad Social

- Son pagos destinados a financiar servicios de salud, pensiones y otras prestaciones para los trabajadores y sus familias.
- Ejemplos:
 - Cuotas patronales al IMSS, ISSSTE, INFONAVIT.

3. Contribuciones de mejoras

- Son pagos que realizan los beneficiarios de obras públicas que incrementan el valor de sus propiedades o brindan beneficios directos.
- Ejemplo:
 - Contribuciones por obras de pavimentación o alumbrado público.

4. Derechos

- Son pagos que realizan los beneficiarios de obras públicas que incrementan el valor de sus propiedades o brindan beneficios directos.

IVA (Impuesto al Valor Agregado)

Los contribuyentes pueden tener un IVA acreditable o un IVA trasladado y en el cálculo de sus actividades como persona física o moral estos pueden obtener un IVA a cargo o un IVA a favor.

Los siguientes son los tipos de IVA:

- En deducciones autorizadas. IVA por acreditar (por pagar), IVA acreditable (pagado)
- En ingresos. IVA por trasladar (por cobrar), IVA trasladado (cobrado)

Por lo anterior, una de las obligaciones fiscales consiste en pagar el IVA que el contribuyente cálculo en el periodo fiscal que le corresponde, de acuerdo a su régimen fiscal.

ISR (Impuesto Sobre la Renta)

En contabilidad este impuesto es estudiado con la finalidad de que el aprendiz, de acuerdo a la Ley del Impuesto Sobre la Renta, identifique los elementos generales de esta contribución.

El ISR, es un impuesto que aplica a los ingresos adquiridos por personas físicas o morales, este impuesto es uno de los más importantes en México porque grava directamente las fuentes de riqueza.

Para el pago de este gravamen la Ley del Impuesto Sobre la Renta establece una tasa variable que va desde el 1.9 al 35%, el cual se mide de acuerdo con tarifas de ingresos establecidas; mientras que para las personas morales establece una tasa fija del 30%.

En la determinación del ISR, los contribuyentes, con base en el artículo 105 de la LISR, pueden realizar deducciones, las cuales deberán ser estrictamente indispensables para la obtención de los ingresos.

A diferencia del IVA que es una declaración mensual definitiva, el ISR es un pago provisional. Por lo tanto, los contribuyentes deben realizar una declaración anual del ejercicio fiscal correspondiente y en su caso, realizar los pagos provisionales de acuerdo con su régimen fiscal.

En el cálculo del impuesto los contribuyentes pueden determinar un ISR a cargo o un ISR a favor.

El propósito que tiene el estado sobre este impuesto es recaudar dinero para ejercer el gasto público, por lo que es una contribución que aplica a todos los ingresos obtenidos de la nación.

12.15 Nómina

La **nómina** es un documento administrativo y contable que registra los pagos que una empresa realiza a sus empleados por concepto de su trabajo durante un periodo determinado (semanal, quincenal, mensual, etc.). Incluye tanto las **percepciones** (ingresos) como las **deducciones** (descuentos por impuestos, seguridad social, entre otros), y determina el **salario neto** que cada trabajador recibe.

Elementos principales de una nómina

1. Datos Generales

- Nombre del empleado
- Puesto
- Número de identificación laboral o RFC
- Periodo de pago (fechas)

2. Percepciones

- Todos los conceptos que representan ingresos para el trabajador, como sueldo base, bonos, comisiones, horas extras, aguinaldo, prima vacacional, etc.

3. Deducciones: Descuentos que se aplican al salario bruto, como:

- Impuesto Sobre la Renta
- Cuotas del seguro Social
- Fondos de ahorro
- Préstamos otorgados por la empresa

4. Salario Bruto y Salario Neto

- Salario bruto: es la suma total de las percepciones antes de aplicar deducciones.
- Salario neto: es el monto que el trabajador recibe efectivamente después de restar las deducciones.

Bibliografía sugerida

Cervantes Cruz, a. (n.d.). Tema: la cuenta y sus elementos material educativo elaborado sin fines de lucro. Edu.mx. Retrieved october 9, 2023, from https://huelladigital.cbachilleres.edu.mx/secciones/docs/difcil_comprension/laboral/la_cuenta_y_sus_elementos.pdf

Contabilidad para le enseñanza media superior teoría y casos prácticos ed. Instituto mexicano de contadores públicos 2014. Contabilidad de la estructura financiera de la empresa, 4a.ed.

Contabilidad para le enseñanza media superior teoría y casos prácticos ed. Instituto mexicano de contadores públicos. (2014).

Contabilidad: principios y aplicaciones. Escrito por Horace R. Brock, Charles Earl Palmer, ed. Reveré s.a. 2015. Contabilidad para la enseñanza media superior teoría y casos prácticos ed. Instituto mexicano de contadores públicos 2014.

De diputados, c., congreso de, d. H., & unión, l. A. (n.d.). Ley del impuesto sobre la renta. Gob.mx. Retrieved october 4, 2023, from <https://www.diputados.gob.mx/leyesbiblio/pdf/lisr.pdf>

De, J. (n.d.). Micro, pequeñas y medianas empresas en México. Evolución, funcionamiento y problemática. Gob.mx. Retrieved october 9, 2023, from <http://bibliodigitalibd.senado.gob.mx/bitstream/handle/123456789/1718/mpymem.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Edu.mx. Retrieved october 9, 2023, from <https://www.cobachsonora.edu.mx/files/semestre5-2016/contabilidad1.pdf>

Gabriel, M. A. G., & Calderon, V. (n.d.). "apuntes de contabilidad i." Umich.mx. Retrieved october 9, 2023, from <https://www.fcca.umich.mx/descargas/apuntes/academia%20de%20contabilidad/apuntes%20contabilidad%20i%20villalon%20calderon.pdf>

General, C., Maximino, E., & México, D. F. (201 c.e.) manual del usuario del sistema administrativo empresarial (ver. 4.6 para windows), México. Ley del ISR 2017 y código fiscal (S. A. De México, ed.).

Instituto de investigaciones de económicas, antecedentes y desarrollo de la micro y pequeñas empresas en México, México: UNAM, 2001.

Ley, d., impuesto, a. V., de diputados, c., congreso de, d. H., & unión, l. A. (n.d.). Ley del impuesto al valor agregado. Gob.mx. Retrieved october 9, 2023, from <https://www.diputados.gob.mx/leyesbiblio/pdf/liva.pdf>

Meigs F. Robert, contabilidad. La base para decisiones gerenciales. México, Mc Graw Hill, 2001, 11ª ed.), 707 pp.

Primer curso de contabilidad, Lara Flores Elías / Lara Ramírez Leticia, ed. Trillas, p.p. 423 año 2011. Escrito por c.p. Mónica Galindo Cosme, c.p. Jesús F. Hernández Rodríguez fundamentos de contabilidad (alumno), María De Los Ángeles Vargas Moreno, 3a edición, instituto mexicano de contadores públicos, 2016

Segundo curso de contabilidad, Lara Flores Elías ed. Trillas, año 2011 contabilidad para le enseñanza media superior teoría y casos prácticos ed. Instituto mexicano de contadores públicos 2014

Uabc.mx. Retrieved October 9, 2023, creación de nómina from <https://repositorioinstitucional.uabc.mx/server/api/core/bitstreams/bbc2e770-f41b-4313-ab13-6164957a2d98/content>

13. Informática

13.1.1. Conceptos básicos informáticos

Vasconcelos (2017) define la **información** como una agrupación de datos relacionados y ordenados, de manera que resultan útiles para realizar alguna actividad y tomar decisiones. Gran parte de la información que almacenan los dispositivos digitales actuales, corresponde a instrucciones.

Un **dato** es la expresión general que describe los objetos con los cuales opera una computadora; la mayoría de las computadoras pueden trabajar con varios tipos (modos) de datos. Los algoritmos y los programas correspondientes operan sobre esos tipos de datos (Joyanes, 2020).

En informática los datos pertenecen a un tipo específico. El tipo de datos rige la forma en que el dispositivo los representa de forma interna y define las operaciones que puede realizar con ellos. Cada tipo de dato tiene predefinido un conjunto de valores posibles y las acciones que se pueden ejecutar sobre ellos.

Los **datos simples** pueden ser,

- **Numéricos**, por ejemplo:
 - Enteros. Representan números positivos o negativos, sin partes fraccionarias. ($\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$)
 - Reales. son el conjunto de números naturales, enteros, racionales e irracionales (1, 3, 48, 98 748, ...) o decimal (1.25, 23.2324, 35874.7, ...)
- **Booleanos**, por ejemplo:
 - Valores de tipo lógico, que como resultado arrojan verdadero o falso ($1 < 2$, que es true)
- **Caracteres**, por ejemplo:
 - Símbolos del teclado (P, 5, &, ...)

Estos datos a su vez pueden conformar otro tipo de datos más complejos, denominados **estructurados**, por ejemplo, arreglos [1, 3, 5, 7] o registros como:

```
Empleado = {nombre: "Abel", edad: 43, salario: 29348.8}
```

En los programas informáticos además se suelen utilizar ciertos valores que se definen a partir de su dinámica durante la ejecución del programa:

- **Constante**: permanece sin cambios.
- **Variable**: puede cambiar su valor. Pero, además, Joyanes (2020) menciona que una variable se identifica por los siguientes atributos: **nombre** que lo asigna y **tipo** que describe el uso de la variable.

Según el lenguaje de programación que se esté utilizando, la forma en que las constantes o las variables se declaran puede ser diferente, por ejemplo:

Lenguaje	PHP	Java
Variable	<p>Se representa por un signo de dólar, seguido del nombre de la variable:</p> <pre>\$velocidad = 100;</pre> <p>Es sensible al uso de mayúsculas.</p>	<p>Se declara el tipo de dato y luego el nombre de la variable:</p> <pre>int velocidad = 100;</pre> <p>Es sensible al uso de mayúsculas.</p>
Constante	<p>Utiliza la función <code>define()</code>, con la siguiente sintaxis:</p> <pre>define("PI", 3.1415);</pre>	<p>Se presenta por la palabra reservada <code>final</code>, seguida del tipo de dato y el nombre de la constante:</p> <pre>final double PI = 3.1415;</pre>

Tabla 17. Formas de declarar variables y constantes en PHP y Java.

Expresiones y operadores

Al igual que en matemáticas, una expresión es una combinación de letras, signos, números, constantes, variables, etcétera. Las expresiones se clasifican según los valores u objetos que manejan en:

Aritméticas. Funcionan de manera similar a las fórmulas matemáticas, utilizan operadores aritméticos, por ejemplo:

Expresión	Operador	Nombre del operador
15 + 1	+	Suma
3 - 2	-	Resta
9 * 7	*	Multiplicación
8 / 4	/	División
6 ^2	^	Exponenciación

Tabla 18. Ejemplos de expresiones y operadores aritméticos.

Relacionales. Son expresiones donde se comparan dos valores, el resultado de dicha comparación siempre será un valor lógico: verdadero o falso. Utilizan operadores relacionales.

Expresión	Operador	Nombre del operador
$a > b$	>	Mayor que
$a < b$	<	Menor que
$a = b$	=	Igual a
$a >= b$	>=	Mayor o igual que

$a \leq b$	\leq	Menor o igual que
$a \neq b, a! = b$	$\neq, !=$	Distinto que

Tabla 19. Ejemplos de expresiones y operadores relacionales.

Lógicas. Expresiones que se evalúan como verdaderas o falsas. Generalmente se emplean en estructuras de control. Utilizan operadores lógicos.

Expresión	Operador	Nombre del operador
$!a$	NOT, !	Negación
$a \&\& b$	AND, \&\&	Conjunción, Y
$a \ \ b$	OR, \ \	Disyunción, O

Tabla 20. Ejemplos de expresiones y operadores lógicos.

13.1.2. Algoritmos

Según el autor, se puede definir un **algoritmo** de diferentes maneras, por ejemplo:

Para Ibáñez y García (2010), es una lista de pasos o instrucciones con una secuencia lógica de operaciones necesarias para resolver cualquier problema. Joyanes (2020) lo define como un proceso paso a paso para conseguir el resultado deseado. Por su parte Cairó (2006), lo define como un conjunto de pasos, procedimientos o acciones que nos permiten alcanzar un resultado o resolver un problema.

Existen muchos autores más que lo definen de diferentes formas, pero todos coinciden en que es una secuencia lógica de pasos definidos para resolver un problema. Todo algoritmo debe ser:

- **Preciso.** Los pasos deben estar descritos de forma clara y sin ambigüedades.
- **Realizable y finito.** Todo algoritmo debe estar compuesto por un número limitado de pasos, con un inicio y un final claramente definidos. Si el proceso se vuelve infinito o se encuentra con un obstáculo que impida llegar a un resultado, entonces el algoritmo deja de ser válido o aplicable.
- **Comprensible.** Debe ser tan claro, que tanto una persona como una máquina puedan entender qué está buscando hacer, cómo y en qué momento.

Un algoritmo además se puede subdividir en tres secciones principales

1. Entrada
2. Proceso
3. Salida

Por ejemplo, para calcular el promedio de la temperatura máxima de tres días diferentes tenemos la siguiente información:

Secciones	Instrucción	Ejemplo con datos concretos
Entrada	Ingresar las temperaturas de los tres días	Día1 = 24.7°C, Día2 = 17.6°C, Día3 = 21.3°C
Proceso	1. Sumar las tres temperaturas	1. Suma = Día1 + Día2 + Día3 Suma = 24.7 + 17.6 + 21.3
	2. Dividir la suma entre tres	2. Promedio = Suma/3 Promedio = 63.6/3 = 21.2
Salida	Mostrar el valor del promedio obtenido	La temperatura promedio es 21.2

Tabla 21. Secciones de un algoritmo.

13.1.4. Diagramas de flujo

Un diagrama de flujo es la representación gráfica y esquematizada del flujo de un algoritmo (imagen 1). Se tienen diferentes figuras lógicas que, encierran los datos del algoritmo.

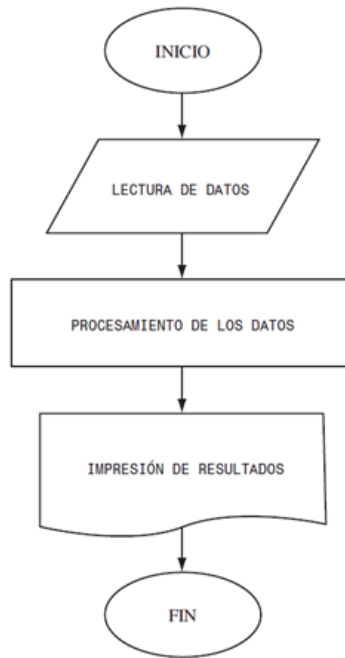


Imagen 1. Etapas de la construcción de un diagrama de flujo, tomada de Cairó (2006).

En la siguiente tabla se presentan algunos de los símbolos utilizados en la construcción de diagramas de flujo según la *International Organization for Standardization (ISO)*:

Símbolo	Nombre	Utilidad
	Inicio / Fin	Marca el inicio y el fin de un diagrama de flujo.
	Proceso	Representa instrucciones u operaciones que resulten en algún cambio de valor.





	Entrada	Expresa entrada de información (expresa lectura).
	Decisión	Se utiliza para toma de decisiones. Almacena una condición y ramifica según el resultado.
	Flujo	Representa la dirección del flujo del diagrama.
	Salida (Impresa)	Expresa escritura. Representa la impresión de un resultado.

Tabla 22. Algunos símbolos utilizados para la construcción de diagramas de flujo.

Además, Cairó (2006) enumera algunas reglas para la construcción de diagramas de flujo como las siguientes:

1. Todo diagrama de flujo debe tener un inicio y un fin.
2. Las líneas utilizadas para indicar la dirección del flujo del diagrama deben ser rectas: verticales u horizontales.
3. Todas las líneas utilizadas para indicar la dirección del flujo del diagrama deben estar conectadas. La conexión puede ser a un símbolo que exprese lectura, proceso, decisión, impresión, conexión o fin del diagrama.
4. El diagrama de flujo debe construirse de arriba hacia abajo (*top-down*) y de izquierda a derecha (*right to left*).

13.1.5. Pseudocódigo

Una de las principales herramientas que utilizan los programadores son los pseudocódigos, en los cuales las instrucciones se redactan con palabras similares al lenguaje natural, pero con una estructura formal. Esto facilita tanto la lectura como la escritura de los programas, ya que permite expresar los procesos de manera ordenada y comprensible.

Cumple con la siguiente **estructura**:

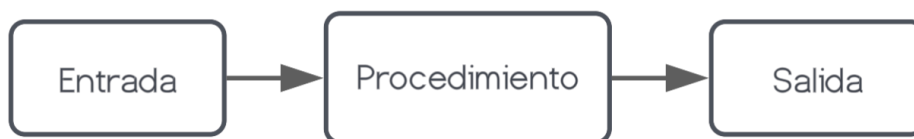


Imagen 2. Estructura general del pseudocódigo.

De acuerdo con el Ávila y Bailón (2022), algunos de los **verbos** más comunes empleados en la estructura de los pseudocódigos son los siguientes:

- Leer: recuperar un dato proporcionado por el usuario.
- Escribir: mostrar información al usuario.
- Calcular.
- Asignar: otorgar un valor a una variable.
- Repetir: ejecutar una parte del código varias veces.
- Llamar: invocar un subproceso o procedimiento.

Por ejemplo, en un consultorio médico se requiere desarrollar un programa que calcule el promedio de estatura de los tres últimos pacientes. El pseudocódigo que permitiría resolver este problema sería el siguiente:

1	Inicio
2	Leer estatura1
3	Leer estatura2
4	Leer estatura3
5	Calcular promedio \leftarrow (estatura1 + estatura2 + estatura3) / 3
6	Escribir "El promedio de estatura es:", promedio
7	Fin

Tabla 23. Ejemplo de pseudocódigo.

Observe que las palabras en color azul corresponden a algunos de los verbos más comunes empleados en la escritura de pseudocódigos. Además, el ejemplo presenta la estructura general de un pseudocódigo: inicio, proceso y fin.

13.1.3. Paradigmas de programación

De acuerdo con Joyanes (2020), un paradigma de programación representa fundamentalmente enfoques diferentes para la construcción de soluciones a problemas y por consiguiente afectan al proceso completo de desarrollo de software.

A continuación, se presentan algunos de los paradigmas de programación más representativos (aunque no son los únicos):

- **Imperativo.** Implementa los programas como una secuencia de instrucciones que la máquina debe ejecutar paso a paso.
- **Declarativo.** Utiliza lenguajes de muy alto nivel, en los cuales el programador describe qué desea obtener sin especificar cómo lograrlo.
- **Orientado a objetos.** Considera los elementos del programa como objetos que combinan estado, comportamiento e identidad.

Después de comprender algunos de los diferentes enfoques o paradigmas de programación, es necesario identificar las herramientas que utilizan los programadores para ponerlos en práctica.

Un **Entorno de Desarrollo Integrado (IDE)**, es una aplicación de software que ayuda a los programadores a desarrollar código de software de manera eficiente (AWS, 2024). Proporcionan un espacio donde se puede escribir, ejecutar y probar código de manera más sencilla.

Algunas de las principales ventajas derivadas del uso de los IDE son:

- Resaltado de sintaxis, facilitando que el código fuente sea más legible.
- Compilación, convirtiendo código en lenguaje natural en código máquina desde el interior de la aplicación.
- Depuración, favoreciendo la corrección de errores o fallas.

13.2. Fundamentos de programación en PHP

PHP es un lenguaje de código abierto utilizado principalmente para el desarrollo de aplicaciones web, y puede integrarse directamente con HTML (The PHP Documentation Group, 2001-2025).

Como cualquier lenguaje de programación, PHP posee una sintaxis propia. En esta guía se abordarán solo algunos de los conceptos básicos, por lo que se recomienda considerar este material como una orientación inicial.

Sintaxis

- a) **Etiquetas de código.** Dado que PHP se puede integrar con HTML, el motor de PHP necesita diferenciar el código PHP de otros elementos de la página. Para lograr esto, PHP utiliza etiquetas de apertura y cierre de código, que indican dónde inicia y termina el bloque de instrucciones en PHP. Las etiquetas son '<?php' y '?>', y definen los límites de la ejecución del código PHP (Tabla 8, texto azul). El contenido fuera de las etiquetas es ignorado por el analizador PHP.

1	<?php
2	// Asignación de un valor a la variable \$hola
3	\$hola = "¡Hola mundo!";
4	print \$hola;
5	?>

Tabla 24. Ejemplo del uso de etiquetas en PHP.

- b) Las líneas de código PHP terminan con punto y coma (;). Observe una vez más la tabla 8, donde se encuentra de color verde el punto y coma que finaliza cada línea de código. En la etiqueta de cierre (?>) no es necesario colocar esta puntuación.
- c) **Comentarios.** Los comentarios en un programa son fragmentos de texto incluidos en el código que no son procesados por el compilador. Su función es facilitar la comprensión y la lectura del código, tanto para el programador que lo crea como para cualquier otra persona que lo revise. En PHP hay varias formas de colocar comentarios, por ejemplo:
- i. De una sola línea. Se utiliza '/'/' para indicar al programa el inicio del comentario. (Véase tabla 8, texto color naranja).
 - ii. De varias líneas. Se utiliza '/*' para indicar apertura del comentario, y '*/' para indicar el cierre.
- d) Declaración de **variables.** En PHP, las variables se identifican mediante un signo de dólar (\$) seguido del nombre de la variable. Es importante tener en cuenta que los nombres de las variables distinguen entre mayúsculas y minúsculas, por lo que \$hola y \$Ho1a se consideran variables distintas.

Una vez revisado lo más básico de la sintaxis en PHP, es necesario revisar algunas estructuras fundamentales de **cualquier lenguaje de programación**, las estructuras de control.

Las estructuras de control son instrucciones o bloques de código que permiten modificar el flujo de ejecución de un programa. En lugar de que las instrucciones se ejecuten de manera estrictamente secuencial, estas estructuras posibilitan tomar decisiones, repetir acciones o desviar la ejecución según determinadas condiciones o criterios.

a) Estructura selectiva

Cairó (2006) menciona que Estas estructuras se utilizan cuando se debe tomar una decisión en el desarrollo de la solución de un problema. La toma de decisión se basa en la evaluación de una o más condiciones que nos señalarán como consecuencia la rama a seguir. Hay varios tipos de estructuras selectivas, como:

- **if:** se utiliza para que el código, pseudocódigo o diagrama de flujo siga un camino específico cuando se cumple una condición establecida.



Imagen 3. Ejemplo de una estructura de control selectiva if en un diagrama de flujo. Imagen adaptada de Cairó (2006).

- **if-else:** permite que el flujo del programa se bifurque en dos posibles caminos en el momento de la toma de decisión.

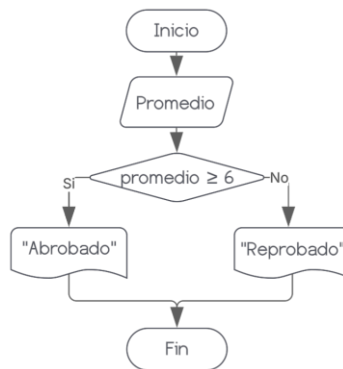


Imagen 4. Ejemplo de una estructura de control selectiva if-else en un diagrama de flujo. Imagen adaptada de Cairó (2006).

- **switch:** permite que el flujo del diagrama se bifurque por varias ramas en el punto de la toma de decisión.

01	Inicio
02	Leer opcion
03	
04	Segun opcion Hacer
05	Caso 1: Escribir "Seleccionó la opción 1"
06	Caso 2: Escribir "Seleccionó la opción 2"
07	Caso 3: Escribir "Seleccionó la opción 3"
08	De Otro Modo: Escribir "Opción no válida"
09	FinSegun
10	Fin

Tabla 25. Ejemplo de una estructura de control selectiva switch en un pseudocódigo.

b) Estructura repetitiva

Se utilizan cuando la resolución del problema demanda operaciones que se deben ejecutar un número determinado de veces. Hay varios tipos de estructuras repetitivas, como:

- **for**: permite repetir un conjunto de instrucciones un número determinado de veces.

1	Inicio
2	Para i ← 1 Hasta 4 Hacer
3	Escribir "Número:", i
4	FinPara
5	Fin

Tabla 26. Ejemplo de una estructura de control repetitiva for en un código.

- **while**: se utiliza para repetir un conjunto de instrucciones mientras se cumpla una condición determinada. Cuando dicha condición deja de ser verdadera, el ciclo se detiene y el programa continúa con la siguiente instrucción.

1	Inicio
2	i ← 1
3	Mientras i ≤ 5 Hacer
4	Escribir "Número:", i
5	i ← i + 1
6	FinMientras
7	Fin

Tabla 27. Ejemplo de una estructura de control repetitiva while en un código.

Sistemas de información

De acuerdo con Pablos (2004), un sistema de información (SI) se define como un conjunto de recursos técnicos, humanos y económicos, interrelacionados de forma dinámica y organizados con el propósito de satisfacer las necesidades de información de una organización empresarial, facilitando así su gestión y la toma adecuada de decisiones.

Las principales funciones de un sistema de información varían según su finalidad, aunque generalmente incluyen:

- Recogida y registro de información.
- Almacenamiento de datos.
- Tratamiento y análisis de la información.

Los sistemas de información pueden clasificarse de distintas maneras. Una de ellas es según su aplicación en las áreas funcionales de la empresa, donde se pueden identificar los siguientes tipos:

- Sistemas para directivos.
- Sistemas de marketing (por ejemplo, análisis de mercado, canales de distribución, publicidad).
- Sistemas de producción (como control de calidad, diseño y desarrollo de productos).
- Sistemas de recursos humanos (por ejemplo, gestión de nóminas y contratación de personal).
- Sistemas de información financiera (como facturación, control de inventarios y cuentas por pagar).

Por otro lado, todo sistema de información atraviesa una serie de fases a lo largo de su vida útil. Este proceso, conocido como ciclo de vida del sistema de información, comprende diversas etapas que permiten su desarrollo, puesta en marcha y mantenimiento. Según Berzal (s. f.), dichas etapas son las siguientes:

- Planificación
- Análisis
- Diseño
- Implementación
- Pruebas
- Instalación o despliegue
- Uso y mantenimiento

Dentro del funcionamiento de un sistema de información, las bases de datos desempeñan un papel esencial, ya que constituyen el medio principal para almacenar, organizar y acceder a la información que el sistema utiliza.

13.3. Bases de Datos

Una base de datos (BD) almacena información relevante para una organización, y los sistemas de bases de datos están diseñados para gestionar grandes volúmenes de información de manera eficiente.

De acuerdo con Silberschatz et al. (2006), la gestión de datos implica tanto la definición de estructuras para almacenar la información como la implementación de mecanismos que permitan su manipulación. Asimismo, los sistemas de bases de datos deben garantizar la fiabilidad y seguridad de la información almacenada, incluso frente a fallos del sistema o intentos de acceso no autorizados.

Al igual que en los sistemas de información, las BD también atraviesan una serie de fases a lo largo de su vida útil. Este proceso (ciclo de vida), comprende diversas etapas que permiten su desarrollo, tales como diseño, implementación, análisis, entre otras.

Existen diferentes tipos de BD, estas permiten gestionar diferentes tipos de datos en diferentes condiciones, algunos de los más comunes son:

- Relacionales
- Jerárquicas
- Orientadas a objetos
- No relacionales

Bases de datos relacionales

En una base de datos relacional, los datos se organizan en tablas que contienen información sobre cada entidad y representan categorías predefinidas mediante filas y columnas (Microsoft, s.f.).

Para diseñar una base de datos relacional, es necesario realizar un proceso que defina su estructura, de modo que esta responda por completo a las necesidades del usuario.

De acuerdo con Casas (2014), el diseño de una BD es el proceso mediante el cual se determina la estructura de los datos que debe tener la base de datos de un sistema de información, así como la forma en que estos deben almacenarse y gestionarse para permitir una explotación eficiente de la información.

En la siguiente tabla se presentan las etapas del diseño de una base de datos:

Etapa	Descripción
Diseño conceptual	Se analizan los requisitos solicitados por el usuario y se plasman en un esquema conceptual. En esta etapa se definen las entidades, los atributos y las relaciones.
Diseño Lógico	Su objetivo es transformar el resultado del diseño conceptual en el modelo relacional. Se normalizan los datos y se definen las llaves primarias y foráneas.
Diseño físico	Se determina el tipo de base de datos a utilizar y se adapta el esquema lógico al SGBD seleccionado. También se define la forma de almacenamiento y el lenguaje de consulta que se empleará.

Tabla 28. Fases del diseño de una base de datos.

Por otro lado, existen diversos tipos de usuarios de los sistemas de bases de datos, quienes, dependiendo de sus necesidades, tendrá una interfaz diferente. Por ejemplo:

- Desarrolladores del sistema
- Administradores de la base de datos
- Usuarios finales

Sistemas gestores de bases de datos

De acuerdo con Silberschatz et al. (2006), un sistema gestor de bases de datos (SGBD) es una colección de datos interrelacionados y un conjunto de programas que permiten acceder a dichos datos. El propósito principal de un SGBD es ofrecer un medio práctico y eficiente para almacenar y recuperar la información contenida en una base de datos.

Entre las principales funciones de un SGBD se encuentran:

- La creación y definición de bases de datos.
- El control de acceso a los datos almacenados.
- La provisión de mecanismos de respaldo y recuperación de la información.

Cabe mencionar que estas no son las únicas funciones, por lo que se recomienda revisar más a fondo las capacidades específicas que ofrecen los distintos SGBD.

Por su parte, Valderrey (2013) señala que algunas de las ventajas de utilizar un SGBD son:

- Facilitar la manipulación de grandes volúmenes de datos.
- Garantizar la consistencia de la información, incluso ante posibles errores, mediante políticas de respaldo adecuadas.
- Permitir la reorganización de los datos con un impacto mínimo en el código de las aplicaciones.

De igual manera, existen otras ventajas que varían según el sistema gestor utilizado, por lo que se sugiere profundizar en las características.

Uno de los lenguajes de consulta más utilizados para interactuar con los sistemas gestores de bases de datos es el SQL. Cuando se necesita recuperar datos de la base de datos, se utiliza el lenguaje SQL para efectuar la petición: el SGBD procesa la petición y SQL recupera los datos solicitados de la base de datos y los devuelve (Muñoz, 2017).

13.4 SQL

El lenguaje SQL (Structured Query Language, Lenguaje Estructurado de Consultas) es un lenguaje estándar de programación diseñado para la creación, manipulación y acceso a bases de datos relacionales.

De acuerdo con Redait Media (2015), SQL se compone de sentencias, cada una con una utilidad diferente, por ejemplo:

Componente	Utilidad	Ejemplo
CREATE DATABASE	Creación de una BD	1 CREATE DATABASE nombre_base_de_datos;
CREATE TABLE	Creación de una tabla	1 CREATE TABLE nombre_tabla (
		2 nombre_columna1 tipo_de_dato,
		3 nombre_columna2 tipo_de_dato,
		4 ...
		5);

CREATE VIEW	Creación de una vista	1	CREATE VIEW nombre_vista AS
		2	SELECT columnas
		3	FROM nombre_tabla
		4	WHERE condición;
SELECT	Consultar los datos almacenados en una tabla	1	SELECT columnas
		2	FROM nombre_tabla
INSERT	Inserción de datos en una tabla	1	INSERT INTO nombre_tabla (columna1, columna2, ...)
		2	VALUES (valor1, valor2, ...);
UPDATE	Modificar los datos ya existentes en una tabla	1	UPDATE nombre_tabla
		2	SET columna1 = nuevo_valor1, columna2 = nuevo_valor2, ...
		3	WHERE condición;
		4	UPDATE nombre_tabla
DELETE	Borrar datos almacenados en una tabla	1	DELETE FROM nombre_tabla
		2	WHERE condición;

Tabla 29. Algunas sentencias utilizadas en SQL.

El lenguaje SQL permite no solo crear y gestionar bases de datos, sino también realizar consultas específicas que facilitan la recuperación de información según criterios determinados. Para ello, es fundamental conocer las sentencias y combinaciones de instrucciones que permiten filtrar, ordenar y manipular los datos de manera eficiente. A continuación, se desglosan algunos ejemplos:

- ✓ **SELECT:** Se utiliza para consultar los datos de una base de datos, por ejemplo, supongamos que tenemos la siguiente tabla, denominada 'abarrotos'.

Nombre	Costo kg	Stock piezas
Arroz	30.00	97
Garbanzos	26.00	52
Frijol	32.00	84

Tabla 30. Tabla ejemplo.

Para que, mediante SQL, se genere la consulta de toda la información de la tabla, bastará con colocar:

1	SELECT *
2	FROM abarrotos;

Esta instrucción devolverá todas las filas y columnas que tenga la tabla consultada, en este caso denominada 'abarrotes'.

Si lo que se busca es mostrar solo el nombre y el costo de cada producto, se utiliza de la siguiente forma:

1	SELECT Nombre, Costo_kg
2	FROM abarrotes;

En este caso la instrucción 'SELECT' se acompaña del nombre de las columnas seleccionadas, observe que para separar una columna de otra se utiliza una coma (,). En los dos ejemplos anteriores, se utiliza un punto y coma (;) para marcar el final de la instrucción, con esto indicamos al sistema que puede procesarla.

Se pueden hacer consultas más específicas si nos apoyamos de la sentencia 'WHERE', que se utiliza para especificar condiciones o filtrar datos. Supongamos que de la tabla 14 de desea consultar únicamente los productos que tengan un valor igual o mayor a 60, entonces la consulta sería la siguiente:

1	SELECT Nombre, Costo_kg
2	FROM productos
3	WHERE Costo_kg >= 60;

Observe que un operador relacional acompaña el comando 'WHERE', para establecer correctamente la condición.

✓ WHERE

La cláusula 'WHERE' se utiliza para filtrar información de acuerdo con una condición específica. Esta cláusula cuenta con diversas posibilidades para su uso, a continuación, algunos ejemplos:

- Una condición con operadores relacionales, retomando la tabla 14:

Operador	Situación	Ejemplo	Resultado						
=	Se desea consultar solo los abarrotes que cuestan exactamente 26 pesos	<table border="1"> <tr> <td>1</td> <td>SELECT * FROM productos</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>WHERE Costo_kg = 26;</td> </tr> </table>	1	SELECT * FROM productos	2	WHERE Costo_kg = 26;	Todas las columnas de la tabla, con los datos correspondientes con el abarrote denominado "garbanzos".		
1	SELECT * FROM productos								
2	WHERE Costo_kg = 26;								
>, <, >=, <=	Se desea consultar todos aquellos productos que tienen un costo menor que 50 pesos	<table border="1"> <tr> <td>1</td> <td>SELECT Nombre, Costo_kg</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>FROM productos</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>WHERE Costo_kg < 31;</td> </tr> </table>	1	SELECT Nombre, Costo_kg	2	FROM productos	3	WHERE Costo_kg < 31;	Las columnas 'Nombre' y 'Costo_kg', con los datos correspondientes con las filas de "garbanzos" y "arroz".
1	SELECT Nombre, Costo_kg								
2	FROM productos								
3	WHERE Costo_kg < 31;								

Tabla 31. Ejemplos de aplicación de la cláusula WHERE, acompañada de operadores relacionales. **Considere que la escritura de algunos operadores puede variar según el lenguaje de programación que se esté utilizando.

- Combinación de condiciones con operadores lógicos, retomando la tabla 14.

Operador	Situación	Ejemplo	Resultado
AND	Se desea consultar los productos que cuestan más de 29 y tienen más de 85 de stock.	<ol style="list-style-type: none"> 1 SELECT Nombre, Costo_kg, Stock_piezas 2 FROM productos 3 WHERE Costo_kg > 29 AND Stock_piezas > 85; 	Las columnas Nombre, Costo_kg y Stock_piezas, con el abarrote denominado "arroz".
OR	Se desea consultar los productos que cuestan menos de 29 o tienen menos de 55 de stock.	<ol style="list-style-type: none"> 1 SELECT Nombre, Costo_kg, Stock_piezas 2 FROM productos 3 WHERE Costo_kg > 29 OR Stock_piezas < 55; 	Las columnas Nombre, Costo_kg y Stock_piezas, con el abarrote denominado "arroz".

Tabla 32. Ejemplos de aplicación de la cláusula WHERE, acompañada de operadores lógicos. **Considere que la escritura de algunos operadores puede variar según el lenguaje de programación que se esté utilizando.

Hay más cláusulas con las que puede acompañarse como BETWEEN, IN, LIKE, entre otras.

Una actividad imprescindible durante el diseño y la gestión de una base de datos es su documentación, es decir, la elaboración del diccionario de datos, el cual almacena de manera organizada los metadatos que describen la estructura y los elementos de la base de datos. Se recomienda revisar el Portal de la Política de Datos de la Ciudad de México (2018), acerca de la Elaboración de diccionarios de datos.

13.5 SQLite

SQLite es una biblioteca en lenguaje C que implementa un motor de base de datos SQL pequeño, rápido, autónomo, de alta confiabilidad y completo (SQLite, 2025). Se caracteriza porque no requiere la configuración o instalación de un servidor independiente, por lo que es una herramienta muy práctica.

SQLite emplea una sintaxis muy similar a la del SQL estándar, por lo que no se va a abundar en este tópico; sin embargo, se recomienda profundizar en el estudio de las principales diferencias sintácticas y funcionales entre ambos.

13.6 Java

De acuerdo con el Portal de AWS (2024), Java es un lenguaje de programación muy utilizado para desarrollar aplicaciones web. Desde hace más de dos décadas, ha sido una de las opciones más populares entre los programadores, con millones de aplicaciones creadas con este lenguaje. Java es multiplataforma y orientado a objetos, lo que permite crear programas que pueden ejecutarse en diferentes sistemas operativos sin necesidad de modificarlos.

13.7 Programación Orientada a Objetos

Para comprender mejor el lenguaje Java, es importante primero profundizar en la metodología de la Programación Orientada a Objetos (POO), ya que este lenguaje se basa en dicho paradigma.

De acuerdo con Rivas (s.f.), la POO define los programas en términos de clases de objetos, que son entidades que combinan estado (propiedades o datos), comportamiento (procedimientos o métodos) e identidad (característica que distingue a cada objeto de los demás).

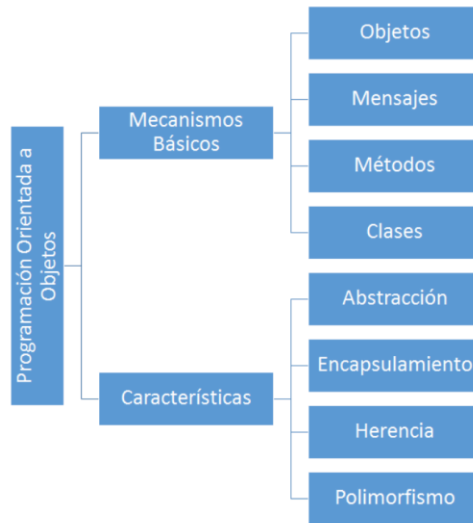


Imagen 5. Características y mecanismos básicos de la POO. Tomada de Rivas (s.f.).

Para conocer las definiciones de las características y mecanismos fundamentales de la POO, se recomienda revisar el [Cuadernillo de ejercicios para trabajo en casa. Módulo: Programación Orientada a Objetos, elaborado por la Mtra. Marilú Rivas García](#) (recurso digital, pp. 5–7), o el [Portal Académico CCH: Características de la POO](#).

Por otro lado, los programadores suelen apoyarse en un IDE (*Entorno de Desarrollo Integrado*), que es un *software* diseñado para facilitar y optimizar el proceso de creación de programas. Entre sus principales funciones se encuentran el resaltado de sintaxis, la compilación del código y la depuración de errores, entre otras herramientas que agilizan el trabajo del desarrollador.

Sin embargo, un IDE no lo es todo. Java cuenta con normas específicas de estructura y sintaxis que deben conocerse. En la tabla 1 se mencionó que existen diferencias importantes en la forma de declarar elementos como variables y constantes, dependiendo del lenguaje de programación utilizado.

Al igual que en PHP, en Java se emplean **estructuras de control** y **operadores** de comparación y asignación. Por ello, no se profundizará en estos temas; no obstante, es fundamental que el sustentante sea capaz de identificar su uso y aplicación dentro de distintos fragmentos de código en Java.

Acumuladores y contadores

- ✓ **Contadores:** Un contador no es más que una variable que lleva la cuenta de algo, generalmente aumentando o disminuyendo su valor de forma controlada. Los contadores suelen utilizarse dentro de ciclos o funciones recursivas para registrar cuántas veces se repite una acción o proceso. Por ejemplo:

1	<code>int contador = 0;</code>
2	<code>while (contador < 7) {</code>
3	<code> System.out.println("Repite " + contador);</code>
4	<code> contador++;</code>
5	<code>}</code>

Tabla 33. Ejemplo de uso de un contador en Java.

En la línea 1 inicia el ciclo en 0, y aumenta 1 cada vez que se repite el ciclo (pues usa una estructura `while`). Este programa imprimirá la palabra "Repite" y el número del contador hasta llegar al 6 (`contador < 7`).

- ✓ **Acumuladores:** Un acumulador es una variable que almacena el resultado de una suma o resta continua. Su valor se va modificando con base en los nuevos datos que se procesan, por ejemplo, para calcular totales o promedios. Por ejemplo:

1	<code>int acumulador = 0;</code>
2	<code>for (int i = 1; i <= 7; i++) {</code>
3	<code> acumulador += i;</code>
4	<code>}</code>
5	<code>System.out.println("Total: " + acumulador);</code>

Tabla 34. Ejemplo de uso de un acumulador en Java.

En la línea 1 inicia el ciclo en 0, utiliza la estructura `for`: en cada repetición se suma uno a `i`, y se repetirá mientras `i <= 7`. Al finalizar el ciclo, el acumulador habrá almacenado la suma total de los números del 1 al 7.

13.8. Interfaz de usuario Android

Android es un sistema operativo para móviles, se basa en el sistema operativo Linux. Su objetivo inicial fue fomentar el uso de un sistema de tipo abierto, gratuito, multiplataforma y muy seguro.

Sin duda, el éxito de este sistema operativo se debe a las múltiples características que lo han posicionado por encima de sus competidores. Por ello, resulta fundamental conocer los componentes gráficos y los elementos de despliegue de las aplicaciones móviles, como:

- ✓ **Tipos de menú.** Los menús son un componente fundamental de la interfaz de usuario en la mayoría de las aplicaciones. Algunos ejemplos de tipos de menús Android son:
 - Menú de opciones y barra de la app: conjunto principal de botones o acciones que tiene una aplicación. Ahí se colocan las funciones más importantes que afectan a toda la app, como *buscar*, *enviar correo* o *abrir configuración*
 - Menú contextual: es un menú que aparece cuando el usuario mantiene presionado un elemento en la pantalla. Muestra acciones relacionadas con ese contenido o con el lugar donde se hizo la pulsación.

- Menú emergente: es un pequeño menú que se despliega como una lista vertical junto al elemento que lo activó. Sirve para mostrar opciones adicionales relacionadas con una parte específica del contenido.
- ✓ Componentes utilizados en la interfaz de usuarios: de acuerdo con el portal Developers (s.f.),
 - **Componentes de la acción** ayudan a las personas a lograr un objetivo, por ejemplo, los botones (*button*).
 - **Componentes de contención** contienen información y acciones, incluidos otros componentes, por ejemplo, las listas.
 - **Componentes de navegación** ayudan a las personas a moverse por la IU (interfaz de usuario), los componentes de selección permiten a las personas especificar opciones, por ejemplo, la barra de navegación o el panel lateral de navegación.
 - **Componentes de selección** permiten a las personas especificar opciones, por ejemplo, las casillas de verificación (*checkbox*), los botones de radio (*radiobutton*) o los interruptores.
 - **Componentes de entrada de texto** permiten que las personas ingresen y editen texto, por ejemplo, los campos de texto (*edit text*)

Bibliografía sugerida

Amazon Web Services. (2024). ¿Qué es un entorno de desarrollo integrado (IDE)? Revisado por última vez el 06 de octubre de 2025, desde <https://aws.amazon.com/es/what-is/ide/>

Android developers. (s.f.). Agregar menús. Revisado por última vez el 13 de octubre de 2025, desde <https://developer.android.com/develop/ui/views/components/menus?hl=es-419>

Android developers. (s.f.). Componentes de material. Revisado por última vez el 14 de octubre de 2025, desde <https://developer.android.com/design/ui/mobile/guides/components/material-overview?hl=es-419#:~:text=Figura%20:%20Comunicaci%C3%B3n-Componentes%20de%20la%20contenci%C3%B3n,para%20mostrar%20grupos%20de%20contenido>

Ávila, J., & Bailón, J. (2022). Pseudocódigo y diagramas de flujo. En Análisis y diseño en POO. Portal Académico del CCH, UNAM. <https://portalacademico.cch.unam.mx/cibernetica1/analisis-y-diseno-en-poo/pseudocodigo-y-diagramas-de-flujo>

AWS. (2024). ¿Qué es Java? Revisado por última vez el 14 de octubre de 2025, desde <https://aws.amazon.com/es/what-is/java/>

Bailón, J., & Baltazar, J. M. (2021). Características de la POO. En Algoritmos y codificación. Portal Académico del CCH, UNAM. <https://portalacademico.cch.unam.mx/cibernetica1/algoritmos-y-codificacion/caracteristicas-POO>

Berzal, F. (s.f.). Diseño de bases de datos. Revisado por última vez el 07 de octubre de 2025, desde <https://flanagan.ugr.es/docencia/2005-2006/2/apuntes/ciclovida.pdf>

Beynon-Davies, P. (2018). Sistemas de bases de datos. España: Reverté.

Cairó, O. (2006). Fundamentos de programación. Piensa en C. Primera edición. Pearson Educación.

Casas Roma, J., & Conesa i Caralt, J. (2014). Diseño conceptual de bases de datos en UML. España: Editorial UOC, S.L.

Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia-UNAM. (2016–2017). Diseño lógico de una base de datos. Revisado por última vez el 07 de octubre de 2025, desde https://repositorio-uapa.cuaed.unam.mx/repositorio/moodle/pluginfile.php/2675/mod_resource/content/1/UAPA-Diseno-Logico-Base-Datos/index.html

Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia-UNAM. (2016–2017). Sistemas de información. Revisado por última vez el 07 de octubre de 2025, desde https://repositorio-uapa.cuaed.unam.mx/repositorio/moodle/pluginfile.php/1415/mod_resource/content/1/contenido/index.html

Coordinación de Universidad Abierta y Educación a Distancia-UNAM. (2016–2017). Teoría de las organizaciones. Revisado por última vez el 07 de octubre de 2025, desde https://programas.cuaed.unam.mx/repositorio/moodle/pluginfile.php/1101/mod_resource/content/15/uapa_Los_sistemas_de_informacion/index.html

IBM. (s.f.). ¿Qué es una base de datos? Revisado por última vez el 07 de octubre de 2025, desde <https://www.ibm.com/mx-es/think/topics/database>

IBM. (s.f.). ¿Qué es una base de datos relacional? Revisado por última vez el 07 de octubre de 2025, desde <https://www.ibm.com/mx-es/think/topics/relational-databases>

Ibáñez, P., & García, G. (2010). *Informática II*. Primera edición. Editorial Cengage Learning.

Joyanes, L. (2010). *Fundamentos generales de programación*. CDMX (México): McGraw-Hill.

Joyanes, L. (2020). *Fundamentos de programación. Algoritmos, estructura de datos y objetos*. Quinta edición. Editorial McGraw-Hill.

Juventino. (2022). Introducción. En *Lenguaje de programación orientado a objetos con Java*. Portal Académico del CCH, UNAM. <https://portalacademico.cch.unam.mx/cibernetica2/programacion-java/introduccion>

León, R. (2021). *El libro práctico de bases de datos*. Editorial independiente. España.

López-Hermoso, J. J. (2000). *Informática aplicada a la gestión de empresas*. España: ESIC.

Marco Galindo, M. J., & Marco Simó, J. M. (2010). *Escaneando la informática*. España: Editorial UOC, S.L.

Microsoft. (s.f.). ¿Qué es una base de datos relacional? Revisado por última vez el 07 de octubre de 2025, desde <https://azure.microsoft.com/es-es/resources/cloud-computing-dictionary/what-is-a-relational-database>

Monterde, U. M. (s.f.). *Lenguajes de programación*. Unidad de Apoyo para el Aprendizaje. CUAED UNAM. Recuperado el 19 de noviembre de 2024, de https://programas.cuaed.unam.mx/repositorio/moodle/pluginfile.php/1023/mod_resource/content/1/contenido/index.html

Moreno, A. (2021). *Aprende Java en un fin de semana*. Editorial Independently Published. EE. UU.

Muñoz Chaparro, A. (2017). *Administración básica de bases de datos con ORACLE 12c SQL: Prácticas y ejercicios*. Colombia: España.

Oracle. (2024). Variables. *Java documentation*. Revisado por última vez el 11 de septiembre de 2025, desde <https://docs.oracle.com/javase/tutorial/java/nutsandbolts/variables.html>

Oracle. (2025). ¿Qué es una base de datos relacional? Revisado por última vez el 07 de octubre de 2025, desde <https://www.oracle.com/mx/database/what-is-a-relational-database/>

Pablos Heredero, C. de. (2004). *Informática y comunicaciones en la empresa*. España: ESIC Editorial.

Portal de la Política de Datos de la Ciudad de México. (2018). *Qué es un diccionario de datos*. Revisado por última vez el 13 de octubre de 2025, desde <https://politicadedatos.cdmx.gob.mx/cultura/guias/diccionario>

Redait Media. (2015). SQL: Guía paso a paso desde cero. Revisado desde https://www.google.com.mx/books/edition/SQL_Gu%C3%ADa_paso_a_paso_desde_cero/52PtCAAQBAJ?hl=es&gbpv=1&dq=sql&pg=PT1&printsec=frontcover

Rivas, M. (s.f.). Cuadernillo de ejercicios para trabajo en casa. Módulo: Programación orientada a objetos. CONALEP. Revisado por última vez el 14 de octubre de 2025, desde <https://www.conalepveracruz.edu.mx/iniciobackup/wp-content/uploads/2021/03/Programaci%C3%B3n-orientada-a-objetos-M%C3%93DULO-PROFESIONAL.pdf>

Silberschatz, A., Korth, H., & Sudarshan, S. (2006). Fundamentos de bases de datos. Quinta edición. Editorial McGraw-Hill.

SQLite. (2025). ¿Qué es SQLite? Revisado por última vez el 13 de octubre de 2025, desde <https://sqlite.org/>

The PHP Documentation Group. (2021–2025). PHP documentation. Revisado por última vez el 11 de septiembre de 2025, desde <https://www.php.net/docs.php>

Valderrey, P. (2013). Administración de sistemas gestores de bases de datos. Primera edición. Ecoe Ediciones.

Vasconcelos, J. (2017). Informática 1. Serie integral por competencias. Tercera edición ebook. Editorial Patria.

W3schools. (2025). SQL tutorial. Revisado por última vez el 13 de octubre de 2025, desde <https://www.w3schools.com/sql/>

14. Turismo

14.1. Reservaciones en un establecimiento de hospedaje

14.1.1 Servicios de Hospedaje

La industria hotelera se ha especializado y diversificado, ofreciendo variedad de alojamientos. En México, los establecimientos de alojamiento se clasifican por dimensiones, tipo de clientela, calidad de servicios, ubicación, operación, organización y proximidad a terminales.

Se cuenta con una institución que evalúa la categoría de los hoteles mediante un sistema de "Estrellas" basado en confort, servicios e instalaciones.

★	Una estrella: solo ofrece lo indispensable.
★ ★	Dos estrellas: servicios e infraestructura básicos.
★ ★ ★	Tres estrellas: instalaciones adecuadas, servicio completo y estandarizado sin grandes lujos.
★ ★ ★ ★	Cuatro estrellas: instalaciones de lujo y servicio superior
★ ★ ★ ★ ★	Cinco estrellas: instalaciones y servicios excepcionales.

Tabla 1. Aspectos clave del sistema de clasificación de estrellas de hoteles

14.1.2. Departamento de Reservaciones

El departamento de reservaciones se encarga de apartar habitaciones, recibir depósitos, atender solicitudes de reembolsos, elaborar pronósticos de ocupación y brindar información sobre tarifas. Se consideran diferentes tipos de reservación (garantizada, no garantizada, tentativas) y su procedencia (intermediarios o directa del hotel).

Al realizar una reservación, es importante considerar el tipo de habitación, los tipos de planes de alojamiento, así como sus tarifas y la forma de pago.

Para poder llevar a cabo el procedimiento de la reservación el personal del departamento debe llenar diferentes formatos de acuerdo con las características de estas; como son:

- Papeleta de reservaciones
- Depósito de la reservación
- Cancelación de la reservación
- Reembolso de reservación
- Cambio de reservación
- Hoja de reservaciones del día
- Gráfica de ocupación

El reservacionista deberá contemplar si la reservación es individual o grupal; ya que bajo este segundo caso se debe contemplar:

- Rooming list
- Cuenta maestra
- Instructivo de grupos

14.1.3. Departamento de Recepción

El departamento de recepción es el enlace entre los huéspedes y el hotel, proporcionando información y gestionando el ingreso y egreso de los huéspedes. El personal de recepción debe llevar un registro documental de los huéspedes y de los movimientos financieros.

En el departamento de recepción existen diferentes procesos que se deben llevar, dependiendo sus características propias y necesidades del cliente; algunos de estos son: asignación individual, asignación grupal, VIP, check in, check out y manejo de grupos.

14.2. Atención al huésped

14.2.1. Departamento de Concierge

El departamento de concierge de un hotel es el área encargada de brindar servicios de atención personalizada, asistencia y cualquier otra solicitud especial que los huéspedes puedan tener durante su estancia.

Al ser el hotel una empresa netamente de servicio, el área o departamento de botones, personal uniformado o concierge, como también se le conoce ofrece “servicios especiales” y son llamados así porque no son servicios generales, sino que estos son adaptados a las necesidades particulares de cada huésped, entre ellos los más comunes son la transportación, mensajería, entretenimiento y servicios personales.

14.2.2. Personal de Botones

El personal de botones, bell boys o conserjería, se encarga del manejo del equipaje, proporciona información turística y atiende las necesidades de los huéspedes. Los procedimientos de trabajo del personal de botones pueden ser: la entrada individual, la salida individual, la entrada grupal, la salida grupal, cambio de habitación y guarda Equipaje (Check-Room).

14.2.3. Departamento de Ama de Llaves

El departamento de ama de llaves, dirigido por el ama de llaves ejecutiva, se encarga de la limpieza y el mantenimiento de las habitaciones. La camarista recibe la llave maestra, la lista de habitaciones y verifica si hay requisiciones específicas; además, la camarista realiza la limpieza de la habitación siguiendo un proceso que incluye recoger la ropa, sacar la basura, limpiar el baño, surtir amenidades y llenar su reporte.

Los procedimientos de trabajo de una camarista son los siguientes:

- Recepción de turno
- Limpieza de habitación
- Objetos Olvidados

14.3. Preparación de alimentos en la cocina de un establecimiento de hospedaje

14.3.1. Funcionamiento de la Cocina de un Restaurante

La cocina y sus anexos son el conjunto de áreas necesarias para transformar los alimentos en platos elaborados. El equipo de una cocina se puede dividir en equipo mayor y equipo menor.

14.3.2. Pre-elaboración de alimentos

La pre-elaboración de alimentos, hace referencia a preparar y presentar elaboraciones culinarias sencillas, ejecutando técnicas y normas básicas, así como la manipulación, preparación y conservación de alimentos. Las etapas que se llevan a cabo en este proceso son:

1. Recepción y almacenamiento
2. Limpieza y desinfección
3. Corte y preparación
4. Cocción y tratamiento térmico
5. Envasado y etiquetado

Hierbas, Especies y Condimentos

Dentro de la pre-elaboración de alimentos es importante el conocimiento y manejo de las **hierbas especias** y **condimentos** para realzar el sabor de los platillos, a continuación, se describen sus definiciones y clasificación:

Algunos ejemplos de hierbas, especias y condimentos son: Anís, canela, cilantro, clavo de especia, comino y alcaravea, cúrcuma, curry, pimienta, comino, cebolla seca, cardamomo, jengibre, nuez moscada, pimienta cayena, azafrán, fenogreco o alholva, albahaca, y mostaza, hinojo, laurel, entre otras.

Términos Culinarios Básicos

Baño maría, batir, bouquet garnic, clarificar desmenuzar, deshuesar, ligazón, macerar, marinar, mechar, picar, rebozado, reducir, saltar, sancochar.

Cocción de los Alimentos

La cocción modifica los alimentos crudos mediante la aplicación de calor para hacerlos más digestivos, sabrosos y seguros. Los métodos de cocción se clasifican por el medio en que se realiza: cocción en medio seco, cocción en medio líquido o húmedo, cocción en medio graso y cocción mixta o combinada (agua y grasa).

Dentro de esta clasificación de métodos de cocción disponemos de varias técnicas que proporcionarán diferentes resultados a los alimentos cocinados.

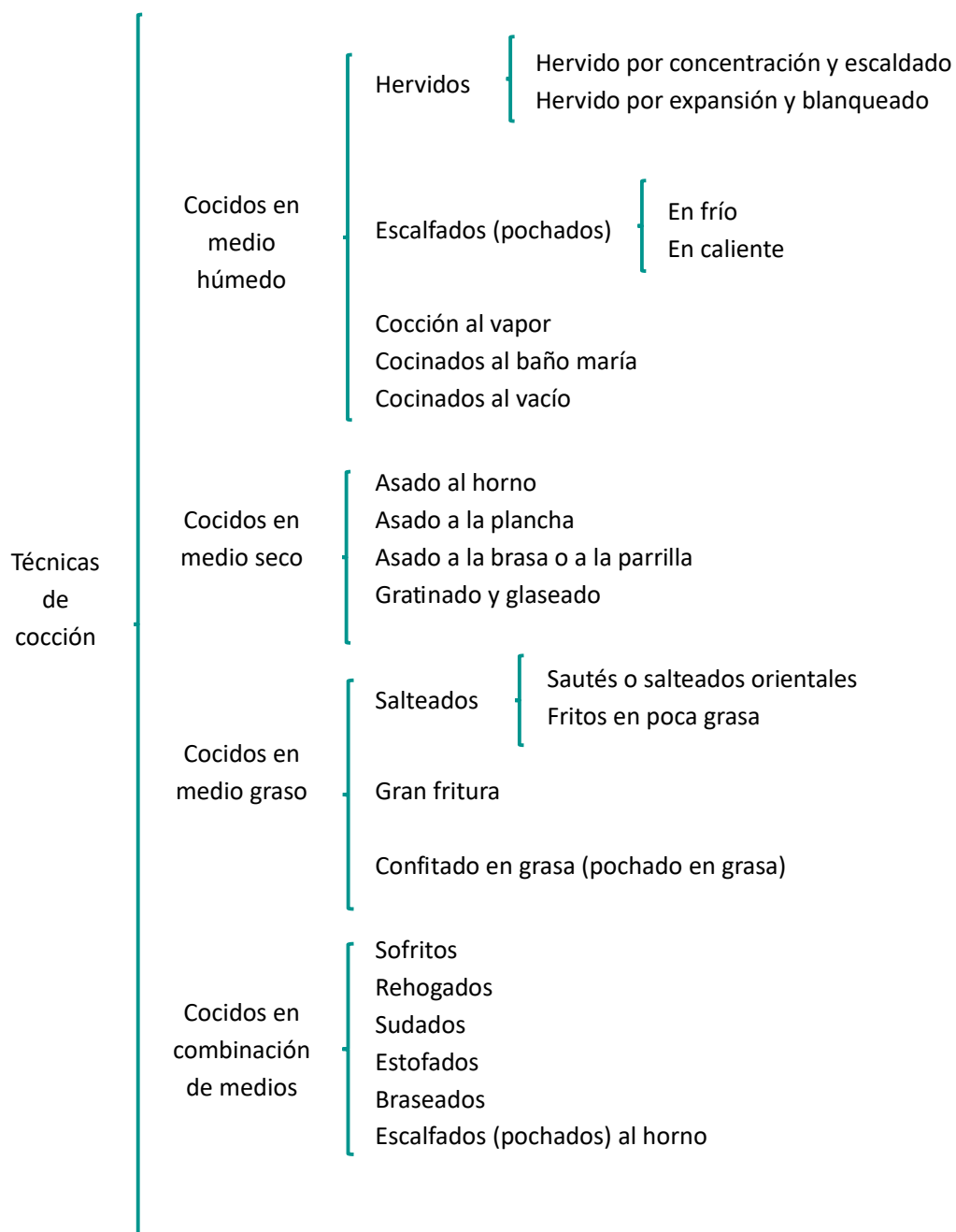


Figura 2. Técnicas de cocción

Lavado y desinfección de frutas, verduras y hortalizas

Lavar y desinfectar frutas y verduras es fundamental para eliminar bacterias y prevenir enfermedades. Los pasos varían según el tipo de verdura o fruta: hojas, cáscara dura, cáscara blanda, crucíferas y tubérculos:

Preparación de Bases

Los fondos son jugos perfumados que constituyen la base de diversas cocciones y salsas. Los tipos de fondos incluyen fondo blanco (ave y ternera), fondo oscuro (huesos y vino tinto) y fumet (pescado).

Las salsas complementan los platillos y se clasifican en primarias y secundarias como se muestra a continuación:

Salsas	
Salsas primarias	Salsas secundarias
Emulsionadas frías	
Vinagreta	Vinagreta española
	Vinagreta balsámica
	Vinagreta de limón
	Vinagreta de naranja
	Vinagreta picante
	Salsa chimichurri
Mayonesa	Salsa tártara
	Salsa golf
	Salsa verde
	Mayonesa de limón
	Mayonesa de finas hierbas
	Mayonesa de mantequilla y finas hierbas
Emulsionadas calientes	
Bechamel	Salsa mornay
	Salsa de queso
	Salsa de vino blanco
	Salsa oscura
	Salsa de champiñones
	Salsa de vino rojo
	Mostaza
Española	Salsa oporto
	Salsa charcutiere
	Salsa madeira
	Salsa cazadora
	Salsa bigarrade
	Salsa bordalesa

	Velouté	Salsa alemana
		Salsa bercy
		Salsa suprema
		Salsa de vino blanco
	Holandesa	Salsa de maitaise o de naranja
		Salsa muselina
		Salsa noisette
	Pomodoro	Salsa napolitana
		Salsa boloñesa
		Salsa rosada
Inglesa	Salsa barbecue	

Tabla 3. Clasificación de las salsas

14.4. Servicio de alimentos y bebidas al comensal en un restaurante

14.4.1. El Restaurante de un Hotel (Cuatro Estrellas)

El restaurante complementa la atención a los huéspedes satisfaciendo sus necesidades dentro del hotel.

La terminología de un restaurante incluye: bar, añada, alcohol neutro, barrica y cava, crema, cobbler, cóctel, contraetiqueta, decantar, espirituoso, extracto, golpe, dash, escarchado, stick, mixología, mosto y tisana.

Equipo de Servicio

El equipo de servicio se coordina entre el capitán de meseros y el encargado de eventos. El equipo en el comedor se integra por loza, plaqué, cristalería, blancos y auxiliares.

Tipos de Servicio

En un restaurante, un tipo de servicio se refiere a la forma en que se ofrece la comida y la experiencia al cliente. Esto abarca desde la presentación de los platos hasta la interacción con el personal y el ambiente general del local. Los tipos de servicio son:

- Servicio americano
- Servicio francés
- Servicio ruso
- Servicio inglés

Montajes y Servicios Especiales

El montaje de mesas para banquetes requiere tiempo y consideración de factores como decoración y colocación de comensales. Algunos ejemplos de montajes son: Mesa en "T", mesa en "herradura", mesa en "U", mesa ovalada o imperial, Mesa en I.

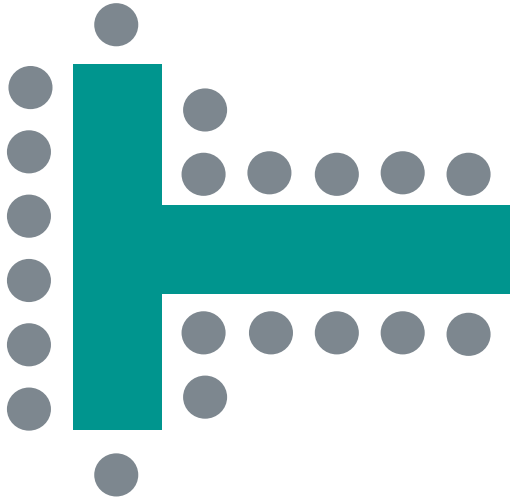


Figura 4. Mesa en "T"

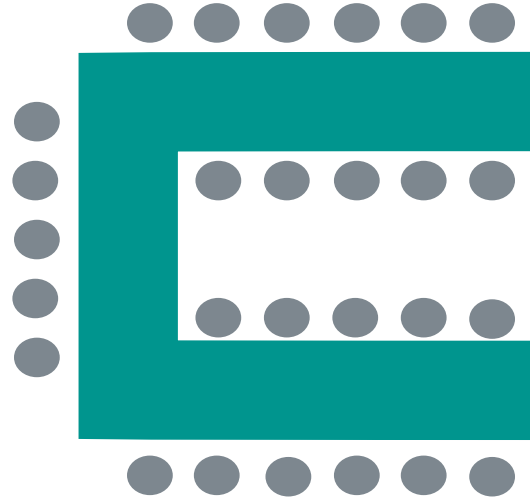


Figura5. Mesa en "herradura"

14.4.2. Servicio de Alimentos en un Restaurante de un Hotel de Cuatro Estrellas

El servicio de alimentos en un restaurante es la preparación y entrega de comida y bebida a los comensales. Puede ser a la carta, menú o un sistema de buffet

Características de la preparación previa

La preparación del servicio también llamada (mise en place) es un conjunto de actividades dirigidas por el capitán, que se realizan antes de la apertura del comedor, con el fin de presentar la mejor imagen y contribuir en la operación armoniosa y ágil. La óptima preparación del comedor incluye los siguientes aspectos:

- Equipos: loza, cristal, plaqué, blancos cartas y menús
- Personal disponible
- Alimentos y bebidas por vender
- Mobiliario, instalaciones y el local mismo

Proceso de reservación y recepción del comensal

El cliente hará su reservación con cierta anticipación, en algunos restaurantes tales como: restaurante de lujo, restaurante con variedad o restaurante con servicio de banquetes. Las reservaciones sirven para preparar todo lo necesario para que los clientes reciban un mejor servicio.

Técnicas de Servicio

Existen diferentes técnicas de servicio a la mesa realizadas por el mesero entre las cuales se encuentran:

- Charoleo
- Cuchareo
- Flameo y preparaciones frente a la mesa

14.4.3. El Servicio de Bebidas

El servicio de bebidas consiste en ofrecer bebidas a los comensales de manera ordenada y atenta. Las normas de servicio y etiqueta incluyen servir por la derecha, no tocar los labios de la copa y servir en el orden en que se toman.

Equipo de cristalería

El equipo que se requiere para dar servicio a nuestro cliente siempre se deberá tener preparado y al alcance inmediato para agilizar el servicio, el bartender llegará antes de la apertura del establecimiento para tener listo todos los ingredientes y utensilios que ocupará durante su jornada. De preferencia la cristalería de bar debe ser transparente y de diseño clásico, para poder apreciar con nitidez, los cócteles clásicos universales. Existen diferentes tipos de vasos como: vasos largos o long drinks, vasos cortos u old fashioned, vasos high ball y copas altas.

Utensilios de Bar

Un buen bartender debe tener un kit de herramientas para preparar las bebidas, incluyendo shaker, cuchara de mango largo, cucharas medidoras y rallador. Otros utensilios incluyen macerador, vaso medidor, colador Julep, sacacorchos, exprimidor de cítricos y licuadora para hielo.

Preparación de Bebidas con Alcohol

Una bebida alcohólica contiene más de 2.5° de alcohol, éstas se obtienen por fermentación o destilación. También existen los aperitivos, estos se sirven antes de las comidas, los digestivos que son dulces, y los vinos, los cuales se clasifican por color (tinto, blanco, rosado).

Bebidas sin Alcohol

Las bebidas sin alcohol incluyen café, té, jugos, zumos y batidos.

14.5. Cobro de los servicios y consumos en un establecimiento de hospedaje, alimentos y bebidas

14.5.1. Descripción General del Puesto de Cajero de Restaurante y de Recepción

El cajero de recepción efectúa y recaba los pagos de los clientes, lleva los estados de cuenta y brinda servicios como cambio de moneda. El cajero de restaurante recaba los pagos de los comensales y mantiene actualizadas las cuentas de las mesas.

A continuación, se menciona la terminología del departamento del puesto de cajero de restaurante y de recepción más utilizada: cargo, abono, saldo, saldo acreedor, saldo deudor, divisa, tipo de cambio, factura, RFC, IVA, descuento, cortesía, cupón, ISH, vócher, cancelación, misceláneo, vale, fondo fijo, arqueo de caja, cheque de viajero y sobre de concentración.

14.5.2. Cobro de los Consumos en la Caja de Restaurante

El cheque de consumo es el documento con el cual se cobra el consumo de alimentos y bebidas. Los datos del cheque de consumo incluyen número de mesero, cantidad de personas, número de mesa, fecha, hora, número de cheque, cantidad, concepto, costo del alimento, importe, nombre, cuarto, firma del huésped, subtotal, impuesto, propina y el total.

14.5.3. Cobro de los Consumos en la Caja de Recepción

El cajero de recepción conoce los límites de pago en tarjetas de crédito y aplica políticas de descuentos, realiza el cobro de cuentas registrando cargos y abonos, controla los estados de cuenta y elabora reportes de efectivo, cuentas por cobrar y ajustes y, además, elabora el corte de caja y el sobre de concentración.

14.6. Auditoría nocturna, en un establecimiento de hospedaje

14.6.1. Registros Contables

Movimientos de ajustes y traspasos

Los ajustes son abonos en los estados de cuenta de huéspedes, como ajustes en el precio de las habitaciones o servicios no satisfactorios.

Como cajero de recepción, se debe elaborar una nota que justifique el movimiento en el estado de cuenta.

Los traspasos son transferencias de la cuenta de una persona a otra, anotando en ella el número de la habitación, del estado de cuenta y el nombre del huésped.

Movimientos de una cuenta maestra

Es una cuenta que será pagada por la compañía o por la agencia de viajes solo cuando sean grupos grandes entre 40 y 60 personas. El manejo de las cuentas en grupos se maneja de la siguiente manera:

Se abrirá una cuenta maestra, la cual será pagada por la compañía, agencia de viajes o coordinador del grupo; todos los cargos de esta cuenta deben ser autorizados por los ejecutivos, en donde se cargarán los siguientes posibles conceptos:

- Renta de habitación
- Renta de salones
- Coctel de apertura de bienvenida
- Desayunos
- Servicios especiales de catering
- Cena de clausura

En dicho caso se apertura cuentas individuales de cada uno de los integrantes del grupo o por habitación, de acuerdo con el rooming list; en las cuales se registrarán los consumos que realice cada persona de manera individual como son: alimentos, bebidas, lavandería, llamadas o servicios adicionales solicitados por los huéspedes, que no están incluidos en los gastos absorbidos por el grupo o empresa. Los cuales se ven reflejados en la cuenta maestra general del grupo, para que sean pagados a la salida del grupo.

Bibliografía sugerida

Báez Casillas, S. (2002). *Hotelería*. CECSA.

Barrera Torre, M. E., & Ramos Martín, F. P. (2011). *Operación de hoteles 1, división cuartos*. Trillas.

Betobé, P. (2016). *La organización de la cocina en un restaurante*. www.expohorecamagazine.com.
<https://horeca.expob2b.es/es/n-/14376/la-organizacion-de-la-cocina-en-un-restaurante>

Blog gastronomía. (s.f.). *Medios y tipos de cocción*. GastroNomia.
<http://gastronomiadecris.blogspot.com/2013/11/medios-y-tipos-de-coccion-clasificacion.html>

Carreño, Y. (s/f.). *Procedimiento de rutina de entrada y salida de grupos botones*. SlideShare. Recuperado el 30 de abril de 2025, de <https://es.slideshare.net/slideshow/procedimiento-de-rutina-de-entrada-y-salida-de-grupos-botones/250612907>

Colegio de bachilleres. (2022). *Guía de estudio de preparación de alimentos* [Archivo PDF].
[https://huelladigital.cbachilleres.edu.mx/secciones/docs/guias/laboral/4to-semestre/22-A/Preparacion de alimentos 22A.pdf](https://huelladigital.cbachilleres.edu.mx/secciones/docs/guias/laboral/4to-semestre/22-A/Preparacion%20de%20alimentos%2022A.pdf)

Colegio de bachilleres. (2022). *Guía de estudio de servicio de restaurante* [Archivo PDF].
<https://huelladigital.cbachilleres.edu.mx/secciones/docs/guias/laboral/5to-semestre/ServicioRestaurante.pdf>

Colegio de Bachilleres. (2025). *Huella Digital. Obtenido de Guía Caja de Restaurante y Caja de Recepción. 5to semestre*. <https://huelladigital.cbachilleres.edu.mx/secciones/docs/guias/laboral/5to-semestre/CajaRestCajaRecep.pdf>

Colegio de Bachilleres. (2025). *Huella Digital. Obtenido de Guía de la asignatura Servicio de Restaurante. 5to semestre. Plan 2014*. <https://huelladigital.cbachilleres.edu.mx/secciones/docs/guias/laboral/5to-semestre/ServicioRestaurante.pdf>

Colegio de Bachilleres. (2025). *Huella Digital. Obtenido de Guía Auditoría Nocturna. 6to semestre. Plan 2014*. [https://huelladigital.cbachilleres.edu.mx/secciones/docs/guias/laboral/6to-semestre/22-A/Auditoria nocturna 22A.pdf](https://huelladigital.cbachilleres.edu.mx/secciones/docs/guias/laboral/6to-semestre/22-A/Auditoria%20nocturna%2022A.pdf)

Colegio de Bachilleres. (2025). *Huella Digital. Obtenido de Guía Auditoría Nocturna. 6to semestre* [https://huelladigital.cbachilleres.edu.mx/secciones/docs/guias/laboral/6to-semestre/21-A/Auditoria Nocturna 21A.pdf](https://huelladigital.cbachilleres.edu.mx/secciones/docs/guias/laboral/6to-semestre/21-A/Auditoria%20Nocturna%2021A.pdf)

Conserjería – recepción manual, innovación y cualificación. (2008). Limusa.

De la Torre, F. (2009). *Administración hotelera 1, división cuartos*. Trillas.

De la Torre, F. (2012). *Administración hotelera 2. Alimentos y bebidas*. Trillas

Di Muro Pérez, L. (2012). *Manual práctico de recepción hotelera*. Trillas.

Elphick, D. (2022). *Registro en el hotel: su guía completa de procedimientos, estrategias y software*. Little Hotelier.
<https://www.littlehotelier.com/es/blog/gestiona-tu-alojamiento/registro-hotel-procedimientos-estrategias-software/>

Español, M. [@mijnzpespanol6987]. (s/f.). *¿Qué hace un ama de llaves?* [Video]. YouTube. Recuperado el 30 de abril de 2025, de <https://www.youtube.com/watch?v=0g70rjc5IsQ>

Hernández Castillo, C. (2009). *Manejo del departamento de botones*. Trillas.

Hernández Castillo, C. (2010). *Departamento de Reservas*. Trillas.

Lara Martínez, J. (2010). *Dirección de Alimentos y Bebidas en Hoteles*. LIMUSA

Manuales de procedimientos de Ama de Llaves. (s/f.). Google.com. Recuperado el 30 de abril de 2025, de <https://sites.google.com/site/crowneplazatlalne/principal/departamentos/ama-de-llaves/manuales-de-procedimientos-de-ama-de-llaves>

Sandoval, D. (2011). *Salsas madre y salsas derivadas* [Archivo PDF]. https://chefdannysandoval.weebly.com/uploads/1/1/2/6/11262475/salsas_madres_y_salsas_derivadas.pdf

SECRETARIA DE TURISMO. (s/f.). *Sistema de Clasificación Hotelera*. [https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/928546/Lineamientos del Sistema de Clasificaci n Hotelera.pdf](https://www.gob.mx/cms/uploads/attachment/file/928546/Lineamientos_del_Sistema_de_Clasificaci_n_Hotelera.pdf)

Tema 5.4. Operaciones de cierre diario - Hotelería Operacional - Instituto Consorcio Clavijero. (s/f.). Edu.mx. Recuperado el 30 de abril de 2025, de https://cursos.clavijero.edu.mx/cursos/127_ho/modulo5/contenidos/tema5.4.html?opc=1

