

Temas fundamentales y bibliografía



SACEP

Servicio de Apoyo para la Certificación por Evaluaciones Parciales

Contenido

Temas fundamentales y bibliografía	3
1. Matemáticas	3
Bibliografía sugerida	76
2. Humanidades	78
Bibliografía sugerida	87
Ciencias Experimentales	90
3. Biología	90
Bibliografía sugerida	104
4. Geografía	105
Bibliografía sugerida	113
Fuentes electrónicas	113
5. Química	114
Bibliografía sugerida	125
6. Física	126
Bibliografía sugerida	136
7. Comunicación	137
Bibliografía sugerida	154
8. Lengua adicional al español – Inglés	156
Bibliografía sugerida	159
9. Ciencias Sociales	160
Bibliografía sugerida	175
10. Introducción al Trabajo	177
Bibliografía sugerida	180
11. Recursos Humanos	182
Bibliografía sugerida	186
12. Contabilidad	187
Bibliografía sugerida	204
13. Informática	206
Bibliografía sugerida	213

Temas fundamentales y bibliografía

A continuación, se presentan los temas y subtemas de cada una de las áreas y ejes modulares, éstos recuperan la elaboración de las preguntas que contendrán las evaluaciones parciales.

También se sugiere la bibliografía que se puede consultar y que le ayudará a prepararse para presentar la Certificación por Evaluaciones Parciales.

1. Matemáticas

1.1 Concepto y uso de los números

A lo largo del tiempo, la humanidad ha enfrentado y resuelto problemas de su vida cotidiana, desde actividades simples como contar animales y medir terrenos, hasta los problemas más complejos en contextos científicos y tecnológicos modernos. Estas necesidades han impulsado el desarrollo de soluciones innovadoras, herramientas tecnológicas y avances científicos, transformado la manera en la que se interactúa con el entorno.

Muchas civilizaciones antiguas desarrollaron sus propios *sistemas de numeración*, cada uno caracterizado por su simbología única y sus métodos distintivos para representar *números*. Estos sistemas reflejaban, en esencia, las necesidades prácticas en la medición, el comercio y la astronomía. Por ejemplo: los antiguos egipcios utilizaban un sistema decimal, pero con símbolos diferentes para cada potencia de diez; los babilonios utilizaban un sistema de base 60 (sexagesimal); los mayas desarrollaron un sistema vigesimal (base 20) que utilizaba puntos y barras, además fue una de las primeras civilizaciones en reconocer el concepto de cero.

Los *números* son los elementos de dichos sistemas, estos son aquellas asociaciones o cantidades constituidas a partir de unidades, donde una unidad, a su vez, es aquello que permite identificar y cuantificar elementos, donde cada objeto o concepto, al ser considerado único o singular, es llamado “uno”. Esta base permite construir y entender conceptos más complejos dentro de las matemáticas, desde números enteros hasta sistemas más abstractos como los números reales ($\mathbb{R}$) o complejos ($\mathbb{C}$). Desde el siglo XVIII, se utilizan las siguientes agrupaciones (o *conjuntos*) de números:

- Naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$,
- Enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$,
- Racionales $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\right\}$,
- Irracionales $\mathbb{I} = \left\{z \mid z \neq \frac{p}{q} \text{ para algún } p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\right\}$,
- Reales $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$,
- Complejos $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ y } i = \sqrt{-1}\}$.

Los números reales se pueden ubicar en la *recta numérica* (Ver *Ilustración 1*). Un número $x \in \mathbb{R}$ es *positivo* si $x \in (0, \infty)$, se escribe $x > 0$ (x mayor que 0), estos números se encuentran a la derecha del cero. Por el contrario, un número $x \in \mathbb{R}$ es *negativo* si $x \in (-\infty, 0)$, se escribe $x < 0$ (x menor que 0), estos números se encuentran a la izquierda del cero.

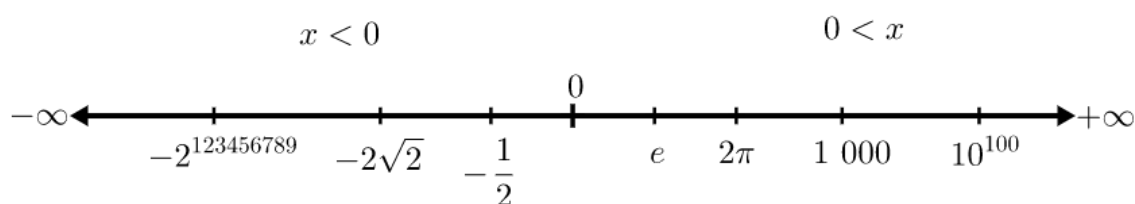


Ilustración 1. Recta numérica, también conocida como *recta real*. El número *Gúgol* es igual a 10^{100} , es uno de los números más grandes que se conocen, se compone de un *uno* seguido de cien *ceros*.

Se dice que los conjuntos de números reales (y complejos) son un *campo*, es decir, para $a, b \in \mathbb{R}$ se satisfacen las siguientes propiedades:

- Ley asociativa de la adición: $a + (b + c) = (a + b) + c$.
- Existencia de un elemento neutro para la adición: $a + 0 = 0 + a = a$.
- Existencia de inversos aditivos: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
- Ley conmutativa de la adición: $a + b = b + a$.
- Ley asociativa de la multiplicación: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- Existencia de un elemento neutro para la multiplicación: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, siendo $1 \neq 0$.
- Existencia de inversos multiplicativos: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$, para $a \neq 0$.
- Ley conmutativa de la multiplicación: $a \cdot b = b \cdot a$.
- Ley distributiva: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Por ejemplo.

- Asociatividad de la adición:

$$8 + (1 + 3) = (8 + 1) + 3 = 12.$$

- Elemento neutro para la adición:

$$\frac{\pi}{2} + 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

- Inverso aditivo:

$$\frac{2}{3} + \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0.$$

- Conmutatividad de la adición:

$$500 + (-49) = (-49) + 500 = 451.$$

- Asociatividad de la multiplicación:

$$7 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{3}\right) = (7 \cdot 2) \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{3}.$$

- Elemento neutro para la multiplicación:

$$200 \cdot 1 = 1 \cdot 200 = 200.$$

- Inverso multiplicativo:

$$8.55 \cdot 8.55^{-1} = 8.55^{-1} \cdot 8.55 = 1,$$

$$\text{donde } 8.55^{-1} = \frac{1}{8.55}.$$

- Conmutatividad de la multiplicación:

$$\sqrt{2} \cdot 4 = 4 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

- Ley distributiva:

$$2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = (2 \cdot 1) + \left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = 3.$$

Otras propiedades que tienen los números son aquellas que se presentan cuando se operan con exponentes o como fracciones. Considere $x, y, a, b \in \mathbb{R}$:

Nombre	Ecuación		
Leyes de los signos	$(+)(+) = (-)(-) = (+)$ $(+)(-) = (-)(+) = (-)$		
Leyes de los exponentes	$\text{Si } x \neq 0, x^0 = 1$	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$	$x^a \cdot x^{\pm b} = x^{a \pm b}$
	$x^1 = x$	$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^b$	$\sqrt[b]{x^a} = x^{\frac{a}{b}}$ $= (\sqrt[b]{x})^a$
	$\text{Si } a \in \mathbb{N} - \{0\},$ $x^a = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{a\text{-veces}}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}$	
	$x^{-b} = \frac{1}{x^b}$		
Reglas para fracciones	$\frac{x}{y} \pm \frac{a}{b} = \frac{(x \cdot b) \pm (y \cdot a)}{y \cdot b}$	$\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{b} = \frac{x \cdot a}{y \cdot b}$	$\frac{x}{y} \div \frac{a}{b} = \frac{x \cdot b}{y \cdot a}$
	$\text{Si } y = b,$ $\frac{x}{y} \pm \frac{a}{y} = \frac{x \pm a}{y}$		

Tabla 1. Ecuaciones algebraicas más comunes.

Considere los siguientes ejemplos.

- Leyes de los signos
 - El producto de los números 8 y -2 da como resultado -16 .
 - Además, $(8) \times (-2) = (-2) \times (8)$.
 - El producto de los números -1 y -3 da 3 (positivo).
- Leyes de los exponentes
 - $(2^2)^3 = 4^3 = 64 = 2^6 = 2^{2 \cdot 3}$.
 - $\sqrt[3]{3^2} = 3^{2/3} = (\sqrt[3]{3})^2 \approx 2.08$.
 - $5^2 \cdot 25^3 = 5^2 \cdot (5 \cdot 5)^3 = 5^2 \cdot (5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^{2 \cdot 3} = 5^{2+(2 \cdot 3)} = 5^8$.
- Reglas para fracciones
 - $\frac{3}{8} + \frac{9}{4} = \frac{(3 \cdot 4) + (9 \cdot 8)}{8 \cdot 4} = \frac{12 + 72}{32} = \frac{84}{32}$, simplificando $\frac{3}{8} + \frac{9}{4} = \frac{84}{32} = \frac{21}{8}$.
 - $\frac{1}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} = \frac{3}{8}$.

1.2 Álgebra básica

El álgebra utiliza **números** y **variables** (o **incógnitas**) para representar un hecho matemático (tal como una relación de igualdad o desigualdad), un objeto geométrico, una gráfica, etc. Cuando se hace referencia a un **número cualquiera**, este se representa con un símbolo arbitrario, generalmente se utiliza la equis minúscula (x), a menos que se demande lo contrario, o sea una cantidad con un nombre preestablecido, por ejemplo: tiempo (t), temperatura (T), área (A), volumen (V), etc.

Una **expresión algebraica** es aquella que se puede escribir con simbología matemática; variables, por mencionar algunas, $x, y, z, t, \alpha, \theta$ y ϕ ; números reales, como $\pi, 0, -\sqrt{2}, 15, -\frac{3}{2}$ y -8 ; y operaciones como la suma (+), resta (−), multiplicación (×) o división (÷). Las expresiones están compuestas de uno o más **términos algebraicos**, los cuales son el producto de un número real con una o más variables y se clasifican en función de la cantidad de términos que tengan (Ver **Tabla 2.**).

Las **variables** son aquellos elementos abstractos que representan valores desconocidos, indeterminados o generalizados. Estos valores pueden variar según el contexto y se expresan mediante símbolos. Además, las variables pueden tener un **exponente**, cuyo valor se conoce como **grado**, el cual indica la magnitud de su potencia.

Por ejemplo, el monomio $5x^2$ tiene un exponente 2, pues la variable x está elevada a la segunda potencia (o al cuadrado); por otro lado, el monomio $2t$ tiene su exponente igual a 1, entonces el monomio es de grado 1. En caso de binomios, trinomios, etcétera, se dice que el **grado de la expresión algebraica** es el grado del término con el exponente mayor. Por ejemplo, el trinomio $t^2 + 10t - 8$ tiene grado 2, pues el primer término (t^2) tiene la variable con su exponente igual a 2, el segundo término ($10t$) tiene exponente 1 y el tercer término (-8) no tiene variable.

Nombre	Cantidad de términos algebraicos	Ejemplos
Monomios	uno	$2\theta, x^2, 6by^3, -cz^2y$
Binomios	dos	$4a - bz, 8x^2 + yz$
Trinomios	tres	$ct^2 - at + 6b, z^3 - \sqrt{2}z^2 + \pi z$
⋮	⋮	⋮
Polinomios	n	$3 + 2x^2 + z^3 + xy - y^4$

Tabla 2. Un polinomio puede estar formado por un monomio o tener más términos.

Considerando las propiedades mencionadas anteriormente, es posible simplificar los términos de las expresiones algebraicas, siempre y cuando tengan **términos en común**, es decir, que existan términos que tengan la misma variable elevada a la misma potencia (o con el mismo grado).

Por ejemplo, las expresiones $x^2 - 8y^3$ y $y^2 - x^2 - 3y^3$ tienen dos términos en común, uno con la variable x^2 y otro con la variable y^3 , entonces:

- $(x^2 - 8y^3) + (y^2 - x^2 - 3y^3) = -11y^3 + y^2,$
- $(x^2 - 8y^3) - (y^2 - x^2 - 3y^3) = -5y^3 + 2x^2 - y^2,$
- $(y^2 - x^2 - 3y^3) - (x^2 - 8y^3) = 5y^3 - 2x^2 + y^2.$

Note que las últimas dos expresiones tienen signos opuestos, esto se cumple para cualesquiera dos números reales a y b : $a - b = -(b - a)$, esto es $a - b$ es el inverso aditivo de $b - a$.

1.3 Lenguaje algebraico

El *lenguaje algebraico* es aquel que se emplea para modelar aquellas situaciones o problemas de interés en ecuaciones matemáticas. Para ello, se usan símbolos con diferentes significados algebraicos, entre ellos, números, incógnitas, operaciones, etc. Su uso permite traducir enunciados coloquiales a expresiones algebraicas y viceversa. En la **Tabla 3** se muestran algunas de las frases coloquiales que pueden traducirse en expresiones matemáticas para la suma, resta, multiplicación, división, exponentes y equivalencias y desigualdades.

Operación	Frase coloquial	Expresión matemática
Suma	La suma de dos números	$a + b$ o $x + y$
	Nueve unidades más un número	$9 + x$
	Un número aumentado tres unidades	$a + 3$
Resta	La diferencia entre dos números	$x - y$
	Cinco unidades reducidas por un número	$5 - x$
	Un número reducido seis unidades	$y - 6$
Multiplicación	El doble producto de dos números	$a \cdot b$
	El doble producto de un número	$2a$
	El producto de tres unidades con un número	$3b$
División	El cociente entre dos números	a/b
	La tercera parte de un número	$\frac{1}{3}x$
	Ocho unidades divididas entre un número	$8/b$
Exponentes	El cuadrado de un número	x^2
	Un número a la tercera potencia	a^3
	Veinte unidades elevadas a la potencia x	20^y
Equivalencias y Desigualdades	Un número es equivalente a otro número	$y = b$
	Ocho unidades corresponden a un número	$8 = x$
	Siete es mayor o igual a algún número	$7 \geq a$
	Dos unidades menores o iguales a la suma de dos números	$2 \leq a + b$
	Cuatro unidades son menores a un número	$4 < y$

Tabla 3. Traducciones más comunes para las principales operaciones. El objetivo de la tabla es exponer casos particulares que sirvan de referencia para practicar, el lector no debe dejarse llevar por las palabras exactas que aparecen en la misma, pues pueden existir otras frases o palabras no mostradas o estar escritas en un contexto específico de la vida diaria. Además, es necesario considerar las posibles combinaciones entre estas frases para representar expresiones o ecuaciones más complejas.

1.4 Patrones numéricos

1.4.1 Series y sucesiones de números reales

Una **sucesión** es un conjunto de números definidos a partir de una regla de correspondencia, esto es, para todo número natural n se define el **n -ésimo término de la sucesión** como $a(n) = a_n$. Para abreviar, se utiliza la notación $\{a_n\}$, la cual representa:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots\}.$$

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones de números reales, entonces: si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que $\{a_n\}$ es **creciente**; si se cumple que $b_n \geq b_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{b_n\}$ es **decreciente**.

- Los números **pares** son una sucesión creciente dada por la regla de correspondencia $n \rightarrow p_n = 2n$, donde la sucesión es $p_0 = 2(0) = 0$, $p_1 = 2(1) = 2$, $p_2 = 2(2) = 4$, $p_3 = 2(3) = 6$, etc.
- El conjunto de números **impares** es $\{i_n\} = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ y también puede obtenerse por medio de una sucesión dada por la regla de correspondencia $n \rightarrow i_n = 2n + 1$. Por ejemplo, el término 1 012 es $i_{1\,012} = 2(1\,012) + 1 = 2\,025$.
- La sucesión más conocida es la de **Fibonacci** que, históricamente, se considera la solución a un problema de contar conejos. El primer término es $F_0 = 0$, el siguiente es $F_1 = 1$ y el $(n + 1)$ -ésimo es $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, para todo $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$, esto es, los siguientes términos de la sucesión de Fibonacci están dados por la suma de los dos anteriores. Además, esta sucesión es creciente, pues $F_{n+1} > F_n > F_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. La sucesión empieza con los números:
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1 597, 2 584, 4 181, 6 765, 10 946, ...

1.4.2 Progresiones numéricas

Una sucesión de números $\{a_n\}$ tal que cada término se obtiene multiplicando el término anterior a él por una **razón dada** r (o **factor de progresión**) se conoce como **progresión geométrica**. Conociendo el primer término α_1 y la razón r se puede calcular el n -ésimo término mediante la fórmula

$$\alpha_n = \alpha_1 \cdot r^{n-1}$$

y la suma de los primeros n términos está dada por

$$S_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k = \alpha_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}.$$

Por otro lado, una sucesión de números $\{a_n\}$ tal que la diferencia entre cualesquiera dos términos sucesivos es constante se conoce como **progresión aritmética**, esto es $a_{n-1} - a_n = d$. A la cantidad constante se le conoce como **diferencia de la progresión** o **distancia** y se denota con la letra d . Dado el primer término y la distancia d , el n -ésimo término de la sucesión es:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

y la suma de los primeros n términos de la progresión está dada por

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{2}(a_1 + a_n)n.$$

Por ejemplo.

- El proceso de *división celular* puede representarse matemáticamente como una progresión geométrica. En efecto, al inicio hay una célula ($a_1 = 1$); después de que se lleva a cabo el proceso de división celular hay dos células ($a_2 = 2$), conocidas como *células hijas*; cada una de estas células hijas se vuelve a dividir, entonces hay 4 células hijas ($a_3 = 4$); y así sucesivamente. La razón de la progresión es $r = 2$, pues cada célula se divide en dos. Así, la n -ésima división dará como resultado

$$a_{n+1} = a_1 \cdot r^{n+1-1} = 1 \cdot 2^n = 2^n$$

células hijas.

- Una deuda puede representarse matemáticamente como una progresión aritmética. En el primer mes, se cuenta, por ejemplo, con \$10,000 de deuda ($a_1 = \$10,000$); al segundo mes se abona el pago de \$200 ($d = -\200), entonces la deuda asciende a \$9,800 ($a_2 = \$9,800$); de esta forma, mes con mes disminuye la deuda. Para saber cuántos meses durará la deuda (valor de n), se considera $a_n = 0$, entonces $0 = a_1 + (n - 1) \cdot d$, es decir, en

$$n = 1 - \frac{a_1}{d} = 1 - \frac{\$10,000}{-\$200} = 51$$

meses se terminará de pagar la deuda.

1.5 Variaciones proporcionales y lineales

1.5.1 Propiedades y uso en la resolución de problemas

Una *magnitud* es aquella propiedad que se puede medir numéricamente, los ejemplos más comunes son los *gramos* (g, representan la cantidad de materia), los *metros* (m, representan la longitud), los *segundos* (s, representan el tiempo), *grados centígrados* ($^{\circ}$ C, representan la temperatura), etc. Otros ejemplos poco conocidos que son usados en cantidades físicas con las que se conviven día a día son: *Amperios* (A, corriente eléctrica), *Watts* (W, potencia), *Hertz* (Hz, frecuencia de una onda electromagnética), *calorías* (Cal, energía que los alimentos proporcionan), etc.

La *razón geométrica* entre dos magnitudes se define como el cociente de estas, se expresa como un número racional (en fracción): la razón entre la cantidad p y una cantidad q es $\frac{p}{q}$ (o $p:q$). Hay muchas razones que se encuentra en la vida cotidiana, por ejemplo: la *velocidad*, es la distancia recorrida por cada segundo que pasa ($v = d/t$); la *densidad de materia* es la cantidad de materia por cada unidad de volumen de un material o un fluido ($\rho = m/V$). Al numerador de la fracción se le llama *antecedente* y al denominador se le conoce *consecuente* y se lee p es a q . Una *proporción* es la equivalencia entre dos razones, es decir, si $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ son dos razones, la proporción entre ellas es

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s},$$

se lee p es a q como r es a s .

Dos cantidades pueden ser directa o inversamente proporcionales, como se describe a continuación.

- Se dice que dos magnitudes son **directamente proporcionales** cuando, si una aumenta, la otra también lo hace, ambas aumentan de forma proporcional. Si x es directamente proporcional a y , entonces

$$x = k \cdot y$$

con $k = \frac{x}{y}$ es la constante de proporcionalidad, dicha relación suele denotarse como $x \propto y$.

Por otro lado, dos razones $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ son **directamente proporcionales** si

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s'}$$

más aún, al aplicar una operación a alguna de estas razones (multiplicación o división), la otra se verá afectada de la misma manera. Para la resolución de problemas se procede a identificar la constante de proporcionalidad de cada una de las razones involucradas que, por ser directamente proporcionales, serán iguales.

- Por ejemplo, si una receta para preparar mole dice que 450 g de pasta rinden para 1 500 mL de agua, ¿cuánta agua se necesita para 100 g de pasta?

Primero, se hace referencia a la cantidad de agua por cada gramo de pasta para mole, sus unidades son $\frac{\text{mL}}{\text{g}}$. Entonces, las dos razones que son proporcionales son $\frac{1\,500\text{ mL}}{450\text{ g}}$ y $\frac{x\text{ mL}}{100\text{ g}}$, es decir

$$\frac{1\,500\text{ mL}}{450\text{ g}} = \frac{x\text{ mL}}{100\text{ g}}$$

El resultado se obtiene multiplicando por ambos lados de la ecuación por los 100 g, esto es: si

$$\frac{1\,500\text{ mL}}{450\text{ g}} = \frac{x\text{ mL}}{100\text{ g}} \Rightarrow \frac{(1\,500\text{ mL}) \cdot (100\text{ g})}{450\text{ g}} = \frac{(x\text{ mL}) \cdot (100\text{ g})}{100\text{ g}},$$

por lo tanto,

$$x = \frac{(1\,500\text{ mL}) \cdot (100\text{ g})}{(450\text{ g})} = 333.\bar{3}\text{ mL}.$$

En conclusión, si 450 g de pasta para mole rinden para 1 500 mL de agua, entonces 100 g de pasta rinden para 333.3 mL de agua.

- Si dos magnitudes son **inversamente proporcionales**, una aumenta mientras la otra disminuye de forma proporcional. Si y es inversamente proporcional a x , entonces $y = \frac{k}{x}$, donde $k = y \cdot x$ es su constante de proporcionalidad inversa.

Dos o más valores de dos magnitudes inversamente proporcionales mantienen la constante de proporcionalidad, esto es, si x y y son magnitudes inversamente proporcionales y además a y b también lo son, se cumple que $x \cdot y = k$ y $a \cdot b = k$, por lo que

$$x \cdot y = a \cdot b.$$

- Por ejemplo, 20 mapaches (*Procyon*) consumen un costal de alimento en 10 días, ¿cuánto se tardarán 40 mapaches en consumir un costal de alimento? Las magnitudes inversamente proporcionales son los mapaches y los días que tardan en consumir un costal de comida. Primero, $(20\text{ mapaches}) \cdot (10\text{ días}) = k$ y $(40\text{ mapaches}) \cdot (x\text{ días}) = k$, entonces igualando las ecuaciones y dividiendo de ambos lados de la ecuación por 40, se obtiene el resultado

$$\begin{aligned}
 (20 \text{ mapaches}) \cdot (10 \text{ días}) &= (40 \text{ mapaches}) \cdot (x \text{ días}) \\
 &\Rightarrow \\
 \frac{(20 \text{ mapaches}) \cdot (10 \text{ días})}{(40 \text{ mapaches})} &= \frac{(40 \text{ mapaches}) \cdot (x \text{ días})}{(40 \text{ mapaches})}
 \end{aligned}$$

simplificando

$$x = \frac{(20 \text{ mapaches}) \cdot (10 \text{ días})}{40 \text{ mapaches}} = 5 \text{ días.}$$

En conclusión, si 20 mapaches consumen todo su alimento en 10 días, 40 mapaches lo harán en 5 días.

La regla de tres nace a partir de las relaciones de proporcionalidad entre las razones y resulta ser una técnica muy práctica para la resolución de problemas.

- En una situación que involucre dos razones que son directamente proporcionales se tienen dos magnitudes proporcionales p y r , junto con una tercera magnitud q la cual es proporcional a la incógnita, directamente:

$$\begin{aligned}
 x &= (\text{razón de magnitudes directamente proporcionales}) \cdot (\text{magnitud proporcional a } x) \\
 &= \frac{p}{r} \cdot q.
 \end{aligned}$$

- En el ejemplo (y en la vida real), si se aumenta (disminuye) la cantidad de pasta para mole, se debe de aumentar (disminuir) la cantidad de agua, por lo tanto, las magnitudes directamente proporcionales son 1 500 mL y los 400 g. La tercera magnitud es la cantidad de pasta con la que se cuenta, 100 g; además, se desea conocer la cantidad de agua para que se cumpla la razón de proporcionalidad directa.
- En una situación que involucre cuatro magnitudes que son inversamente proporcionales dos a dos: a inversamente proporcional a b y x inversamente proporcional a y se puede escribir

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\text{producto de magnitudes inversamente proporcionales}}{\text{magnitud inversamente proporcional a } x} \\
 &= \frac{a \cdot b}{y}.
 \end{aligned}$$

- En el ejemplo, las cantidades que son inversamente proporcionales es el número de mapaches (20) y la cantidad de días en las que consumen su alimento (10): si se aumenta (disminuye) la cantidad de mapaches, los días que tarden en consumir su alimento disminuirá (aumentará). Se pregunta por una cantidad que sea inversamente proporcional a una tercera dada (40 mapaches).

1.5.2 Representación geométrica y uso en la resolución de problemas

La manera de visualizar la proporción entre dos magnitudes es por medio del gráfico de una línea recta (Ver sección 1.19 en página 30 y la Ilustración 26). A x se le conoce como *variable independiente*, mientras que a y se le conoce como *variable dependiente*.

- **Variación proporcional.** La línea recta para por el origen de coordenadas ($b = 0$) y la constante de proporcionalidad es m .
 - Por ejemplo, algunos atletas necesitan consumir al día 1.5 g de proteína por cada kilogramo de peso corporal (matemáticamente se escribe $1.5 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$). La variación proporcional está dada por el consumo de proteína total (como variable dependiente), el peso de las personas (como variable independiente) y la constante de proporcionalidad $m = 1.5 \frac{\text{g}}{\text{kg}}$.

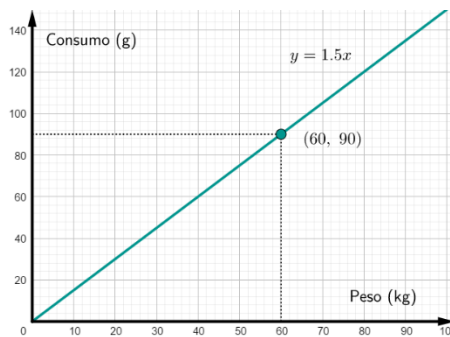


Ilustración 2. La relación de correspondencia está dada por el producto de las calorías a consumir (por cada kg de peso) y el peso de las personas (medido en kg). El punto representa el caso de una persona con 60 kg, esta tiene que consumir 90 g de proteína al día.

- **Variación lineal.** Ocurre cuando la recta no pasa por el origen de coordenadas ($b \neq 0$).
 - Por ejemplo, los grados Kelvin y los grados Celsius siguen una relación de tipo lineal, pues la forma de convertir $^{\circ}\text{C}$ a $^{\circ}\text{K}$ es por medio de la ecuación
$$K = C + 273.15,$$
la constante de proporcionalidad es $m = 1$ y el desplazamiento es $b = 273.15$.

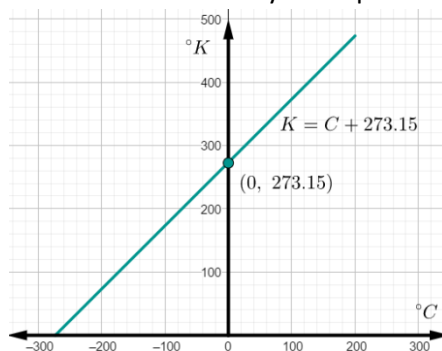


Ilustración 3. La relación de correspondencia está dada por la fórmula de conversión de grados Celsius a grados Kelvin. El punto muestra la temperatura de congelamiento del agua, a 0°C o equivalentemente a 273.15°K . Esta relación lineal representa la conversión de unidades $^{\circ}\text{C}$ a $^{\circ}\text{K}$, la conversión inversa, que convierte $^{\circ}\text{K}$ a $^{\circ}\text{C}$ está dada por $C = K - 273.15$.

1.6 Procedimientos algebraicos

Sean $n, k \in \mathbb{N}$, si $0 \leq k \leq n$ se define el **coeficiente binomial** como:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!},$$

donde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ es la **función factorial** de n , en particular $0! = 1$, de esta manera

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Con esta definición, un binomio de la forma $a + b$ se puede expandir con ayuda del siguiente resultado.

Teorema (Teorema del Binomio). Si a y b son dos números cualesquiera y n es un número natural, entonces

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0} \cdot a^n + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot b^n \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot a^{n-j} \cdot b^j\end{aligned}$$

Note que en el primer y n -ésimo coeficiente es igual a 1, ya que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. Además, a y b pueden ser monomios de cualquier grado.

Por ejemplo, la fórmula del binomio cuadrado $(x \pm y)^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy$ se puede comprobar de la siguiente manera: sea $a = x$, $b = \pm y$ y $n = 2$, entonces $a^{n-j} = x^{2-j}$ y $b^j = (\pm y)^j$, luego:

$$\begin{aligned}(x \pm y)^2 &= \sum_{j=0}^2 \binom{2}{j} \cdot x^{2-j} \cdot (\pm y)^j \\ &= \binom{2}{0} \cdot x^{2-0} \cdot (\pm y)^0 + \binom{2}{1} \cdot x^{2-1} \cdot (\pm y)^1 + \binom{2}{2} \cdot x^{2-2} \cdot (\pm y)^2.\end{aligned}$$

La suma está compuesta de tres términos, cada uno tiene un valor de j diferente, el primero corresponde a $j = 0$, el segundo a $j = 1$ y el tercero a $j = 2$:

- para $j = 0$ se tiene $\binom{2}{0} = 1$ por definición, entonces

$$\binom{2}{0} \cdot x^{2-0} \cdot (\pm y)^0 = x^2,$$
- para $j = 1$ se tiene $\binom{2}{1} = \frac{2!}{1! \cdot (2-1)!} = \frac{1 \cdot 2}{(1) \cdot (1)} = 2$, entonces

$$\binom{2}{1} \cdot x^{2-1} \cdot (\pm y)^1 = \pm 2xy,$$
- para $j = 2$ se tiene $\binom{2}{2} = \frac{2!}{2! \cdot (2-2)!} = \frac{1 \cdot 2}{(1 \cdot 2) \cdot (1)} = 1$, entonces

$$\binom{2}{2} \cdot x^{2-2} \cdot (\pm y)^2 = y^2.$$

Por lo tanto, $(a \pm b)^2$ es la suma de cada uno de los tres términos listados, es decir,

$$\begin{aligned}(x \pm y)^2 &= \binom{2}{0} \cdot x^{2-0} \cdot (\pm y)^0 + \binom{2}{1} \cdot x^{2-1} \cdot (\pm y)^1 + \binom{2}{2} \cdot x^{2-2} \cdot (\pm y)^2 \\ &= x^2 \pm 2xy + y^2,\end{aligned}$$

de donde se pueden obtener las ecuaciones

$$\begin{aligned}(x + y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2, \\ (x - y)^2 &= x^2 - 2xy + y^2.\end{aligned}$$

Para sacar un solo término de la suma del teorema del binomio se considera que el índice j adecuado: el primer término es con $j = 0$, el segundo con $j = 1$, el tercero con $j = 2$, el cuarto con $j = 3$, el quinto con $j = 4$, el sexto con $j = 5$... y así sucesivamente. Se usa la expresión:

$$\binom{n}{j} \cdot a^{n-j} \cdot b^j.$$

Por ejemplo, considere el binomio $(x - 3w)^6$, de acuerdo con la notación del teorema del binomio se escribe $n = 6$, $a = x$ y $b = -3w$; el tercer término se calcula considerando $j = 2$, de esta forma el coeficiente binomial es

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{(1 \cdot 2) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)} = \frac{5 \cdot 6}{2} = \frac{5 \cdot (2 \cdot 3)}{2} = 5 \cdot 3 = 15,$$

por lo tanto, el tercer término de $(x - 3w)^6$ es

$$\binom{6}{2} \cdot (x)^{6-2} \cdot (-3w)^2 = 15 \cdot (x^4) \cdot (9w^2) = 135x^4w^2.$$

No hay que olvidar que los términos de una expresión algebraica pueden escribirse en el orden que sea, pero en esta situación, el orden de los términos es establecido por la ecuación del teorema del binomio:

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \cdot a^{n-j} \cdot b^j \\ &= \underbrace{\binom{n}{0} \cdot a^n}_{\substack{1^{\text{er}} \\ j=0}} + \underbrace{\binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b}_{\substack{2^{\text{do}} \\ j=1}} + \underbrace{\binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2}_{\substack{3^{\text{ro}} \\ j=2}} + \cdots + \underbrace{\binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1}}_{\substack{n\text{-ésimo} \\ j=n-1}} + \underbrace{\binom{n}{1} \cdot b^n}_{\substack{(n+1)\text{-ésimo} \\ j=n}}.\end{aligned}$$

1.7 Elementos básicos de geometría

Intuitivamente, se entiende por **punto** como aquel objeto **adimensional** que indica una posición. Ahora, se dice que una **línea** es un conjunto infinito de puntos y, particularmente, en una **línea recta** dicho conjunto está alineado en alguna dirección, esto la hace un objeto de **una dimensión**. Un **plano** es aquel conjunto infinito de puntos que se extiende a lo largo de dos direcciones, esto lo hace un conjunto de **dos dimensiones**. Así mismo, el **espacio**, se considera un conjunto de **tres dimensiones**, pues es un conjunto de puntos que se extiende sobre tres direcciones.



Ilustración 4. En la esquina superior derecha se muestra un punto, representado por un pequeño disco de color; la línea recta, ubicada en la esquina superior izquierda, se dibuja (convenientemente) con dos flechas en sus extremos para diferenciarlas de otros objetos; el plano, en la parte inferior, se dibuja como un cuadrilátero sombreado.

La geometría tiene cinco axiomas fundamentales, los cuales fueron postulados por **Euclides**, el padre de la geometría, en **Los elementos**:

- i. Cada par de puntos puede ser unido mediante una (y solo una) línea recta.
- ii. Cualquier segmento de línea recta puede ser extendido indefinidamente hacia cualquier dirección.
- iii. Hay exactamente un círculo para cualquier radio dado con cualquier centro dado.
- iv. Todos los ángulos rectos son congruentes unos con otros.
- v. Si una línea recta que cae sobre dos líneas rectas hace que los dos ángulos interiores del mismo lado sean menores a dos rectos, las dos rectas, si se prolongan indefinidamente, se intersectarán en el lado en que la suma de los dos ángulos es menor que dos ángulos rectos.

1.8 Líneas

Existen dos tipos de líneas; **líneas rectas** y **líneas curvas**. Se define una línea recta como el lugar geométrico de todos los puntos que están alineados en una sola dirección; una línea curva es aquella línea que se puede dibujar de cualquier otra forma.

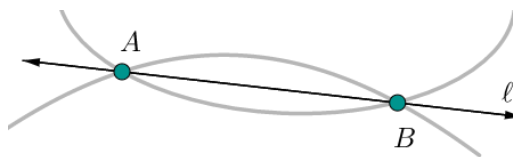


Ilustración 5. Líneas que pasan por A y B.

Dados dos puntos A y B, pueden pasar muchas líneas a través de ellos, sin embargo, solo una línea recta (o simplemente recta), denotada por ℓ . Esta divide al plano en tres partes; la misma recta y dos semiplanos en cada uno de sus lados. Una recta es indefinida por ambos lados, es por eso que comúnmente se dibuja con dos flechas en los extremos apuntando hacia su exterior, como en la **Ilustración 5**.

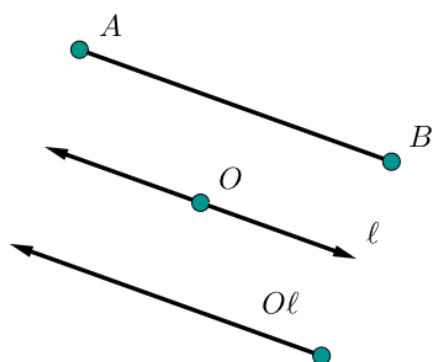


Ilustración 6. En orden descendente:
Segmento AB ($\overline{AB}$); recta l que pasa por O ;
semirrecta Ol .

Por otro lado, si se considera un punto O sobre una recta l , cada uno de los dos extremos resultantes de ella (separados por O) se conocen como **semirrectas** (o simplemente **rayos**), las cuales se dibujan con una flecha hacia alguna dirección, lo que indica que se extiende de manera indefinida, se denotan por Ol .

Para dos puntos del plano, A y B , es posible trazar una recta, pero en este caso solo se considera el pedazo de recta que está entre ambos puntos, a este objeto se le conoce como **segmento de recta** y se denota por $\overline{AB}$ o segmento AB . Estos objetos geométricos se visualizan como pedazos de recta comprendidos entre dos puntos.

Por lo general, se considera que el segmento que va de A a B es el mismo que el que va de B a A , sin embargo, hay situaciones en donde el segmento posee una dirección previamente establecida, si este es el caso, se dice que $\overline{AB} = -\overline{BA}$.

1.9 Ángulos

Se define un **ángulo** como la parte común de dos semiplanos resultantes de trazar dos rayos que se intersectan en el punto O . A los rayos OA y OB se les llama **lados del ángulo** y al punto O se le conoce como **vértice**. De acuerdo con la **Ilustración 7**, se denota al ángulo del vértice O como $\angle AOB$.

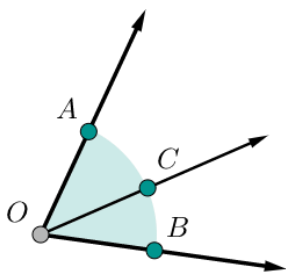


Ilustración 8. $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Se dibuja el rayo OC , con O el vértice en común, de tal forma que OC se encuentre dentro del ángulo AOB . El ángulo AOB es igual a la suma de los ángulos AOC y COB , los cuales se conocen como **ángulos adyacentes** (Ver **Ilustración 8**). Más aún, si los ángulos AOB y BOC son iguales, entonces se dice que el rayo OB es **bisectriz** del ángulo AOC .

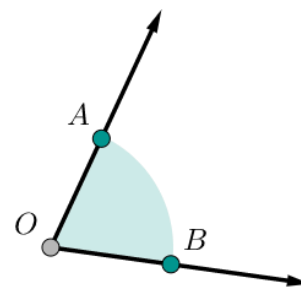


Ilustración 7. Ángulo AOB ($\angle AOB$).

Ahora, considérese dos rectas que se intersectan en un punto O , de esta forma se crean cuatro ángulos. Los ángulos adyacentes suman 180° . Además, los pares de ángulos consecutivos se llaman **ángulos opuestos por el vértice** y son iguales.

Cuando las rectas no se intersectan, se dice que equidistan a la misma distancia, pues son paralelas; pero si su intersección existe (un punto), entonces puede pasar que las rectas sean **perpendiculares** o sean **convexas**. En cualquiera de estas últimas dos situaciones se formarán cuatro ángulos. Las perpendiculares formarán cuatro ángulos iguales a 90° , mientras que las convexas forman dos ángulos mayores a 90° y dos ángulos menores a 90° (Ver **Ilustración 9**).



Ilustración 9. Izquierda: rectas convexas. Derecha: rectas perpendiculares. En ambos casos los ángulos opuestos son iguales. Los ángulos de 90° se dibujan con un cuadrado y se denominan ángulos rectos.

Cada ángulo puede nombrarse respecto a su medida. A continuación, se muestran los nombres con ejemplos representativos.

- Un ángulo menor que un ángulo recto se llama *ángulo agudo*.
 - $\alpha = 25^\circ$.
 - $\theta = 50^\circ$
- Un ángulo igual a 90° se conoce como *ángulo recto*.
 - $\beta = 90^\circ$.
- Un ángulo mayor a 90° y menor a 180° se conoce como *ángulo obtuso*.
 - $\gamma = 96^\circ$.
 - $\psi = 130^\circ$.
 - $\kappa = 178^\circ$.
- Un *ángulo convexo* mide menos de 180° .
 - $\delta = 65^\circ$.
 - $\lambda = 145^\circ$.
- Un *ángulo llano* es igual a 180° .
 - $\varepsilon = 180^\circ$.
- Un *ángulo cóncavo* mide entre 180° y 360° .
 - $\zeta = 197^\circ$.
 - $\mu = 215^\circ$.
 - $\nu = 359^\circ$
- Un *ángulo completo* mide 360° .
 - $\eta = 360^\circ$.

Además:

- Dos ángulos son *complementarios* cuando suman 90°
 - Por ejemplo, $\alpha + \delta = 25^\circ + 65^\circ = 90^\circ$.
- Dos ángulos son *suplementarios* cuando suman 180° .
 - Por ejemplo, $\theta + \psi = 50^\circ + 130^\circ = 180^\circ$

1.10 Rectas

Dada una curva C en el plano (Ver **Ilustración 10**), se puede trazar su recta **tangente**, ésta la toca en un solo punto; o se puede trazar su recta **secante**, la cual interseca a la curva en dos o más puntos. En la **Ilustración 10**, las rectas ℓ_1 , ℓ_2 y ℓ_4 son tangentes a C , mientras que ℓ_3 la atraviesa en dos puntos.

Al trazar un par de rectas en el plano sucede uno de los siguientes casos: las rectas se intersecan en un punto o son rectas paralelas. En el primer caso, las rectas pueden ser **convexas** o **perpendiculares** (Ver **Ilustración 9**). Por ejemplo, las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son convexas; mientras que las rectas ℓ_2 y ℓ_3 son perpendiculares, pues ℓ_3 pasa por el centro de la circunferencia y ℓ_2 es tangente a C ; además, las rectas ℓ_2 y ℓ_4 son paralelas, pues ambas forman ángulos rectos con ℓ_3 (Ver **Ilustración 10**).

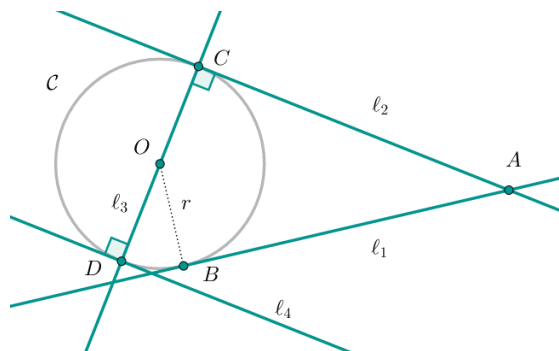


Ilustración 10. Circunferencia C con centro en O y de radio r .

Una recta ℓ que interseca a otras dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 , como en la

Ilustración 11, se conoce como **transversal** (a ellas). Se crea un sistema con ocho ángulos. Los ángulos β, δ, θ y ε están entre las rectas ℓ_1 y ℓ_2 , se conocen como **ángulos interiores**. Los ángulos α, γ, ϕ y ψ se conocen como **ángulos exteriores**. Los ángulos ubicados en lados opuestos por la transversal ℓ se llaman **ángulos alternos** (por ejemplo γ y θ). A los ángulos δ y θ se les llama **alternos internos**, mientras que los ángulos γ y ϕ se conocen como **alternos externos**.

A los ángulos que están en una posición correspondiente con respecto a la transversal ℓ se conocen como **ángulos correspondientes**, como γ y ε . Cuando las rectas ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas, entonces los ángulos correspondientes son iguales o congruentes, es decir,

$$\begin{aligned}\alpha &= \delta = \theta = \psi, \\ \beta &= \gamma = \phi = \varepsilon.\end{aligned}$$

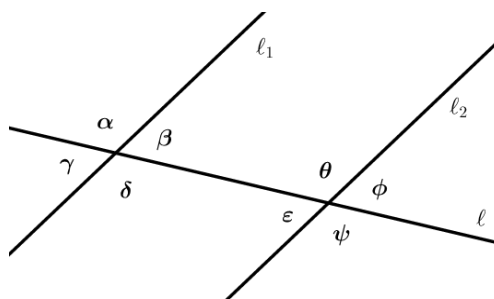


Ilustración 11. Sistema de ángulos con dos rectas y una secante a ellas.

Recíprocamente, si estas dos últimas condiciones se cumplen en un sistema de dos rectas atravesadas por una transversal, entonces se dice que ℓ_1 y ℓ_2 son rectas paralelas.

1.11 Triángulos

Aquel polígono de tres lados, tres vértices y tres ángulos internos se conoce como *triángulo*. Se clasifican en función de los ángulos que posea: el triángulo *rectángulo* posee un ángulo recto (90°); el *acutángulo* tiene todos sus ángulos agudos ($< 90^\circ$); el *obtusángulo* posee un ángulo obtuso ($> 90^\circ$). Ahora, respecto a los lados; se dice que un triángulo *escaleno* es aquel que no tiene un par de lados de igual medida; el triángulo *isósceles* tiene dos lados iguales; finalmente, el triángulo *equilátero* tiene sus tres lados iguales.

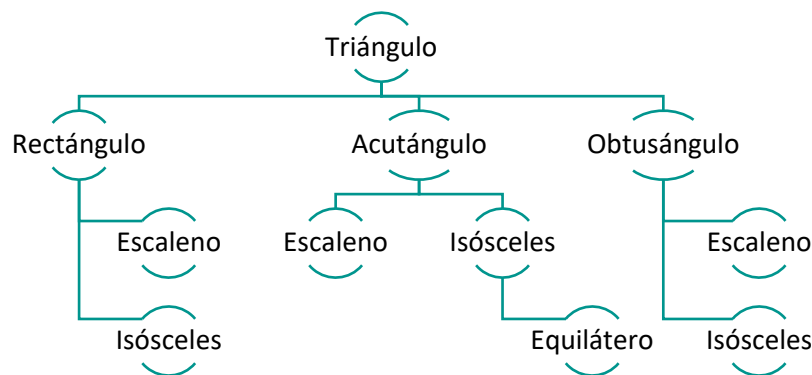


Ilustración 12. Existen triángulos que están en más de una categoría, por ejemplo, existen triángulos isósceles que tienen un ángulo recto.

Las siguientes tablas contienen algunos ejemplos de triángulos para las diferentes combinaciones entre categorías.

Triángulos rectángulos	
Escalenos	
Isósceles	

Tabla 4. Representación de triángulos rectángulos (tienen un ángulo de 90°), escalenos e isósceles. Estos últimos se pueden construir con ayuda de una circunferencia, los lados iguales del triángulo tienen la misma medida que el radio.

Triángulos acutángulos

Escalenos	
Isósceles	
Equiláteros	

Tabla 5. Representación de triángulos acutángulos (sus ángulos son agudos, es decir, menores a 90°). El vértice opuesto al lado de diferente medida en los isósceles es el centro de una circunferencia.

Triángulos obtusángulos	
Escalenos	
Isósceles	

Tabla 6. Representación de los triángulos obtusángulos (tienen un ángulo obtuso, es decir, mayor a 90°).

Los triángulos rectángulos tienen la particularidad de nombrar al lado opuesto del ángulo recto como *hipotenusa*, mientras que los lados adyacentes se conocen como *catetos*.

El siguiente resultado fue expuesto en Los elementos de Euclides (Libro I, Teorema 47 y 48) y hasta la fecha tiene gran valor práctico en muchas disciplinas, principalmente en física.

Teorema (Teorema de Pitágoras). En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

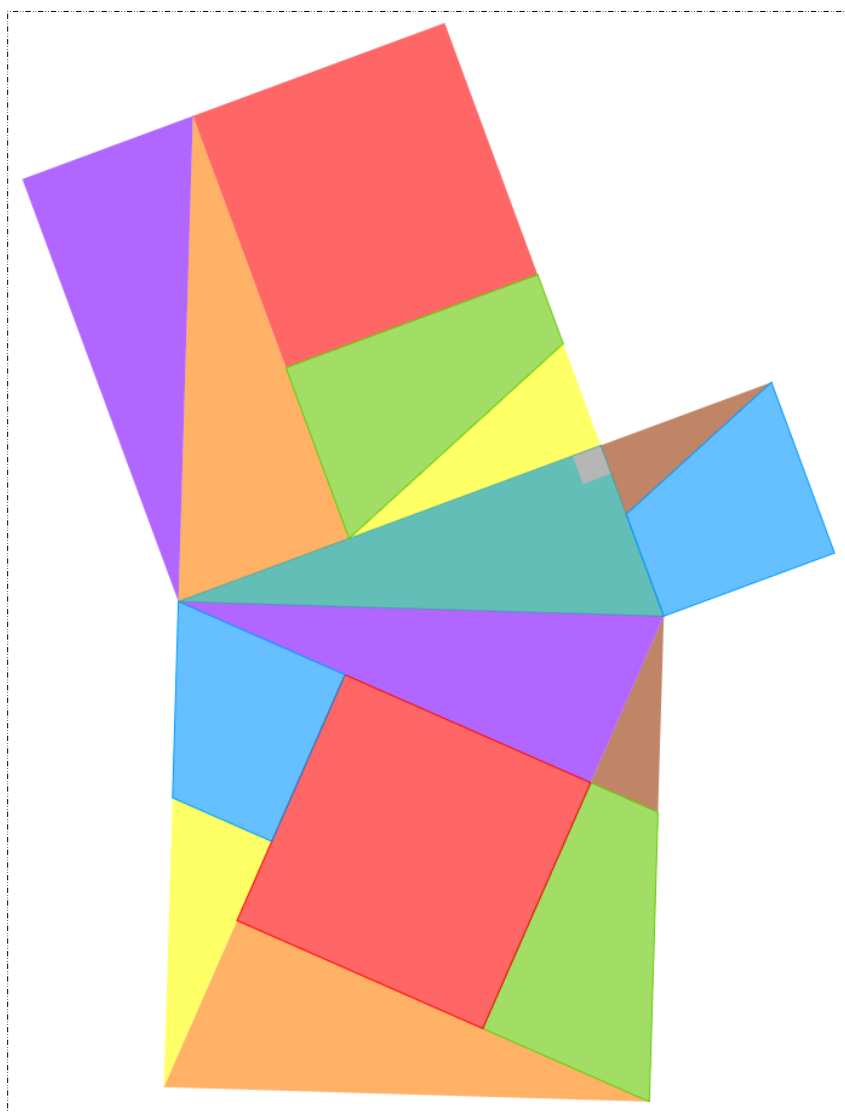


Ilustración 13. Representación virtual de un *rompecabezas de Bhaskara*, en donde se visualiza el teorema de Pitágoras, las piezas que arman los cuadrados más pequeños (sobre los catetos del triángulo rectángulo) son las mismas que se aprecian en el cuadrado que está sobre la hipotenusa. Esta imagen puede ser impresa y recortada para corroborar el teorema. Adaptado de *Puzzle Pitagórico de Bhaskara*, por Arce Sánchez, M., 2015, GeoGebra.org (<https://www.geogebra.org/m/pZFwdepU>). CC BY-SA 3.0 Deed.

Recíprocamente, se puede escribir el siguiente resultado.

Teorema (Recíproco del teorema de Pitágoras). Si en un triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, el triángulo es rectángulo.

1.12 Congruencia y semejanza de triángulos

Se dice que dos triángulos son **congruentes** si tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño, esto es, las mismas medidas de los ángulos y los lados. Existen tres criterios de congruencia de triángulos, considere un par de triángulos como en la

Ilustración 14, se enuncia lo siguiente.

- **Lado – Ángulo – Lado**: tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos iguales.
- **Ángulo – Lado – Ángulo**: tienen un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales.
- **Lado – Lado – Lado**: tienen sus tres lados iguales.

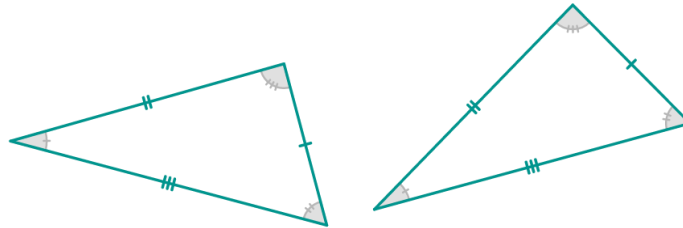


Ilustración 14. Dos triángulos congruentes tienen sus tres lados iguales y sus respectivos ángulos iguales.

Por otro lado, la **semejanza** de triángulos requiere de dos cosas: los ángulos correspondientes deben ser iguales y los lados correspondientes deben ser proporcionales. Para un par de triángulos como en la **Ilustración 15**, se puede enunciar lo siguiente.

- **Ángulo – Ángulo – Ángulo**: tienen sus ángulos correspondientes iguales.
- **Lado – Lado – Lado**: tienen sus tres lados correspondientes proporcionales.
- **Lado – Ángulo – Lado**: tienen dos lados correspondientes proporcionales y el ángulo comprendido entre éstos es igual.

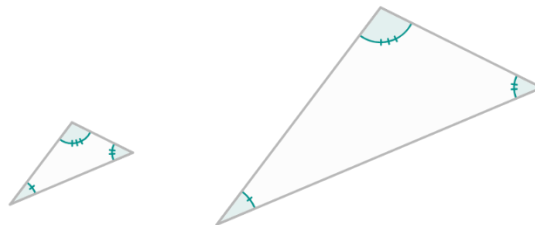


Ilustración 15. Dos triángulos que son semejantes tienen sus tres lados correspondientes proporcionales de acuerdo con los siguientes teoremas; además tienen sus tres ángulos respectivos iguales.

La proporción entre lados de un triángulo se establece con los siguientes resultados, postulados por Tales de Mileto en el siglo VI a. C.

Teorema (Primer teorema de Tales). En un triángulo ABC cualquiera, sean D y E puntos de AB y AC respectivamente, tales que DE es paralelo a BC . Entonces

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}.$$

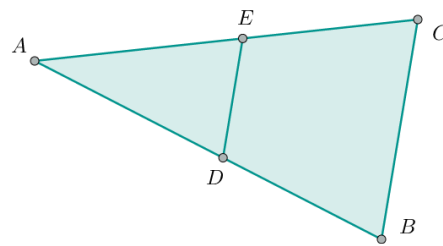


Ilustración 16. $\triangle ABC$ con $DE \parallel BC$.

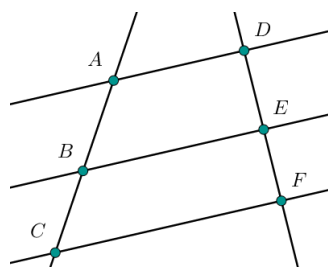


Ilustración 17. Construcción del segundo teorema de Tales.

Teorema (Segundo teorema de Tales). Considere tres rectas AD , BE y CF , y dos rectas transversales a éstas. Si AD , BE y CF son paralelas, entonces

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}.$$

Recíprocamente, si $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ y dos de las rectas AD , BE o CF son paralelas, entonces las tres rectas son paralelas.

1.13 Figuras geométricas

Si dos puntos extremos de una línea quebrada (tantas veces como sea necesario) coinciden, la figura que se obtiene es un **polígono**. La longitud de la recta quebrada es el **perímetro**, las partes en donde se quiebra la recta son los vértices del polígono. De esta forma, se dice que un polígono consta de un número finito de puntos llamados **vértices** y un número igual de segmentos llamados **aristas** (o **lados del polígono**).

Número de lados	Nombre del polígono
1	Henágono, Monógono
2	Dígono, Bígono
3	Trígono, Triángulo
4	Tetrágono, Cuadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono, Exágono
7	Heptágono, Septágono
8	Octógono, Octágono
9	Eneágono, Nonágono
10	Decágono

Tabla 7. Si el polígono tiene n vértices y n lados se dice que es un n -ágono.

Los polígonos regulares son aquellos que tienen los lados de igual longitud. Por ejemplo: el **cuadrado** posee 4 lados y 4 ángulos de 90° y es el único cuadrilátero (polígono de 4 lados) regular; el **triángulo equilátero** posee 3 lados y 3 ángulos de 60° y es el único triángulo regular. Por otro lado, un triángulo escaleno (polígono de 3 lados) no es regular (Ver **Tabla**

Las figuras de dimensión tres son **poliedros**, poseen aristas, vértices y caras, éstas últimas son polígonos. Los **sólidos platónicos** son poliedros tales que caras de cada uno de ellos son polígonos regulares iguales entre sí, dichos poliedros cumplen con la fórmula

$$V + C - A = 2,$$

donde V es el número de vértices, C el número de caras y A el número de aristas. Por ejemplo, el **icosaedro** es un sólido platónico que posee 30 aristas, 12 vértices y 20 caras.

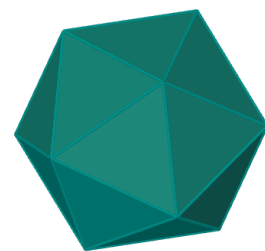


Ilustración 18. Icosaedro.

5).

las

A continuación, se presentan algunos polígonos, poliedros y figuras clásicas junto con sus fórmulas para calcular el área, perímetro y el área superficial (para figuras de dimensión tres).

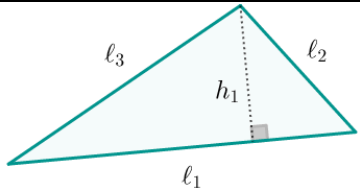
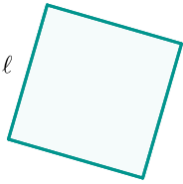
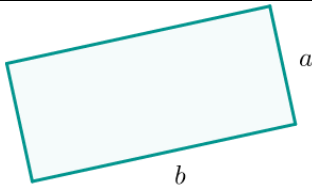
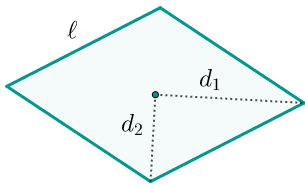
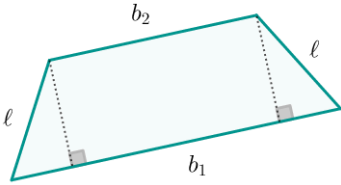
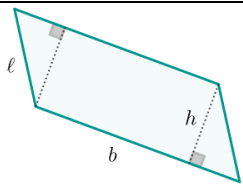
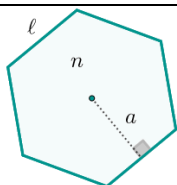
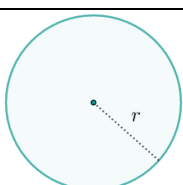
Nombre	Representación	Perímetro	Área
Triángulo		$\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$	$\frac{1}{2}\ell_1 h_1$
Cuadrado		4ℓ	ℓ^2
Rectángulo		$2(a + b)$	ab
Rombo		4ℓ	$\frac{1}{2}d_1 d_2$
Trapezio		$2\ell + b_1 + b_2$	$\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$
Paralelogramo		$2(b + \ell)$	bh
n -ágono regular		$n\ell$	$\frac{1}{2}n\ell a$
Circunferencia		πr	πr^2

Tabla 8. Figuras de dos dimensiones. El n -ágono mostrado es un hexágono ($n = 6$).

Nombre	Representación	Superficie	Volumen
--------	----------------	------------	---------

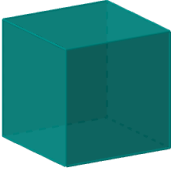
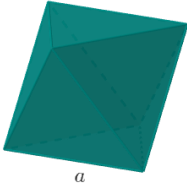
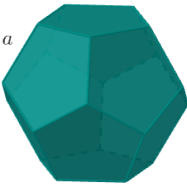
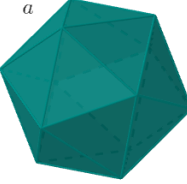
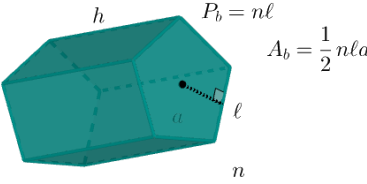
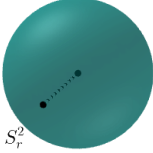
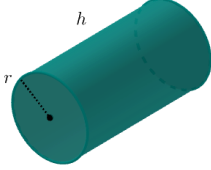
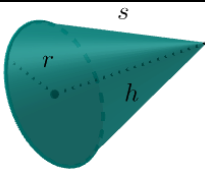
Tetraedro		$\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$
Cubo		$6a^2$	a^3
Octaedro		$2\sqrt{3}a^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$
Dodecaedro		$15\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}a^2$	$\frac{5}{2}\sqrt{\frac{47+21\sqrt{5}}{10}}a^3$
Icosaedro		$5\sqrt{3}a^2$	$\frac{5}{6}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}a^3$
Prisma n -agonal		$2A_b + hP_b$	hA_b
Esfera (S_r^2)		$4\pi r^2$	$\frac{4\pi}{3}r^3$
Cilindro		$2\pi(r + h)$	$\pi r^2 h$
Cono		$\pi r(r + s)$	$\frac{\pi}{3}r^2 h$

Tabla 9. Figuras de tres dimensiones. El prisma mostrado es pentagonal ($n = 5$).

1.14 Trigonometría

Considere dos rectas perpendiculares en el plano, una horizontal y otra vertical, con O su punto de intersección, tal como se muestra en la **Ilustración 19**. Dado un punto P en el plano, se considera el segmento OP y a la distancia de P al centro O como la magnitud de $\overline{OP}$. El ángulo de inclinación del segmento OP se mide a partir del lado derecho de la recta horizontal y el segmento OP , se dice que el ángulo es **positivo** si se mide en sentido **antihorario** (opuesto al avance de las manecillas del reloj), por el contrario, el ángulo es **negativo** si se mide en el sentido contrario al avance de las manecillas del reloj. El valor del ángulo va desde 0° hasta los 360° **sexagesimales**, este último representa una vuelta completa.

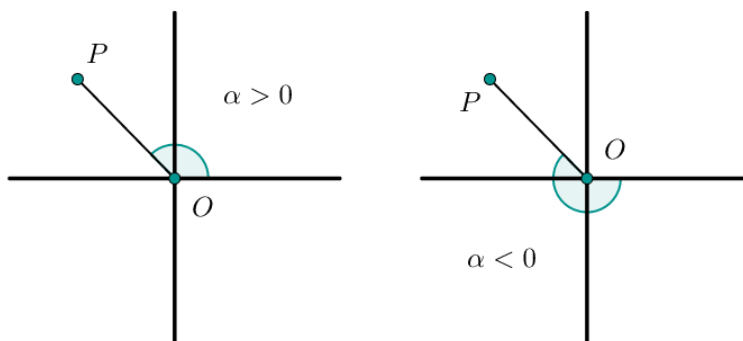


Ilustración 19. Interpretación geométrica de los signos que poseen los ángulos en trigonometría.

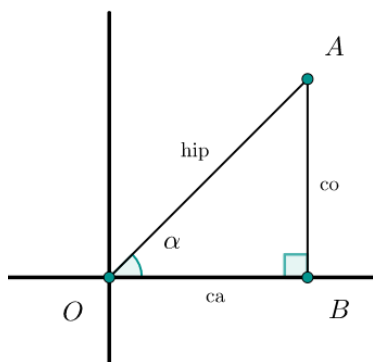


Ilustración 20. Triángulo AOB .

Sea A un punto cualquiera, ubicado a la derecha de la recta horizontal y arriba de la recta vertical (Ver **Ilustración 20**), se traza el segmento AO y la proyección de A sobre la horizontal (punto B). Así, el triángulo AOB es rectángulo, pues el ángulo del vértice B es recto (por construcción); el ángulo que está en el vértice O se nombra α . Se definen las **funciones trigonométricas seno**, **coseno** y **tangente** evaluadas en el ángulo α como

$$\sin(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}, \quad \tan(\alpha) = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}.$$

Adicionalmente, las funciones trigonométricas **cosecante**, **secante** y **cotangente** son

$$\csc(\alpha) = \frac{\overline{OA}}{\overline{AB}}, \quad \sec(\alpha) = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}, \quad \cot(\alpha) = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}}.$$

En el triángulo AOB (Ver **Ilustración 20**), el lado $\overline{OB}$ se conoce como **cateto adyacente** al ángulo α , denotado comúnmente por **ca** o **CA**; mientras que $\overline{AB}$ se conoce como **cateto opuesto** al ángulo α (**co** o **CO**); y el lado $\overline{OA}$ es la **hipotenusa** (**hip** o **HIP**). Con esta notación, las funciones trigonométricas se escriben como

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{co}}{\text{hip}}, \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{ca}}{\text{hip}}, \quad \tan(\alpha) = \frac{\text{co}}{\text{ca}}.$$

La **circunferencia unitaria** S^1 es el conjunto de puntos del plano que equidistan una unidad del centro O . La ubicación de un punto p sobre S^1 está completamente determinada por un solo valor, el ángulo de inclinación α . Entonces, a cada ángulo $\alpha \in [0^\circ, 360^\circ)$ le corresponde uno y solo un arco sobre S^1 . Para encontrar la medida de dicho arco se considera que el **perímetro de una circunferencia de radio r** es

$$2\pi r,$$

entonces el perímetro de la circunferencia S^1 es igual a 2π . Se define un **radián** (denotado por s) como la longitud del arco correspondiente a 1° medido desde la horizontal, es decir, $\frac{2\pi}{360}$. Entonces para un ángulo arbitrario α , la longitud en radianes es igual a

$$s(\alpha) = \left(\frac{2\pi}{360}\right) \cdot \alpha.$$

O bien, la medida sexagesimal de un radián s es

$$\alpha(s) = \left(\frac{360}{2\pi}\right) \cdot s.$$

Considere el triángulo AOB de la **Ilustración 20**, si la hipotenusa tiene un valor unitario, es decir, el lado AO mide 1, por el teorema de Pitágoras (Ver **Ilustración 13**) se puede escribir la identidad trigonométrica

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1,$$

pues su cateto adyacente mide $\cos(\alpha)$ y el cateto opuesto mide $\sin(\alpha)$. Más aún, considerando que $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ se obtiene la identidad $\sec^2(\alpha) - \tan^2(\alpha) = 1$.

1.15 Funciones trigonométricas

Las definiciones de las funciones trigonométricas son para ángulos positivos, pues toman valores a partir del cero, ahora considere el ángulo $-\alpha$. Entonces, geoméricamente (ver **Ilustración 20**) se puede ver que $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$, pues es la base del triángulo AOB , mientras que $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ por ser la proyección de $\overline{AB}$ sobre el eje vertical. Por lo tanto $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$ ya que es la altura del triángulo AOB . Por otro lado, al considerar una reflexión del triángulo AOB respecto a la recta vertical, la altura del triángulo nuevo será la misma, mientras que la base cambia de signo, esto se representa como

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \sin(180^\circ - \alpha) \\ \cos(\alpha) &= -\cos(180^\circ - \alpha)\end{aligned}$$

pues la reflexión de $\overline{OA}$ está inclinada respecto a la horizontal a $(180^\circ - \alpha)$ grados. De forma más general se tiene el resultado siguiente.

Teorema. Las siguientes dos relaciones son válidas para cualesquiera dos ángulos α y β :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta), \\ \sin(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) + \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha).\end{aligned}$$

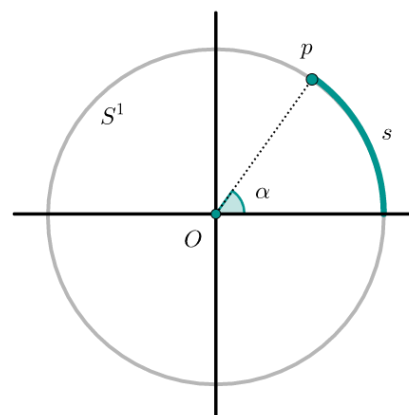


Ilustración 21. En la circunferencia unitaria, S^1 , un ángulo sexagesimal α es equivalente a s radianes.

1.16 Teoremas trigonométricos

El teorema de Pitágoras relaciona los valores de los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo. En un triángulo cualquiera, sus lados y sus ángulos satisfacen los siguientes resultados.

Teorema (Ley de los cosenos). En un triángulo ABC cualquiera, donde a, b y c son las longitudes de los lados y α, β y γ son los ángulos opuestos a los lados a, b y c respectivamente, se tiene que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\beta),$$

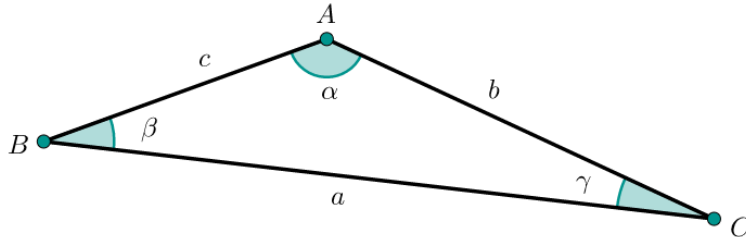


Ilustración 22. En el ΔABC también se cumple que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha)$, y $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$.

Teorema (Ley de los senos). Sea ABC un triángulo inscrito en una circunferencia de radio r . Si a, b y c son los lados del triángulo opuestos a los vértices A, B y C respectivamente, entonces

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} = 2r.$$

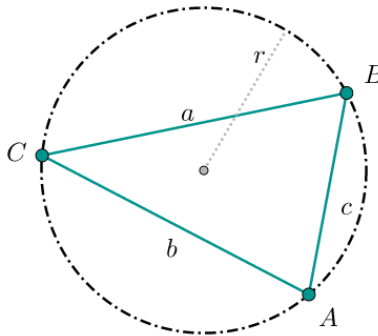


Ilustración 23. Triángulo ABC y su *circunferencia circunscrita*, su centro es el punto de intersección de las *mediatrices* (rectas perpendiculares a los lados del triángulo que pasan por sus puntos medios) y se conoce como *circuncentro*.

Se puede comprobar fácilmente que la ley de cosenos es la generalización del teorema de Pitágoras; al considerar el ángulo $\beta = 90^\circ$, pues $\cos(90^\circ) = 0$: se obtiene la ecuación $b^2 = a^2 + c^2$.

1.17 Coordenadas del plano

La *geometría analítica* estudia la geometría Euclidiana desde el punto de vista algebraico. El *plano cartesiano* está compuesto por dos *ejes coordenados* (perpendiculares), se conocen como *eje de las abscisas* y *eje de las ordenadas*. El eje de las abscisas (y sus coordenadas) se etiqueta con la letra x ; mientras que el eje de las ordenadas, con y . Se define una *orientación* en el plano de tal forma que la *dirección positiva* del eje x va de izquierda a derecha y, en el eje y , de abajo hacia arriba. Por tanto, el plano cartesiano se puede representar por el conjunto

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Las *parejas ordenadas* (x, y) son los *puntos del plano cartesiano* y los elementos que las componen, x y y , se llaman *coordenadas rectangulares* (o cartesianas). Los puntos del plano están bien definidos, ya que se determinan por el par de números mencionados anteriormente.

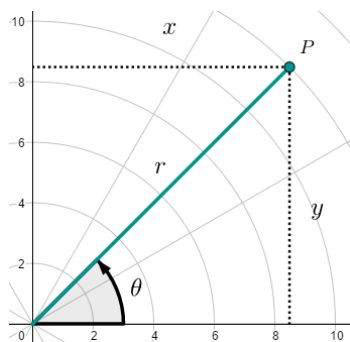


Ilustración 24. Punto P y la representación de sus coordenadas rectangulares y polares.

El *plano polar* se describe a partir de dos coordenadas llamadas *coordenadas polares*: la coordenada *radial*, denotada por r , toma valores en el intervalo $[0, \infty)$; y la coordenada *angular*, denotada por θ , toma valores dentro del intervalo $[0, 360^\circ)$ (si se consideran radianes, el intervalo es $[0, 2\pi]$). Entonces, un punto del plano polar se representa por la pareja (r, θ) .

Al considerar un punto polar (r, θ) , sus coordenadas rectangulares están dadas por las expresiones

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos(\theta), \\ y &= r \cdot \sin(\theta). \end{aligned}$$

Y un punto (x, y) del plano cartesiano $\mathbb{R}^2$ tiene coordenadas polares dadas por

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \end{aligned}$$

1.18 Relaciones analíticas

Sean dos puntos cualesquiera $P = (x_1, y_1)$ y $Q = (x_2, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$, la *distancia* entre P y Q (equivalente a la distancia de Q a P) está dada por

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

y el *punto medio* entre P y Q es

$$R = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

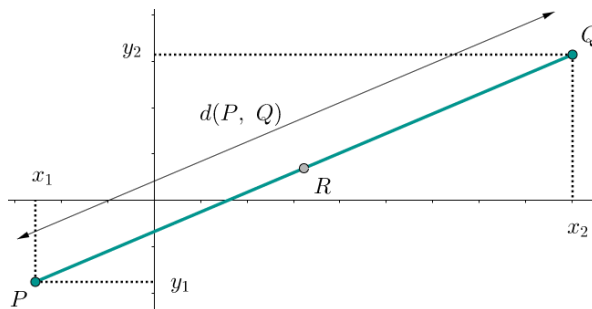


Ilustración 25. Segmento de recta $\overline{PQ}$ con punto medio R y longitud $d(P, Q)$.

1.19 Ecuaciones de primer grado y su interpretación en geometría analítica

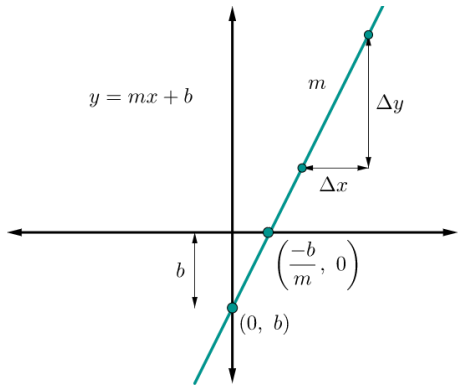


Ilustración 26. Recta ℓ que pasa por los puntos $(0, b)$ y $(-\frac{b}{m}, 0)$, de pendiente m y de ecuación $y = mx + b$.

Dada una recta ℓ y dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) sobre ella, se define la **pendiente** como

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

y el **desplazamiento** b como la altura a la cual ℓ atraviesa el eje y , es decir, cuando $x = 0$, $y = b$. De esta forma la ecuación de la recta ℓ es

$$y = mx + b,$$

donde b es negativo cuando ℓ se encuentra por debajo del origen de coordenadas, positivo cuando se encuentra por encima del origen y cero cuando ℓ pasa por el origen.

Considere dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 , de pendientes m_1 y m_2 con desplazamientos b_1 y b_2 respectivamente, entonces:

- Si $m_1 = m_2$ y:
 - $b_1 \neq b_2$, las rectas son paralelas
 - $b_1 = b_2$, las rectas son coincidentes
- Si $m_1 \cdot m_2 = -1$, entonces las rectas son perpendiculares, además:
 - si b_1 y b_2 son ambos diferentes de cero, el punto de intersección es diferente del origen
 - si $b_1 = b_2 = 0$, el punto de intersección es el origen de coordenadas
- Si $m_1 \neq m_2$ y:
 - $b_1 = b_2 = 0$, las rectas se intersecan en el origen de coordenadas
 - b_1 y b_2 son ambos diferentes de cero, entonces las rectas se intersecan en un punto diferente al origen de coordenadas

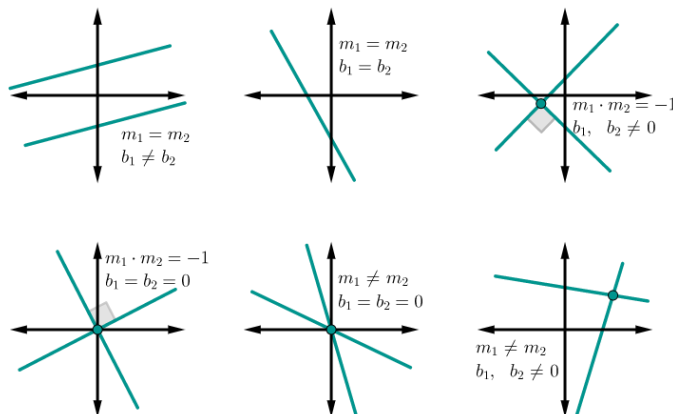


Ilustración 27. Dos rectas en el plano con pendientes m_1 y m_2 y desplazamientos b_1 y b_2 .

1.20 Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables

Una recta ℓ del plano $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen una ecuación general de la forma

$$ax + by = 0,$$

donde a, b y $c \in \mathbb{R}$ y $a^2 + b^2 \neq 0$. Así, dos rectas de ecuaciones $a_1x + b_1y - c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y - c_2 = 0$ son paralelas si a_1 y b_1 son múltiplos de a_2 y b_2 , y $c_1 \neq c_2$. Esto es $a_1 = k \cdot a_2$ y $b_1 = k \cdot b_2$. Ahora, considere el siguiente resultado.

Teorema. Si dos rectas ℓ_1 y ℓ_2 son no paralelas en el plano $\mathbb{R}^2$, entonces se intersecan en y solamente en un punto.

Este resultado nos afirma que el conjunto de intersección entre dos rectas distintas y no paralelas es un punto. Recíprocamente, si dos rectas no se intersecan, entonces son paralelas.

Si las rectas se intersecan, entonces se dice que su intersección corresponde a la solución del sistema de ecuaciones. Por el contrario, si no existe intersección entre ellas, es decir, son rectas paralelas, entonces se dice que el sistema de ecuaciones no tiene solución. Más aún, si las dos ecuaciones representan a la misma recta, entonces se puede operar una ecuación del sistema para obtener la otra.

La intersección de las rectas corresponde al punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que tienen en común, es decir, es el punto que satisface ambas ecuaciones.

Teorema. Las ecuaciones lineales simultáneas

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned}$$

tienen solución única (x, y) si y sólo si $ad - cb \neq 0$. Al conjunto anterior que contiene dos ecuaciones con dos incógnitas se le conoce como sistema de ecuaciones lineales.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede solucionarse con diferentes métodos, a veces, es más fácil proceder con alguno en específico.

- **Sustitución:** Dadas las dos ecuaciones del sistema, se puede despejar una variable de alguna ecuación para después sustituirla en la otra ecuación. De esta forma, se obtiene una nueva ecuación en términos de una sola variable, obteniendo así su valor. Para obtener el valor de la otra variable se sustituye el valor encontrado en la primera ecuación previamente despejada.
- **Reducción:** Se recomienda usar este método cuando algún término que contenga alguna variable sea proporcional en las dos ecuaciones. Identificando esa proporción, se puede operar una de las ecuaciones para obtener dos ecuaciones con un término similar, pero con signo contrario. Ambas ecuaciones se suman y se obtiene una nueva ecuación en términos de solo una variable. El valor de la otra variable se obtiene sustituyéndolo en alguna de las ecuaciones.
- **Igualación:** Se despeja una variable de ambas ecuaciones, se igualan los resultados obtenidos y así se obtiene una nueva ecuación escrita en términos de una sola variable, donde el valor de la misma se puede encontrar con un despeje. Para obtener el valor de la otra variable, se sustituye el valor encontrado en alguna de las ecuaciones.

- **Determinantes:** En este método se plantea el problema desde el álgebra de matrices. A partir de un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} ax + by &= r \\ cx + dy &= s \end{aligned}$$

se considera el determinante principal $\Delta p = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, y los determinantes auxiliares

$\Delta x = \begin{vmatrix} r & b \\ s & d \end{vmatrix} = rd - bs$ y $\Delta y = \begin{vmatrix} a & r \\ c & s \end{vmatrix} = as - rc$. De esta forma las soluciones están dadas por

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{rd - bs}{ad - bc}, \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta p} = \frac{as - rc}{ad - bc}.$$

Por ejemplo: dos familias cuentan con perros y gatos de mascotas y quieren estimar la cantidad de croquetas que consumen en una semana. La primera familia alimenta a un perro y siete gatos con 15 kg de croquetas, mientras que la segunda alimenta a tres perros y cuatro gatos con 11 kg de croquetas. La variable P representa la cantidad de alimento que consume cada perro y G , la cantidad de alimento que consume cada gato. El sistema de ecuaciones lineales se constituye de dos ecuaciones, una por familia:

$$\begin{aligned} P + 7G &= 15, \\ 3P + 4G &= 11. \end{aligned}$$

Entonces, la solución por medio de cada método se muestra a continuación.

- **Sustitución.** De la primera ecuación se despeja la variable P , obteniendo $P = 15 - 7G$; esta se sustituye en la segunda, se obtiene $3(15 - 7G) + 4G = 11$; se simplifica para obtener $G = 2$; este resultado se sustituye en la primera ecuación y se obtiene $P = 1$.
- **Reducción.** Se multiplica la primera ecuación por -3 , se obtiene $-3P - 21G = -45$; esta ecuación se suma a la segunda, eliminando el término que contiene la variable P , esto es, $(4 - 21)G = (11 - 45)$, se obtiene $G = 2$; la variable P se calcula directamente de la sustitución de G en cualquier ecuación, se obtiene $P = 1$.
- **Igualación.** De ambas ecuaciones se despeja P , obteniendo $P = 15 - 7G$ y $P = \frac{11}{3} - \frac{4}{3}G$; al igualarlas se obtiene la ecuación $15 - 7G = \frac{11}{3} - \frac{4}{3}G$; se simplifica para obtener $G = 2$; este resultado se sustituye en cualquier ecuación obtenida en el primer paso, se obtiene $P = 1$.
- **Determinantes.** Con la notación establecida previamente, se escribe $a = 1$, $b = 7$, $r = 15$, $c = 3$, $d = 4$ y $s = 11$; el determinante principal es $\Delta p = (1 \cdot 4) - (7 \cdot 3) = -17$; los determinantes auxiliares son $\Delta P = (15 \cdot 4) - (7 \cdot 11) = -17$ y $\Delta G = (1 \cdot 11) - (15 \cdot 3) = -34$; finalmente, $P = \frac{\Delta P}{\Delta p} = \frac{-17}{-17} = 1$ y $G = \frac{\Delta G}{\Delta p} = \frac{-34}{-17} = 2$.

Por lo tanto, cada perro consume 1 kg de croquetas y cada gato 2 kg de croquetas.

1.21 Ecuaciones de segundo grado

Considere un polinomio de segundo grado $p(x)$, al igualarse a cero se obtienen dos soluciones, no necesariamente diferentes, llamadas *ceros de la función* (pueden ser números reales o complejos). Gráficamente, se están encontrando los puntos donde la gráfica de $p(x)$ atraviesa el eje x . La ecuación resultante es de segundo grado, se puede escribir como

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

donde los valores x_1 y x_2 que dan solución a la ecuación están dados por la *fórmula general*

$$x_{1,2} = \frac{1}{2a}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}),$$

y cuando $b^2 < 4ac$, las soluciones a la ecuación son números complejos $\mathbb{C}$.

La gráfica de los polinomios de segundo grado es una parábola y las soluciones a la ecuación general representan los puntos en donde la parábola atraviesa el eje x , su *vértice* tiene coordenadas

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, p\left(\frac{-b}{2a}\right) \right).$$

Si el vértice se encuentra en el origen de coordenadas, entonces también es el único cero de la función que representa a la parábola. Una parábola se abre hacia alguna dirección, se dice entonces que es cóncava en esa dirección: por ejemplo, la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$ es cóncava hacia arriba (Ver **Ilustración 37**); mientras que la gráfica de $q(x) = -x^2$ es cóncava hacia abajo.

Por ejemplo, considere la siguiente ecuación cuadrática y su representación gráfica.

$$x^2 - 6x - 8y = 7.$$

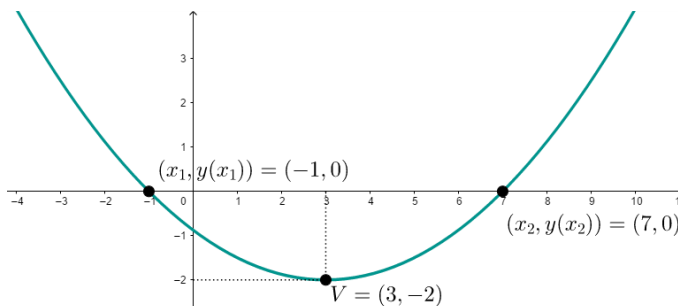


Ilustración 29. Elementos de la parábola.

Se busca escribir la variable y en función de x , es decir, $y(x)$. Se multiplica la ecuación por $\frac{1}{8}$, posteriormente se suma y de ambos lados de la ecuación y, finalmente, se resta $\frac{7}{8}$ por ambos lados de la ecuación; se obtiene la función

$$y(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{8}.$$

Con ayuda de la fórmula general se pueden obtener sus raíces, tomando $a = \frac{1}{8}$, $b = -\frac{3}{4}$ y $c = -\frac{7}{8}$:

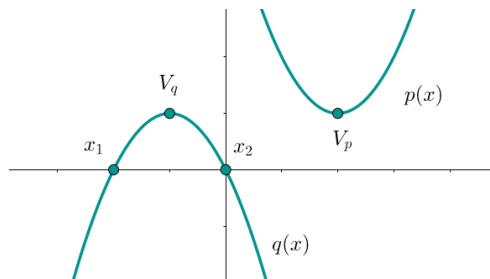


Ilustración 28. Dos parábolas $p(x)$ y $q(x)$ con sus respectivos vértices V_p y V_q . La parábola $q(x)$ tiene dos ceros, mientras que $p(x)$ no tiene.

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \frac{1}{2\left(\frac{1}{8}\right)} \left(-\left(-\frac{3}{4}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{7}{8}\right)} \right) \\
 &= 4 \left(\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{7}{16}} \right) \\
 &= 4 \left(\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4} \sqrt{9+7} \right) = 3 \pm \sqrt{16}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_1 = 3 + 4 = 7$ y $x_2 = 3 - 4 = -1$ son los puntos donde la parábola cumple $y(x_1) = y(x_2) = 0$.

Las coordenadas del vértice son:

$$\begin{aligned}
 V_x &= -\frac{-\frac{3}{4}}{2\left(\frac{1}{8}\right)} = 3\left(\frac{8}{2 \cdot 4}\right) = 3, \\
 V_y &= y(3) = \frac{1}{8}(3)^2 - \frac{3}{4}(3) - \frac{7}{8} = -2,
 \end{aligned}$$

por lo tanto, $V = (3, -2)$. Ver **Ilustración 29**.

1.22 Secciones cónicas

1.22.1 Secciones cónicas como lugares geométricos

El **lugar geométrico** de los puntos P tales que su distancia a un punto fijo F es proporcional a su distancia a una recta fija ℓ , es llamado cónica. La constante de proporcionalidad e se conoce como **excentricidad**. Si $e = 1$ la cónica es una **parábola**, si $0 < e < 1$ es una **elipse** y si $e > 1$ se llama **hipérbola**. Además, la **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos que equidistan una distancia fija r a un punto fijo O .

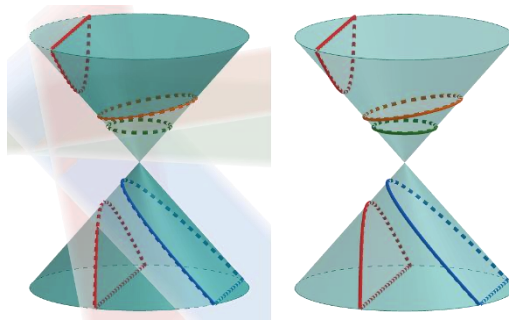


Ilustración 30. Se muestran cinco posibles planos que pueden cruzar un cono, formando cinco diferentes curvas, conocidas como **secciones cónicas**: de **rojo**, la hipérbola; de **azul**, la parábola; de **verde**, la circunferencia; de **anaranjado**, la elipse.

1.22.2 Elementos de las secciones cónicas

Ahora, considere las secciones cónicas inmersas en $\mathbb{R}^2$, las ecuaciones implícitas de las secciones cónicas se exponen a continuación.

- **Parábola:**

Es el conjunto de todos los puntos que equidistan de una recta fija y de un punto fijo que no está sobre dicha recta.

- Cuando su eje es paralelo al eje x satisface la ecuación

$$(y - k)^2 = 4p \cdot (x - h),$$

tiene vértice $V = (h, k)$, foco $F = (h + p, k)$ y directriz $x - h = -p$. Si $p > 0$ el foco está a la derecha del vértice y la parábola se abre a la derecha, si $p < 0$, el foco está a la izquierda de vértice y la parábola se abre a la izquierda.

- Cuando su eje es paralelo al eje y satisface la ecuación

$$(x - h)^2 = 4p \cdot (y - k),$$

tiene vértice $V = (h, k)$, foco $F = (h, k + p)$ y directriz $y - k = -p$. Si $p > 0$ el foco está por encima del vértice y la parábola se abre hacia arriba, si $p < 0$, el foco está debajo del vértice y la parábola se abre hacia abajo.

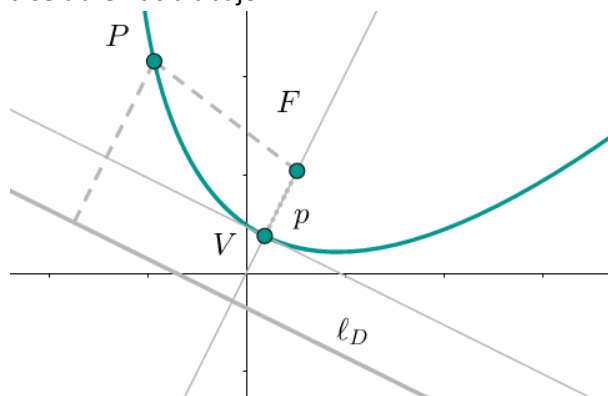


Ilustración 31. Parábola.

- **Elipse:**

Es el conjunto de todos los puntos con la propiedad de que la suma de las distancias de los puntos del conjunto a dos puntos fijos dados es una constante.

- Si su eje mayor es paralelo al eje x , satisface la ecuación

$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1,$$

tiene centro $F_0 = (h, k)$, focos $F_1 = (h - c, k)$ y $F_2 = (h + c, k)$, vértices $V_1 = (h - a, k)$ y $V_2 = (h + a, k)$ y extremos del eje menor $B_1 = (h, k - b)$ y $B_2 = (h, k + b)$.

Particularmente, si $(h, k) = (0, 0)$ satisface la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- Cuando su eje mayor es paralelo al eje y satisface la ecuación

$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1,$$

tiene centro $F_0 = (h, k)$, focos $F_1 = (h, k - c)$ y $F_2 = (h, k + c)$, vértices $V_1 = (h, k - a)$ y $V_2 = (h, k + a)$ y extremos del eje menor $B_1 = (h + b, k)$ y $B_2 = (h - b, k)$.

Particularmente, si $(h, k) = (0, 0)$, satisface la ecuación $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

- En cualquier caso, $a^2 = b^2 + c^2$ ($a > b$) es el cuadrado de la distancia de B_2 a F_2 .

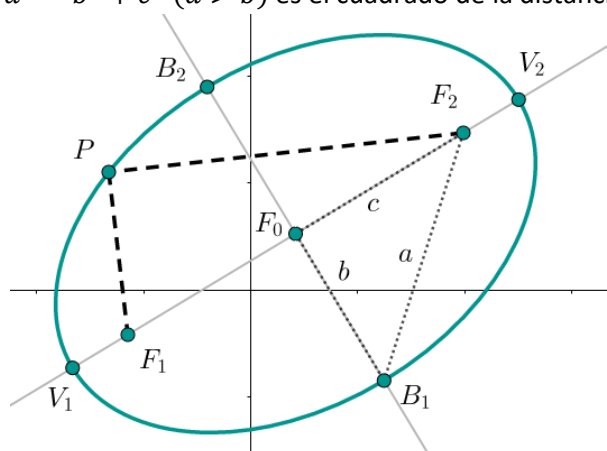


Ilustración 32. Elipse.

- **Hipérbola:**

Es el conjunto de todos los puntos con la propiedad de que la diferencia de las distancias de los puntos del conjunto a dos puntos fijos dados es, en valor absoluto, una constante.

- Cuando su eje es paralelo al eje x , Satisface la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

tiene centro $F_0 = (h, k)$, focos $F_1 = (h - c, k)$ y $F_2 = (h + c, k)$, vértices $V_1 = (h - a, k)$ y $V_2 = (h + a, k)$, extremos de los ejes conjugados $B_1 = (h, k - b)$ y $B_2 = (h, k + b)$ y asíntotas $y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$. Particularmente, si $(h, k) = (0, 0)$, entonces se tiene la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- Cuando su eje es paralelo al eje y , Satisface la ecuación

$$-\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1.$$

tiene centro $F_0 = (h, k)$, focos $F_1 = (h, k - c)$ y $F_2 = (h, k + c)$, vértices $V_1 = (h, k - a)$ y $V_2 = (h, k + a)$, extremos de los ejes conjugados $B_1 = (h + b, k)$ y $B_2 = (h - b, k)$ y asíntotas $y - k = \pm \frac{a}{b}(x - h)$. Particularmente, si $(h, k) = (0, 0)$, entonces se tiene la ecuación $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

- En cualquier caso, $c^2 = a^2 + b^2$ es el cuadrado de la distancia del centro a cualquier foco.

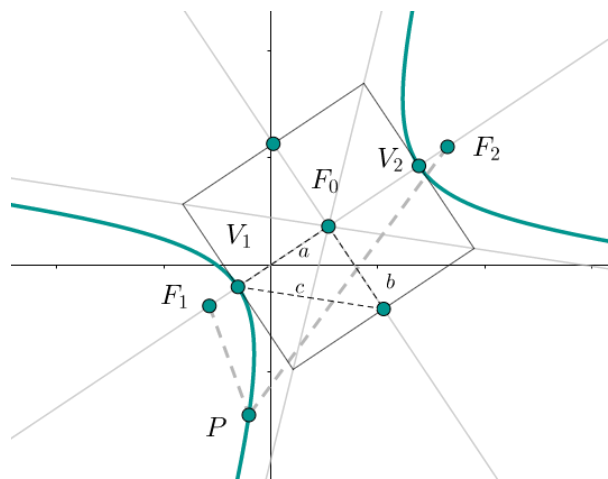


Ilustración 33. Hipérbola.

- **Circunferencia:**

Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan una distancia fija r a un punto fijo.

- Si $P_0 = (0, 0)$, entonces su ecuación es $x^2 + y^2 = r^2$. Y si su centro es $P_0 = (h, k)$, el radio es r y un punto sobre ella $P = (x, y)$ satisface la ecuación

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

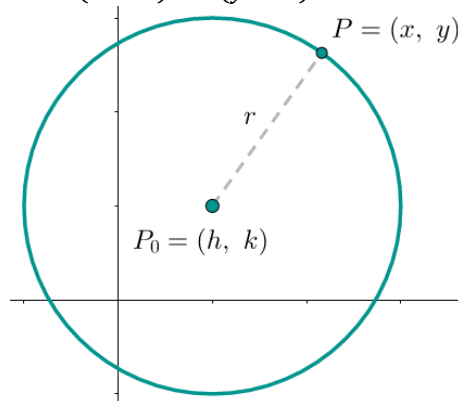


Ilustración 34. Circunferencia.

El siguiente resultado ayuda a analizar las secciones cónicas desde una ecuación general.

Teorema. *La ecuación cuadrática*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

*es la ecuación de una **elipse** si $B^2 - AC < 0$, una **parábola** si $B^2 - AC = 0$ y una **hipérbola** si $B^2 - AC > 0$, de dónde A, B y C no son todos cero. Además, si $A = C$ y $B = 0$, entonces es la ecuación de una **circunferencia**. Al número $I = B^2 - AC$ se le llama **discriminante**.*

Por ejemplo, considere la ecuación general

$$20x^2 - 20y^2 - 80x + 240y + 320 = 0.$$

Con la notación del teorema anterior se escribe $A = 20, B = 0, C = -20, D = 80, E = 240$ y $F = 320$; el discriminante está dado por $I = B^2 - 4AC = (0) - 4 \cdot (20) \cdot (-20) = 160 > 0$, entonces la ecuación corresponde a una **hipérbola**. Para obtener la ecuación implícita y todos los elementos de la hipérbola se propone el siguiente procedimiento

1. Por practicidad, se reordena la ecuación como $(20x^2 - 80x) - (20y^2 - 240y) = -320$, de tal forma que los términos cuadráticos que se encuentran dentro de los paréntesis sean positivos.

2. De ambos paréntesis se puede factorizar 20, para obtener

$$20(x^2 - 4x) - 20(y^2 - 12y) = -320.$$

Note que ambos paréntesis contienen parcialmente una ecuación de segundo grado, entonces se busca completar los cuadrados, y así obtener dos números tales que ambas ecuaciones sean factorizables.

- Para ello, es útil recordar que el resultado que se busca es de la forma $(x + a)^2$, como se cuenta con los primeros dos términos de dicho polinomio, se puede escribir,

$$(x + a)^2 = \underbrace{x^2 - 4x}_{\text{paréntesis}} + a^2 = x^2 + 2 \underbrace{(-2)}_a x + a^2,$$

de esta forma se obtiene que $a = -2$; por lo que el primer paréntesis se puede escribir como $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$. Note que en el desarrollo anterior se utilizó la fórmula del binomio cuadrado (Ver ejemplo en **Procedimientos algebraicos**)

- Análogamente, se puede escribir $y^2 - 12y = (y - 6)^2 - 36$.

La ecuación $20(x^2 - 4x) - 20(y^2 - 12y) = -320$ es equivalente a $20((x - 2)^2 - 4) - 20((y - 6)^2 - 36) = -320$, de donde se pueden extraer los términos numéricos para obtener $20(x - 2)^2 - 20(y - 6)^2 - 80 + 720 = -320$. Por lo tanto, se obtiene

$$20(x - 2)^2 - 20(y - 6)^2 = -960.$$

Para obtener la ecuación de la cónica en su forma simplificada se divide la ecuación anterior por -960 , obteniendo

$$\frac{20(x - 2)^2}{-960} - \frac{20(y - 6)^2}{-960} = \frac{-960}{-960},$$

$$-\frac{(x - 2)^2}{48} + \frac{(y - 6)^2}{48} = 1.$$

A partir de la ecuación anterior se puede deducir que la hipérbola tiene su eje mayor paralelo al eje y , pues el término que contiene a la variable x es negativo (Ver **Hipérbola**:).

3. De la ecuación $-\frac{(x-2)^2}{48} + \frac{(y-6)^2}{48} = 1$ se rescatan los valores numéricos:

- $h = 2$,
- $k = 6$,
- $a = b = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$,
- $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$.

Y los elementos de la hipérbola se calculan como sigue:

- Centro:
 - $F_0 = (h, k) = (2, 6)$.
- Focos:
 - $F_1 = (h, k - c) = (2, 6 - 4\sqrt{6})$,
 - $F_2 = (h, k + c) = (2, 6 + 4\sqrt{6})$.
- Vértices:
 - $V_1 = (h, k - a) = (2, 6 - 4\sqrt{3})$,
 - $V_2 = (h, k + a) = (2, 6 + 4\sqrt{3})$.
- Extremos de los ejes conjugados:
 - $B_1 = (h + b, k) = (2 + 4\sqrt{3}, 6)$,

- $B_2 = (h - b, k) = (2 - 4\sqrt{3}, 6)$.
- Asíntotas, $y = \pm \frac{a}{b}(x - h) + k = \pm(x - 2) + 6$
 - $y = x + 4$,
 - $y = -x + 8$.

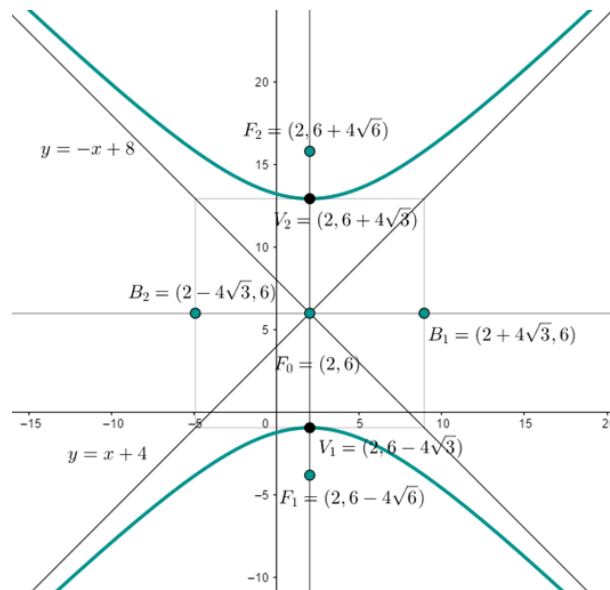


Ilustración 35. Elementos obtenidos de la hipérbola de ecuación $-\frac{(x-2)^2}{48} + \frac{(y-6)^2}{48} = 1$.

1.23 Funciones reales de variable real

1.23.1 Elementos de una función

Una función f es una **regla de correspondencia** entre dos conjuntos que asigna a cada elemento del primer conjunto un único elemento del segundo conjunto. Se define:

- El **dominio** de f , denotado por Dom_f , como el conjunto de todos los a para los que existe un único número b tal que $b = f(a)$.
- El **condominio** de f , denotado por Cod_f , como aquel conjunto donde caen los elementos de la función.
- La **imagen** de f , denotada por Im_f , como el conjunto dado por todos los $b = f(a)$.

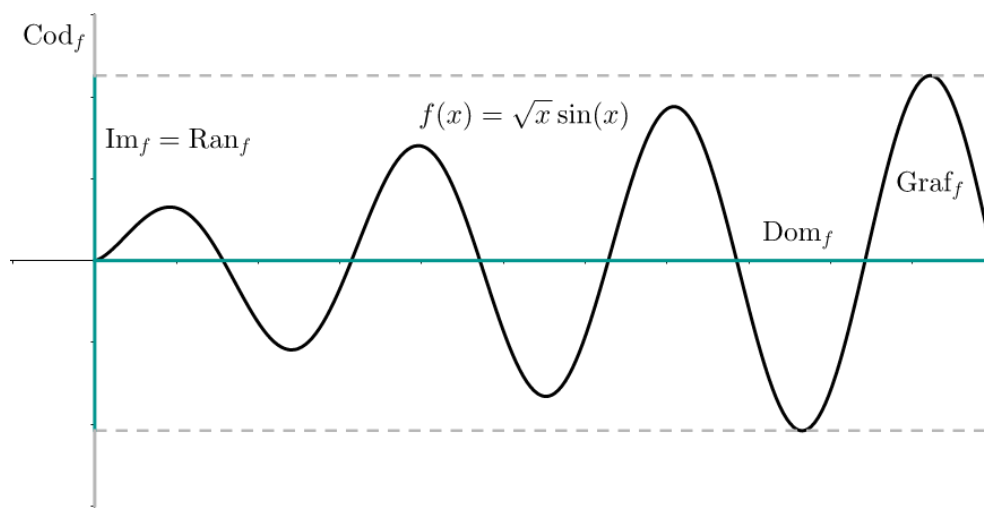


Ilustración 36. Función $f(x) = \sqrt{x} \sin(x)$, en donde se muestra: dominio, $(0, \infty)$; codominio, $\mathbb{R}$; imagen (o rango), y gráfica. Esta función está definida para todo número real mayor o igual a cero, pues la raíz cuadrada de un número negativo no está definida dentro del conjunto de los números reales.

En resumen, una función sigue la regla de correspondencia

$$f: \text{Dom}_f \rightarrow \text{Im}_f \subseteq \text{Cod}_f.$$

Una función f es **real y de variable real** si toma valores en el conjunto de los números reales y devuelve un número real, es decir, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces:

- La **gráfica** de f es

$$\text{Graf}_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

- El **rango** de f es

$$\text{Ran}_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(x)\}.$$

Note que el rango es igual a la imagen para funciones reales de variable real.

1.23.2 Simetría, funciones crecientes y decrecientes

Se dice que una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

- Es **par** si $f(x) = f(-x)$.

Por ejemplo, $p(x) = x^2$ es par, ya que $p(-x) = (-x)^2 = (-1)^2 x^2 = x^2 = p(x)$. La gráfica es simétrica respecto al eje y (una reflexión sobre el eje y).

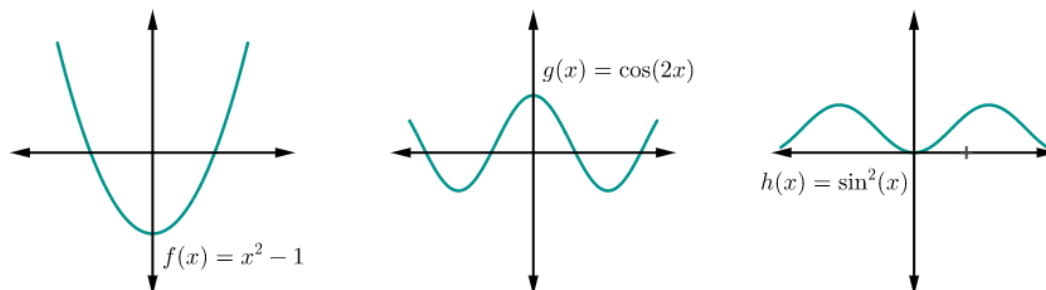


Ilustración 37. Ejemplos de funciones pares. De acuerdo con la Ilustración 20, el coseno representa el valor de cateto adyacente, el cual no cambia si se cambia el signo del ángulo, es decir, $\cos(-x) = \cos(x)$, entonces $g(-x) = \cos(2(-x)) = \cos(-2x) = \cos(2x) = g(x)$.

- Es **impar** si $f(x) = -f(-x)$.

Por ejemplo, $q(x) = x^3$ es impar, ya que $-q(-x) = -(-x)^3 = -(-1)^3 x^3 = -(-1)x^3 = x^3 = q(x)$. La gráfica es simétrica respecto al origen de coordenadas (una doble reflexión; una sobre el eje y y otra sobre el eje x).

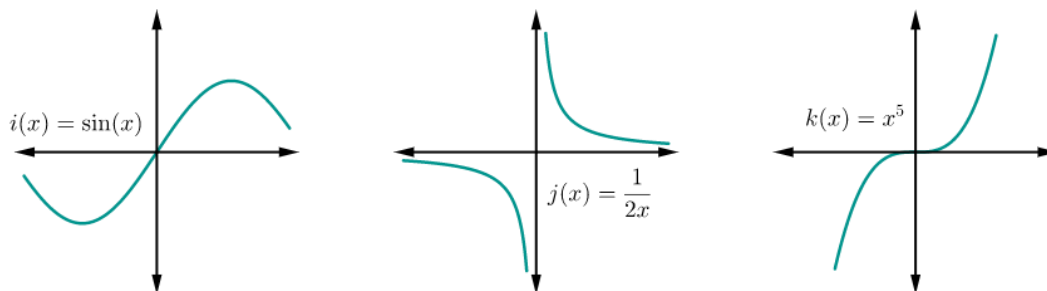


Ilustración 38. Ejemplos de funciones impares. A partir de la Ilustración 20, el seno de x representa el valor del cateto adyacente, el cual es negativo, pues se encuentra debajo del eje horizontal, esto es, $\sin(-x) = -\sin(x)$, entonces, $-i(-x) = -2\sin(-x) = -2(-\sin(x)) = 2\sin(x) = i(x)$.

Ahora se considera una función definida sobre un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, es decir, $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, además sean $p, q \in (a, b)$ tales que $p < q$. La función f es **creciente** en el intervalo si $f(p) < f(q)$, por el contrario, se dice que es **decreciente** si $f(p) > f(q)$.

Por ejemplo (Ver Ilustración 37 y Ilustración 38).

- $k(x) = x^5$ es creciente en todos los reales.
- $j(x) = \frac{1}{2x}$ es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
- $f(x) = x^2 - 1$ es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$.

1.23.3 Tipos de funciones

Las funciones se clasifican en dos grupos, las algebraicas y las trascendentales.

Funciones *algebraicas*, la variable es manipulada con operaciones algebraicas, tales como la suma, multiplicación, etc.

- **Polinomios de grado n** : Son aquellas sumas de potencias de la variable, es decir, $p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n,$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n$ se llaman coeficientes del polinomio.

- **$n = 0$** . Corresponden a las funciones constantes, es decir, $f_c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$ para todo x .
- **$n = 1$** . son aquellas de la forma $f(x) = a_0 + a_1x$. Comúnmente, se les llama funciones lineales.
 - Si $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ entonces se trata de la *función identidad* $\text{Id}(x) = x$.
 - Si $a_0 = 0$ entonces se trata de una *función de proporcionalidad* (Ver 1.5), $f(x) = a_1x$, donde la constante de proporcionalidad es a_1 .
- **$n = 2$** . Se conocen como funciones cuadráticas $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.
- **Racionales**: Son de la forma $\frac{f(x)}{g(x)}$ donde $g(x) \neq 0$ para algunos valores de x .
- **Irracionales**: Son aquellas funciones que son de tipo polinomial, tienen a la variable involucrada con una raíz, por lo menos una vez, es decir, son de la forma $\sqrt[n]{f(x)}$ para algún $n \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. A n se le conoce como el índice de la raíz y a la función $f(x)$ se le conoce como radicando, esta puede ser una función de cualquier tipo.

Funciones *trascendentales*, la variable se opera mediante exponenciales, logaritmos, valores trigonométricos, etc.

- **Trigonométricas**.
 - **Clásicas**. Alguna de las funciones trigonométricas, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\csc(x)$, $\cot(x)$ o $\sec(x)$, es operada algebraicamente o donde la x también sea operada algebraicamente.
 - **Arcos**: Alguna de las funciones trigonométricas inversas, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, $\text{arccsc}(x)$, $\text{arccot}(x)$ o $\text{arcsec}(x)$, es operada algebraicamente o donde la variable también es operada algebraicamente.
- **Exponenciales**: Están dadas por $f_a(x) = a^x$ para algún $a \in \mathbb{R}$.
 - Particularmente, la *función exponencial* es aquella donde
$$a = e \approx 2.718281828 \dots \in \mathbb{I},$$
es decir, $f_e(x) = \exp(x) = e^x$.
- **Logarítmicas**: Aparece algún logaritmo con base $a \in \mathbb{R}$, es decir, $f_a(x) = \log_a(x)$.
 - El *logaritmo base 10* es $f_{10}(x) = \log_{10}(x) = \log(x)$.
 - Si $a = e$, entonces se trata de la función *logaritmo natural* $\ln(x) = \log_e(x)$.
 - Las funciones exponenciales y logarítmicas son inversas una de la otra, es decir,
$$\log_a(a^x) = \text{Id}(x) \iff a^{\log_a(x)} = \text{Id}(x).$$
 - Las propiedades algebraicas de los logaritmos son las siguientes:
 - Producto de números: $\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)$.
 - División de números: $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$.

- Potencia: $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$.
- $\log_a(a) = 1$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

1.23.4 Logaritmos como funciones de procesos naturales

Considere las siguientes situaciones.

- Una población de 36 capibaras (*Hydrochoerus hydrochaeris*) siguió el patrón de crecimiento poblacional 6^t , donde el tiempo t está medido en años. Para saber la antigüedad de la población se realiza lo siguiente:

1. Como $36 = 6^2$, se puede escribir la ecuación $6^t = 6^2$.

2. Se aplica la función logaritmo (base 6) de ambos lados, es decir,

$$\log_6(6^t) = \log_6(6^2).$$

3. Al usar la propiedad de la potencia y considerando que $\log_a(a) = 1$ se obtiene que $t = 2$ años es el tiempo de antigüedad de la población de capibaras, en efecto:

$$\log_6(6^t) = \log_6(6^2) \Rightarrow t \cdot \underbrace{\log_6(6)}_{=1} = 2 \cdot \underbrace{\log_6(6)}_{=1}.$$

Note que la última ecuación también se puede simplificar dividiendo de ambos lados por $\log_6(6)$, pero se hace énfasis en el uso de la propiedad $\log_6(6) = 1$.

- Los planetas, estrellas e incluso galaxias pueden ser visibles desde la Tierra debido a su brillo en el cielo. Para medir este brillo, se utiliza un sistema de magnitudes (m) definido en una escala logarítmica.

En el siglo II a.C., Hiparco de Nicea definió seis clases de brillo (actualmente magnitudes aparentes) para clasificar el brillo de 1 000 estrellas. En esta escala, la clase uno agrupaba a las estrellas más brillantes en el cielo, mientras que la clase seis incluía a las estrellas de brillo más tenue. Posteriormente, en 1859, Norman Robert Pogson estableció que la diferencia de brillo entre dos magnitudes es equivalente a $\sqrt[5]{100} = 2.512$, que actualmente se redondea a 2.5.

La magnitud aparente (m) de un objeto astronómico se define en términos de su brillo percibido desde la Tierra. Sin embargo, este brillo depende de la distancia a la que se encuentra el objeto. Por lo tanto, se introduce la magnitud absoluta (M), que indica el brillo intrínseco de un objeto, es decir, el brillo que tendría a una distancia igual a 10 parsecs (pc). Un Parsec se define como una distancia igual a 3.085×10^{13} km.

El *Sol* tiene una magnitud aparente $m_{\odot} = -26.74$ y una magnitud absoluta $M_{\odot} = 4.83$, mientras que la estrella *Betelgeuse* (α *Orionis*) tiene $m_{\alpha O} = 0.5$ y $M_{\alpha O} = -5.47$.

Ambas magnitudes (m y M) están relacionadas con la distancia a la que se encuentra un objeto (d), medida en Parsecs, por medio de la ecuación conocida como *módulo de distancia*:

$$m - M = 5 \cdot \log_{10} \left(\frac{d}{10 \text{ pc}} \right).$$

La distancia se obtiene de la siguiente manera.

1. El logaritmo de la fracción se simplifica como

$$\log_{10} \left(\frac{d}{10} \right) = \log_{10}(d) - \underbrace{\log_{10}(10)}_{=1} = \log_{10}(d) - 1$$

donde el último término es igual a 1, pues la base es igual a la cantidad a la cual se aplica la función logarítmica. Entonces, como $m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d}{10} \right)$, se satisface la ecuación

$$m - M = 5 \log_{10}(d) - 5.$$

2. Se libera la función logarítmica sumando de ambos lados un 5 y dividiendo por 5 (estrictamente en ese orden), esto es

$$\begin{aligned} m - M &= 5 \log_{10}(d) - 5 \\ &\Rightarrow \\ \frac{m - M + 5}{5} &= \frac{5 \log_{10}(d) - 5 + 5}{5}, \end{aligned}$$

y simplificando, se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{5}(m - M) + 1 = \log_{10}(d).$$

3. Finalmente, se aplica la función exponencial 10^x

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}(m - M) + 1 &= \log_{10}(d) \\ &\Rightarrow \\ 10^{\frac{1}{5}(m - M) + 1} &= \underbrace{10^{\log_{10}(d)}}_{= \text{Id}(d) = d} \end{aligned}$$

y se obtiene la expresión buscada

$$d = 10^{\frac{1}{5}(m - M) + 1}.$$

El Sol tiene magnitud aparente $m_{\odot} = -26.7$ y magnitud absoluta $M_{\odot} = 4.8$, entonces su distancia a la tierra está dada por la cantidad

$$\begin{aligned} d_{\odot} &= 10^{\frac{1}{5}(m_{\odot} - M_{\odot}) + 1} \\ &= 10^{\frac{1}{5}(-26.74 - 4.83) + 1} \\ &\approx 5.011 \times 10^{-7} \text{ pc.} \end{aligned}$$

Para escribir el resultado en kilómetros se considera que $1 \text{ pc} = 3.085 \times 10^{13} \text{ km}$:

$$\begin{aligned} d_{\odot} &\approx 5.011 \times 10^{-7} \text{ pc} \\ &\approx 5.011 \times 10^{-7} \cdot \underbrace{(3.085 \times 10^{13} \text{ km})}_{1 \text{ pc}} \\ &\approx 1.497 \times 10^8 \text{ km.} \end{aligned}$$

Note que los cambios de unidades, tanto en la física o en cualquier otra disciplina, consisten en sustituir el valor unitario de la unidad que se desea cambiar (en este caso, 1 pc) a partir de su definición en las unidades en las que se desea ver el resultado ($3.085 \times 10^{13} \text{ km}$), sin importar si la unidad se encuentra dentro de una fracción (en el denominador o el numerador).

1.24 Límites de funciones

Sea $f: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida en algunos puntos del intervalo abierto, es decir, $\text{Dom}_f \subseteq (a, b)$. Se considera $c \in (a, b)$ (no necesariamente en el dominio de f) y sea $l \in \mathbb{R}$. Si *la función f se aproxima al límite l cerca de $x = c$* , entonces $f(x)$ se aproxima tanto como se quiera a l siempre y cuando x se aproxime a c , siendo distinto de c . Este hecho se escribe como:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l.$$

Cuando la función no se aproxima a ningún número, se dice que *el límite no existe*. Note que no necesariamente debe de estar definido el valor $f(c)$, como se puede apreciar a continuación. En las tres gráficas superiores las funciones están definidas de tal forma que $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ existe y es igual a l , sin embargo, dicho límite no existe para las tres funciones inferiores.

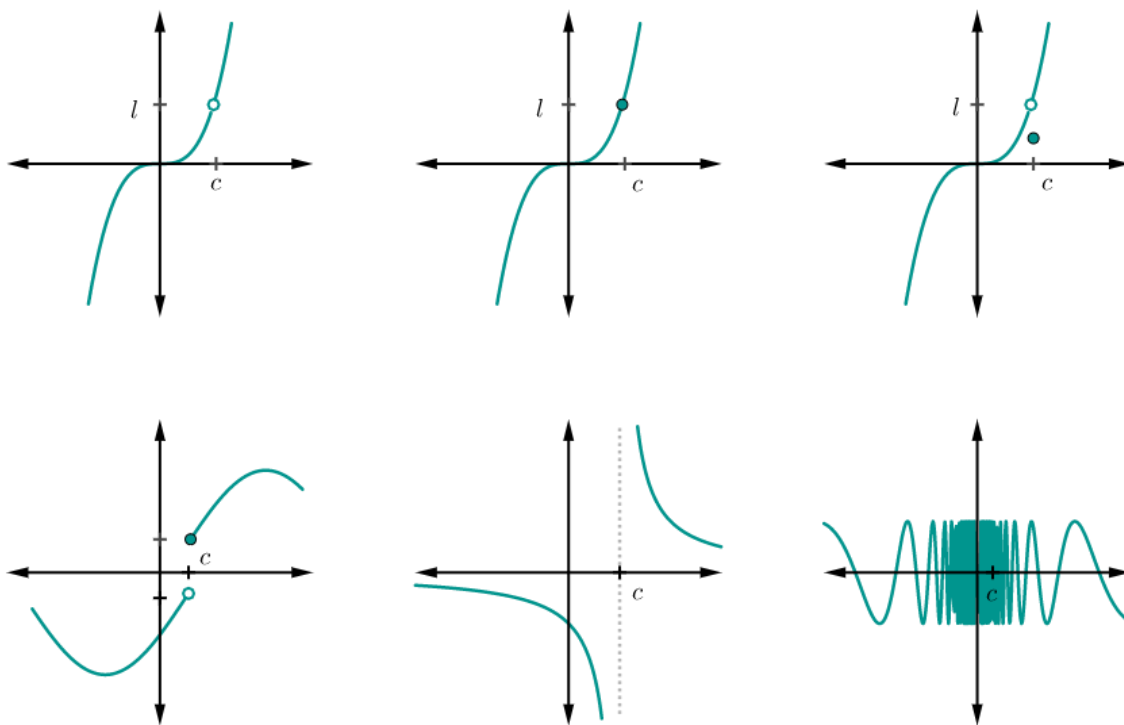


Ilustración 39. Se presentan seis posibles casos para el límite de una función, donde el punto vacío representa un hueco en la gráfica de la función, mientras que los puntos rellenos si están definidos. *Izquierda superior*, la función no está definida para $x = c$, sin embargo, los límites derecho e izquierdo de la función cuando $x \rightarrow c$ existen y son iguales a l ; *centro superior*, la gráfica es continua en c ; *derecha superior*, la función si está definida en $x = c$, pero no es continua en dicho punto, sin embargo, los límites derecho e izquierdo de la función cuando $x \rightarrow c$ existen y son iguales a l . *Izquierda inferior*, los límites derecho e izquierdo de la función son diferentes, por lo que no existe; *centro inferior*, la función tiende a $+\infty$ o $-\infty$ cuando $x \rightarrow c$ por la derecha o la izquierda respectivamente; *derecha inferior*, la función no se aproxima a ningún límite para un valor muy pequeño de c .

Sean b y c dos números reales y n un entero positivo, además, considere f y g funciones: la siguiente tabla las reglas más importantes para la resolución de límites.

Situación	Límite
Función continua	Si la función f es continua en c $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$
Función constante	$\lim_{x \rightarrow c} a = a$
Función identidad	$\lim_{x \rightarrow c} \text{Id}(x) = \lim_{x \rightarrow c} x = \text{Id}(c) = c$
Linealidad de límites	$\lim_{x \rightarrow c} [b \cdot f(x) \pm g(x)] = b \cdot \lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow c} g(x) = b \cdot l + r$
Producto de límites	$\lim_{x \rightarrow c} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow c} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow c} g(x) = l \cdot r$
Cociente de límites	$\lim_{x \rightarrow c} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow c} f(x)}{\lim_{x \rightarrow c} g(x)} = \frac{l}{r}$
Potencia de un límite	$\lim_{x \rightarrow c} f^n(x) = \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^n = l^n$
Radical de un límite	$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c} f^{\frac{1}{n}}(x) &= \lim_{x \rightarrow c} \sqrt[n]{f(x)} \\ &= \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow c} f(x)} \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow c} f(x) \right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$
Casos comunes (Si $k \in \mathbb{R}$)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^n} = 0 \qquad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} k^x = \pm\infty$

Tabla 10. Reglas para operar límites de funciones y algunos límites que conviene recordar.

De los ejemplos de funciones mostrados anteriormente, se puede afirmar lo siguiente.

- La función $j(x) = \frac{1}{2x}$ (Ver **Ilustración 38**). El $\lim_{x \rightarrow 0} j(x)$ no existe, pero si se toma cualquier otro límite, por ejemplo $x = 6$ se tiene que el $\lim_{x \rightarrow 6} j(x) = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{2x} = \frac{1}{2(6)} = \frac{1}{12}$.
- La función e^{-x} . El límite $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$. En particular se cumple que, para cualquier número $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^{-x} = 0$.
- La función $s(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (Ver **Ilustración 39**, gráfica a la derecha y abajo). El límite $\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe, pues la función no se aproxima a ningún valor del intervalo $[-1, 1]$.

1.25 Razón de cambio y derivada de una función

La **razón de cambio promedio** es una magnitud que expresa qué tanto se modifica una variable (y) respecto a otra variable (x), es decir, es una medida de proporción que compara dos cantidades a partir de sus módulos de cambio Δy y Δx ; en el intervalo $[x_1, x_2]$ está dada por

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si se considera que y es función de x , es decir, $y = f(x)$, se escribe la razón de cambio promedio de la función $f(x)$ en el intervalo $[x_1, x_2]$ como

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Por ejemplo: la velocidad es una razón de cambio entre la distancia recorrida por un cuerpo y el tiempo que este se tardó en recorrer dicha distancia, esto es, $v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$; la aceleración corresponde a la razón de cambio entre la velocidad que un cuerpo posee respecto al tiempo que transcurre para llevar a cabo dicho cambio de velocidad, se tiene que $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

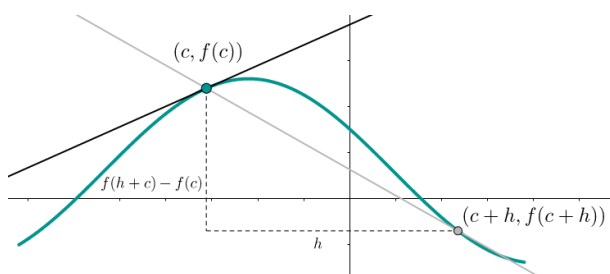


Ilustración 40. Gráfica de la función f y su recta tangente, ubicada en el punto $(c, f(c))$. Cuando $h \rightarrow 0$, el punto $(c+h, f(c+h))$ se aproxima a $(c, f(c))$, ocasionando que la recta gris se convierta en la recta tangente.

El concepto de derivada nace a partir de la obtención de una recta tangente a una función dada, para ello se considera la ecuación de la pendiente de una recta, la cuál es la razón de cambio entre el aumento en la variable x y el aumento en la variable y . Sea $f: (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $c \in (a, b)$. Entonces la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(c, f(c))$ está dada por la expresión

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

De esta forma se define la **derivada** de la función, denotada por $f'(x)$, como

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

para todo valor x en donde el límite existe. La notación

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

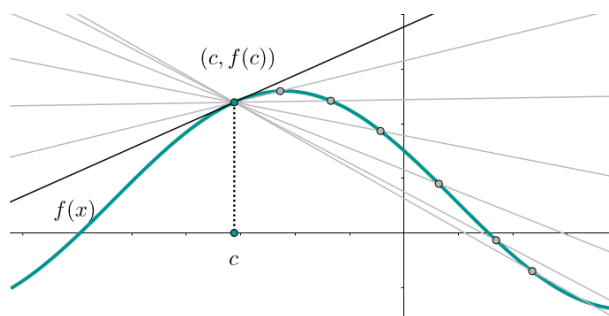


Ilustración 41. Derivada como caso límite de las rectas grises.

representa a la derivada como la razón entre los cambios infinitesimales de las cantidades x y y . En otras disciplinas se acostumbra a representar a la derivada de una función con un punto “ $\cdot$ ” encima, es decir, $\dot{f}(x)$.

Para derivar funciones es conveniente utilizar las reglas de derivación que se muestran a continuación, para ello, considere f y g dos funciones reales de variable real.

Nombre	Derivada
Regla de la constante	Dado un número $c \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}(c) = 0$
Regla de la función identidad	$\frac{d}{dx}(\text{Id}(x)) = \frac{d}{dx}(x) = 1$
Regla de la potencia	Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$
Linealidad de la derivada	Dado un número $c \in \mathbb{R}$ $\frac{d}{dx}(c \cdot f(x) \pm g(x)) = c \cdot \frac{df}{dx} \pm \frac{dg}{dx}$
Regla del producto	$\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = \frac{df}{dx} \cdot g(x) + \frac{dg}{dx} \cdot f(x)$
Regla del cociente	$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{df}{dx} \cdot g(x) - \frac{dg}{dx} \cdot f(x)}{g^2(x)}$
Regla de la cadena	$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Tabla 11. Formulaciones para realizar derivadas de funciones

Funciones	Derivada
Trigonómicas	$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x), \quad \frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x),$ $\frac{d}{dx} \sec(x) = \sec(x) \cdot \tan(x), \quad \frac{d}{dx} \csc(x) = -\csc(x) \cdot \cot(x),$ $\frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x).$
Trigonómicas inversas	$\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Exponencial de b	Para dos números cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ $\frac{d}{dx} b^{ax} = a \cdot b^{ax}$
Función exponencial	En particular, si $b = e$ $\frac{d}{dx} e^{ax} = a \cdot e^{ax}$
Logaritmo base a	$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
Logaritmo natural (logaritmo base e)	$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$

Tabla 12. Funciones especiales y sus reglas de derivación.

Por ejemplo, considere las funciones:

- $q(x) = 2x^5 - 5x^{-2} + 10$. Para derivarla, se utilizará la regla de la constante, de la potencia y la linealidad de la derivada (Ver **Tabla 11**)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} (2x^5 - 5x^{-2} + 10) &= \frac{d}{dx} (2x^5) + \frac{d}{dx} (-5x^{-2}) + \underbrace{\frac{d}{dx} (10)}_{=0} \\
 &= 2 \frac{d}{dx} (x^5) - 5 \frac{d}{dx} (x^{-2}) \\
 &= 2(5x^4) - 5(-2x^{-3}).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $q'(x) = 10(x^4 + x^{-3})$.

- $a(x) = e^{p(x)}$, para alguna función $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Para derivar a la función $a(x)$, se identifica que hay dos funciones involucradas: $b(x) = e^x$ y $p(x)$. La regla de composición es

$$a(x) = b(p(x)),$$

Note que la función que está más “adentro” de la expresión mostrada es el polinomio $p(x)$, pues es la primera en evaluarse; seguida de la función exponencial $b(x)$. Con la regla de la cadena se escribe la derivada de $a(x)$ como:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dx} &= \frac{d}{dx} [b(p(x))] \\
 &= b'(p(x)) \cdot p'(x).
 \end{aligned}$$

Como $\frac{d}{dx}e^x = e^x$ y $\frac{dp}{dx} = p'(x)$, se escribe $a'(x) = p'(x) \cdot e^{p(x)}$.

- Sea $p(x) = \sin(x)$, como $\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$, entonces se puede escribir la función $a(x) = e^{\sin(x)}$ y su derivada:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dx} &= p'(x) \cdot e^{p(x)} \\ &= \left(\frac{d}{dx}\sin(x)\right) \cdot e^{\sin(x)} \\ &= \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}.\end{aligned}$$

- Ahora, sea $p(x) = 2x^2 + 1$, entonces $\frac{dp}{dx} = 4x$, luego $a(x) = e^{2x^2+1}$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{da}{dx} &= p'(x) \cdot e^{p(x)} \\ &= \frac{dp}{dx} \cdot e^{2x^2+1} \\ &= 4x \cdot e^{2x^2+1}.\end{aligned}$$

En general, cuando se deriva una función escrita como composición de otras funciones, es indispensable identificar las funciones involucradas, de tal forma de aplicar la regla de la cadena; posterior a dicha regla, se procede a aplicar las demás reglas de derivación. Para dominar dichas reglas, es necesario practicar con diferentes tipos de funciones

Una aplicación común de las derivadas o razones de cambio consiste en encontrar qué tanto cambia una cantidad respecto a su variable o a qué ritmo lo hace. Considere el siguiente ejemplo.

El fenómeno de la *radioactividad* fue descubierto por *Antoine Henri Becquerel* (1852 - 1908) en 1896, observando que las sales de uranio emiten radiación espontáneamente, a esta radiación se le conoció como rayos de Becquerel. Posteriormente, *Manya Skłodowska*, o mejor conocida como *Marie Curie* (1867 - 1934), junto con su esposo *Pierre Curie* (1859 - 1906) estudiaron los rayos de Becquerel del Uranio (U) contenido en un mineral de nombre *pechblenda* (UO₂); de esta forma lograron extraer dos elementos químicos desconocidos para la época: el Polonio (Po) y el Radio (Ra), ambos más *radioactivos* que el Uranio. Actualmente, se sabe que la *radioactividad*, o *desintegración radiactiva*, se debe a que los *núcleos atómicos inestables* pierden energía al emitir *radiación*.

En un material radioactivo, la cantidad de núcleos inestables está dada por la función $N(t)$, donde t es el tiempo, esto es, dicha función dictamina cuantos núcleos radioactivos se encuentran presentes dentro de un material en un instante determinado. Entonces, el *ritmo (o velocidad) de la desintegración radiactiva* corresponde al cambio en la cantidad de núcleos radioactivos respecto al tiempo, lo cual se representa con la expresión

$$\frac{dN}{dt}.$$

Mediante experimentos se ha comprobado que el ritmo al que ocurre la desintegración de los núcleos atómicos es negativo, esto se debe a que el núcleo está perdiendo energía, es decir,

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N(t) < 0,$$

donde λ es una constante de proporcionalidad; entonces $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ con N_0 la cantidad inicial de núcleos inestables.

Uno de los principales núcleos inestables que ha ayudado al desarrollo del conocimiento arqueológico y geológico es el *Carbono 14* (^{14}C), pues con su ayuda es posible conocer la antigüedad de los organismos fósiles que vivieron en el planeta. Las investigaciones proponen que la función que modela la desintegración radiactiva del ^{14}C está dada por

$$C(t) = c_0 \cdot e^{-0.000121 \cdot t},$$

donde el tiempo t se mide en años y c_0 es la cantidad inicial de átomos de ^{14}C , el cual depende de cada organismo o material orgánico. Mediante experimentos, es posible saber cuántos átomos de ^{14}C tiene un fósil y, de esta forma, conocer su antigüedad.

Si un fósil contiene el 66.82% de ^{14}C (contiene lo equivalente al 66.82% de c_0) se puede escribir la relación: $C(t) = 0.6682 \cdot c_0$, pues $C(t)$ representa la cantidad de ^{14}C . Entonces, de la definición de la función $C(t)$ se escribe

$$0.6682 \cdot c_0 = c_0 \cdot e^{-0.000121 \cdot t}.$$

Eliminando c_0 y considerando que $\ln(0.6682) = -0.403168$ y $\ln(e^{-a \cdot t}) = -a \cdot t$ se obtiene la antigüedad del fósil: $t = 3\,331.96$ años. Ahora, como

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{d}{dt}(c_0 \cdot e^{-0.000121 \cdot t}) \\ &= c_0 \frac{d}{dt}(e^{-0.000121 \cdot t}) \\ &= -0.000121 \cdot c_0 \cdot e^{-0.000121 \cdot t} = -0.000121 \cdot C(t), \end{aligned}$$

se puede afirmar que el ritmo de la desintegración es

$$\begin{aligned} \left. \frac{dC}{dt} \right|_{t=3331.96} &= -0.000121 \cdot C(3\,331.96) \\ &= -0.000121 \cdot 0.6682 \cdot c_0 \\ &= -8.08 \times 10^{-5} c_0. \end{aligned}$$

Con experimentos se encontró que la cantidad inicial de ^{14}C en el fósil es $c_0 = 6 \times 10^{26}$, entonces

$$\frac{dC}{dt} = (-8.08 \times 10^{-5})(6 \times 10^{26}) \approx -49 \times 10^{21} \frac{\text{átomos}}{\text{año}};$$

esto significa que, por cada año que pasa, el fósil pierde 49×10^{21} átomos.

1.26 Puntos críticos de una función

Dada una función $f: A \subset \text{Dom}_f \rightarrow \mathbb{R}$ con A un subconjunto del dominio de f . Se dice que $x \in A$ es un punto **máximo** de f en A si $f(x) \geq f(y)$ para todo $y \in A$, entonces el número $f(x)$ es el valor máximo de f en A . Análogamente, $z \in A$ es un punto **mínimo** de f en A si $f(z) \leq f(y)$ para todo $y \in A$, en este caso el número $f(z)$ es el valor mínimo de f en A . En ambos casos se cumple que $f'(x) = 0$, sin embargo, existen otros puntos que no son ni máximos o mínimos que lo cumplen. De forma general, un punto crítico de una función f es un número x tal que $f'(x) = 0$, siendo este último número el valor crítico de f . Esto motiva el siguiente resultado.

Teorema. Supóngase que $f'(a) = 0$. Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en a ; por el contrario, si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo local en a .

En consecuencia, se puede escribir el siguiente resultado.

Teorema. Supóngase que $f''(a)$ existe. Si f tiene un mínimo local en a , entonces $f''(a) \geq 0$; si f tiene un máximo local en a , entonces $f''(a) \leq 0$.

Los resultados anteriores permiten establecer el criterio de la segunda derivada para hallar los puntos críticos de una función y, más aún, sus valores. El procedimiento es el siguiente

- I. Dada una función $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se obtiene su primera y segunda derivada, es decir, $f'(x)$ y $f''(x)$.
- II. Se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$, para encontrar los puntos críticos de la función.
- III. Se evalúa la segunda derivada de f en los puntos críticos, es decir, si $a \in A$ es un punto crítico, se calcula $f''(a)$.
 - Si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un **mínimo** local en $a \in A$.
 - Si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un **máximo** local en $a \in A$.
- IV. Las coordenadas de los valores críticos de la función están dados por $(a, f(a))$, se encuentran sobre la gráfica de la función, es decir, $(a, f(a)) \in \text{Graf}_f$.

Por ejemplo, considere las funciones mostradas previamente.

- $f(x) = x^2 - 1$ (Ver **Ilustración 37**).
 - $f'(x) = 2x$ y $f''(x) = 2$.
 - El punto crítico de la función satisface $f'(x) = 0$, es decir, $2x = 0$, por lo que $x = 0$ es el punto crítico de la función.
 - Por lo tanto, $f(0) = 2(0)^2 - 1 = -1$ es el valor crítico de la función y este representa un mínimo debido a que $f''(0) = 2 > 0$.
 - El mínimo tiene coordenadas $(0, -1)$.
- $k(x) = x^5$ (Ver **Ilustración 38**).
 - $k'(x) = 5x^4$ y $k''(x) = 20x^3$.
 - Sus puntos críticos se obtienen con la ecuación $k'(x) = 0$, esto es, $5x^4 = 0$, siendo $x = 0$ el único punto crítico de la función. Como $k''(0) = 0$, no se trata de un máximo ni de un mínimo, este se conoce como punto de inflexión. El valor crítico es $k(0) = 0$.
 - El punto de inflexión tiene coordenadas $(0, 0)$.

Además, considere el siguiente polinomio.

- $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
 - $g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ y $g''(x) = 6x - 12$.
 - Los puntos críticos de la función satisfacen $g'(x) = 0$, es decir, $3(x-1)(x-3) = 0$; por lo que $x_1 = 1$ y $x_2 = 3$ son los puntos buscados.
 - $g''(x_1) = 6(1) - 12 < 0$, por lo que $(x_1, g(x_1))$ es un máximo de la función, donde $g(x_1) = g(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) + 1 = 5$.
 - $g''(x_2) = 6(3) - 12 > 0$, por lo que $(x_2, g(x_2))$ es un mínimo de la función, donde $g(x_2) = g(3) = (3)^3 - 6(3)^2 + 9(3) + 1 = 1$.

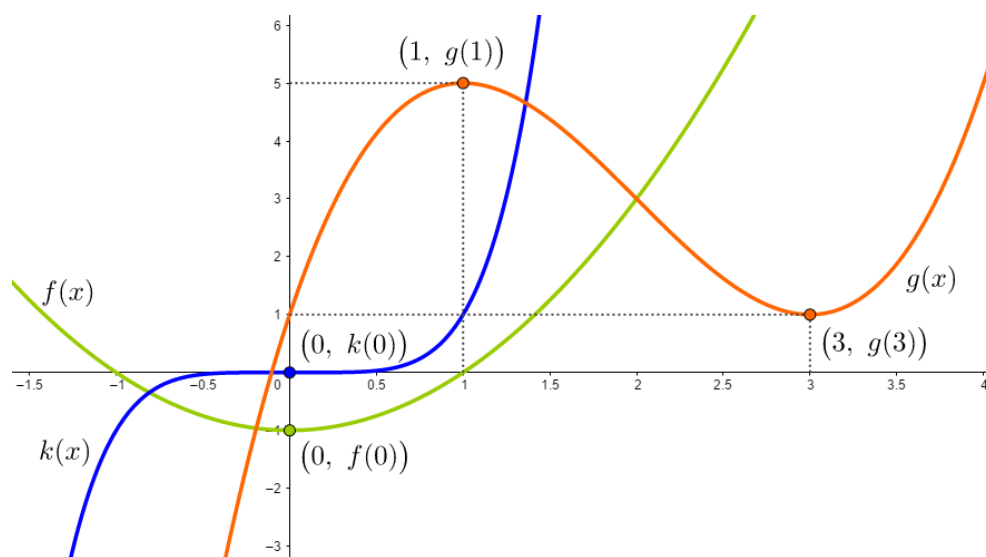


Ilustración 42. Se muestran los puntos críticos de las funciones $f(x) = x^2 - 1$, $k(x) = x^5$ y $g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.

1.27 Cálculo integral

La definición formal de integral nace a partir de la necesidad de calcular el área bajo la gráfica de una función $f(x) \geq 0$, esto se consigue por medio de una agrupación de rectángulos que cubren parcialmente dicha área (**verdes**) y rectángulos que la sobrepasan (**grises**). Sumando las áreas de los rectángulos verdes se obtiene la cantidad L , conocida como **suma inferior**, mientras que al sumar los rectángulos grises se obtiene la cantidad U , conocida como **suma superior**, ambas dependen del número de rectángulos que se construyan, del intervalo $[a, b]$ y de la función.

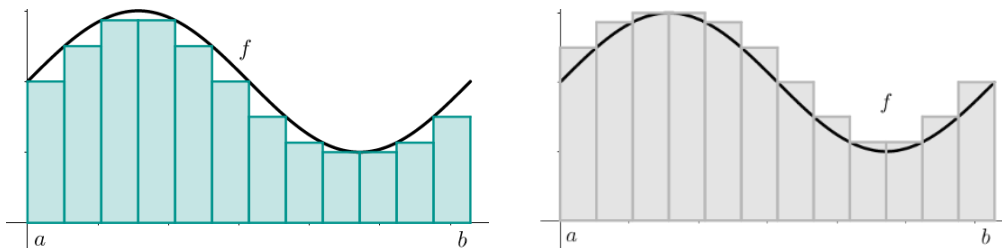


Ilustración 43. Suma inferior L (izquierda) y suma superior U (derecha), satisfacen la desigualdad $L \leq \int_a^b f(x) dx \leq U$.

Conforme se van integrando más rectángulos a cada agrupación, los números L y U se van aproximando a un número particular, a dicho número se le denomina la **integral de f en $[a, b]$** y se representa mediante

$$\int_a^b f(x) dx,$$

también se conoce como **integral definida en el intervalo $[a, b]$** . El símbolo $\int$ se conoce como **signo integral**, originalmente se escribió como una “S” alargada que significaba suma; a los números a y b se les conoce como **límites de integración inferior y superior** respectivamente. Cuando $f(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, la integral $\int_a^b f(x) dx$ representa el **área bajo la curva**.

Además, la integral y la derivada de una función están relacionadas mediante la antiderivada F de una función f mediante de la ecuación $F(x) + c = \int f(x) dx$, o desde otra perspectiva $\frac{dF}{dx} = f(x)$. Esta relación nace a partir de los siguientes resultados.

Teorema (Primer teorema fundamental del cálculo). Sea f integrable en $[a, b]$, se define F en $[a, b]$ mediante $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Si f es continua en $c \in [a, b]$, entonces F es diferenciable en c , y $F'(c) = f(c)$.

Teorema (Segundo teorema fundamental del cálculo). Si f es integrable en $[a, b]$ y $f = F'$ para alguna función F , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Al igual que la derivada, la integral tiene muchas reglas y fórmulas útiles para su resolución, las siguientes tablas contienen algunas de ellas.

Nombre	Integral
Regla de la constante	Dado un número $a \in \mathbb{R}$, $\int a \, dx = ax + c$
Regla de la potencia	Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\int x^n \, dx = \left(\frac{1}{n+1}\right) \cdot x^{n+1} + c$
Regla del radical	Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces $\int x^{\frac{1}{n}} \, dx = \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot x^{\frac{1}{n}+1} + c$
Linealidad de la integral	Si $a \in \mathbb{R}$ y además $f, g; \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\int a \cdot f(x) \pm g(x) \, dx = a \cdot \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$
Cambio de límites de integración	Si $a < b$, se cumple $\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$
Separación de los límites de integración	Para $a < c < b$ números reales, $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$

Tabla 13. Integrales básicas

Funciones	Integral
Trigonómicas	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c, \quad \int \sin(x) dx = -\cos(x) + c, \quad \int \tan(x) dx = -\ln \cos(x) + c,$ $\int \sec(x) dx = \ln \sec(x) + \tan(x) + c, \quad \int \csc(x) dx = \ln \csc(x) - \cot(x) + c,$ $\int \cot(x) dx = \ln \sin(x) + c.$
Exponencial de b	Para dos números cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ $\int b^{ax} dx = \frac{1}{a \cdot \ln(b)} \cdot b^{ax} + c$
Función exponencial	En particular, si $b = e$ $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$
Logaritmo base a	$\int \log_a(x) dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot x \cdot (\ln(x) - 1) + c$
Definición de logaritmo natural	$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x)$
Logaritmo natural (logaritmo base e)	$\int \ln(x) dx = x \cdot (\ln(x) - 1) + c$

Tabla 14. Reglas de integración para funciones particulares.

Los libros de cálculo diferencial e integral contienen una serie de reglas y fórmulas que no se muestran aquí, para más detalles sobre éstas consulte la bibliografía sugerida al final.

En la práctica se emplean los siguientes resultados.

Teorema (La fórmula de sustitución). Si f y g' son funciones continuas, entonces

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g) \cdot g',$$

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx,$$

con $u = g(x)$.

El cual se emplea para resolver la integral de una función compuesta, como $f(x) = \sqrt{3x^3 + 2x}$. Por otro lado, el siguiente resultado es útil cuando se requiere integrar una función que es producto de otras dos.

Teorema (Integración por partes). Si f' y g son funciones continuas, entonces

$$\int f \cdot g' = f \cdot g - \int f' \cdot g,$$

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx,$$

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx.$$

Por ejemplo, considere las funciones $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ y $g(x) = x \cdot \sqrt[3]{x+5}$.

- Para calcular $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ se usa el método de cambio de variable.
 - Se define $u(x) = x^2 + 1$, entonces $du = 2x dx$.
 - Los elementos que aparecen en $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ son:

$$\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{u}, \quad x = \sqrt{u-1}, \quad dx = \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2\sqrt{u-1}} du.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \int \frac{\sqrt{u-1}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{u-1}} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du, \end{aligned}$$

aplicando la regla de la potencia se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int u^{-\frac{1}{2}} du &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\frac{1}{2}+1} \right) u^{-\frac{1}{2}+1} \\ &= u^{\frac{1}{2}} + c. \end{aligned}$$

Finalmente, se sustituye $u = x^2 + 1$, para obtener

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + c.$$

- Sea $g(x) = x\sqrt[3]{x+5}$ definida en el intervalo $[0, 1]$. Para calcular su integral se realiza el cambio de variable y , posteriormente, se emplea el segundo teorema fundamental del cálculo.
 - Se define $u(x) = \sqrt[3]{x+5} = (x+5)^{\frac{1}{3}}$, se tiene $x = u^3 + 5$. Entonces $dx = 3u^2 du$.
 - Los elementos que aparecen en $\int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x+5} dx$ son $x = u^3 + 5$, $\sqrt[3]{x+5} = u$ y $dx = 3u^2 du$.

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x+5} dx &= \int_{u(0)}^{u(1)} (u^3 + 5) \cdot u \cdot 3u^2 du \\ &= \int_{u(0)}^{u(1)} 3u^6 + 15u^3 du, \end{aligned}$$

aplicando la linealidad de la integral y la regla de la potencia se obtiene la integral en términos de u

$$\begin{aligned} \int_{u(0)}^{u(1)} 3u^6 + 15u^3 du &= 3 \int_{u(0)}^{u(1)} u^6 du + 15 \int_0^1 u^3 du \\ &= 3 \left(\frac{1}{6+1} \right) u^{6+1} \Big|_{u(0)}^{u(1)} + 15 \left(\frac{1}{3+1} \right) u^{3+1} \Big|_{u(0)}^{u(1)} \\ &= \frac{3}{7} u^7 \Big|_{u(0)}^{u(1)} + \frac{15}{4} u^4 \Big|_{u(0)}^{u(1)}. \end{aligned}$$

En este punto, se puede proceder de dos formas:

- a. Se calcula $u(0) = \sqrt[3]{5}$ y $u(1) = \sqrt[3]{6}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{u(0)}^{u(1)} 3u^6 + 15u^3 du &= \frac{3}{7} u^7 \Big|_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt[3]{6}} + \frac{15}{4} u^4 \Big|_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt[3]{6}} \\ &= \frac{3}{7} \left(6^{\frac{7}{3}} - 5^{\frac{7}{3}} \right) + \frac{15}{4} \left(6^{\frac{4}{3}} - 5^{\frac{4}{3}} \right) \\ &\approx 18.54. \end{aligned}$$

- b. Se sustituye el valor de $u = (x+5)^{\frac{1}{3}}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x+5} dx &= \frac{3}{7} (x+5)^{\frac{7}{3}} \Big|_0^1 + \frac{15}{4} (x+5)^{\frac{4}{3}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{3}{7} \left((1+5)^{\frac{7}{3}} - (0+5)^{\frac{7}{3}} \right) + \frac{15}{4} \left((1+5)^{\frac{4}{3}} - (0+5)^{\frac{4}{3}} \right) \\ &= \frac{3}{7} \left(6^{\frac{7}{3}} - 5^{\frac{7}{3}} \right) + \frac{15}{4} \left(6^{\frac{4}{3}} - 5^{\frac{4}{3}} \right) \approx 18.54. \end{aligned}$$

Note que el procedimiento mostrado en el inciso b. es más largo, pues se realiza nuevamente un cambio de variable (de u a x) para regresar a la variable original (x) y así usar el segundo teorema fundamental del cálculo. Sin embargo, en el primer desarrollo se substituyó directamente sobre la variable u , lo cual ayudó a acortar el número de pasos para llegar al resultado. En resumen, se cumple la igualdad

$$\int_0^1 x \cdot \sqrt[3]{x+5} \, dx \quad u(x)=\sqrt[3]{x+5} \quad \cong \quad \int_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt[3]{6}} 3u^6 + 15u^3 \, du.$$

Para más información sobre los demás métodos de integración, consulte los libros de cálculo de las lecturas recomendadas al final. Considere el siguiente ejemplo.

Las *estrellas* son uno de los principales objetos de estudio de la astrofísica, se encuentran a miles de kilómetros de la tierra, son objetos muy luminosos y se pueden representar matemáticamente como una esfera. Están compuestas de fluido caliente, donde sus fuerzas de gravedad y de presión se encuentran en *equilibrio hidrostático*. Su estructura se encuentra en constante cambio debido a diferentes factures, como su evolución o el medio interestelar.

Los astrofísicos modelan las estrellas con funciones termodinámicas que dependen de su coordenada radial r (medida en m), la cual toma valores desde el cero (centro de la estrella) hasta un número R (que representa el radio de la estrella). Una de estas funciones es la densidad de materia (denotada por ρ) y representa la cantidad de materia por cada unidad de volumen (en unidades convencionales $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$):

$$\rho: [0, R] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

que se define con ayuda de diferentes modelos astrofísicos. Para inferir la cantidad de masa que tiene una estrella (medida en kg) se puede emplear una *integral definida* que toma valores desde $r = 0$ hasta $r = R$, esto es

$$M = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) \, dr.$$

Supóngase que una estrella de radio R tiene densidad constante, es decir, $\rho_c(r) = c$ para todo $r \in [0, R]$. Entonces, su masa se puede calcular de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} M_c &= 4\pi \int_0^R r^2 \rho_c(r) \, dr \\ &= 4\pi c \int_0^R r^2 \, dr \\ &= 4\pi c \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^R \right), \end{aligned}$$

y con ayuda del segundo teorema fundamental del cálculo se obtiene el resultado:

$$M_c = 4\pi c \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^R \right) = \frac{4\pi c}{3} (R^3 - 0^3) = \frac{4\pi c}{3} R^3.$$

1.28 Estadística

1.28.1 Elementos de la estadística

Un evento o experimento es *aleatorio* si al repetirlo en condiciones análogas no se puede predecir el resultado; en caso contrario, el experimento es *determinista*. Por ejemplo:

- Lanzar una moneda y sacar un naipe de una baraja son eventos aleatorios;

- Al medir la temperatura del agua en ebullición a nivel del mar se obtendrá siempre el mismo valor, aproximadamente 100 °C, por lo que se trata de un experimento determinista.

La *estadística* es el estudio de *fenómenos aleatorios*, lo cual hace que tenga una amplia gama de aplicaciones, como en las ciencias, la ingeniería, la medicina, la economía, etc. El objetivo primordial de la estadística es obtener conclusiones a partir de datos o hechos resultantes de un experimento, a esto se le conoce como *inferencia estadística*. Es utilizada para realizar predicciones útiles en la toma de decisiones basadas en los datos recopilados. Por ejemplo, a partir de encuestas, las empresas pueden hacer inferencias en toda una población para obtener información relevante de sus productos que ofrecen.

La inferencia estadística implica analizar una *población* específica. Para llevar a cabo este proceso, se selecciona una *muestra representativa* de esa población en la que se llevará a cabo el experimento. Esta muestra es un subconjunto de la población. Antes de realizar el experimento, es importante definir qué se va a *medir* o investigar, es decir, hay que determinar las *variables de estudio*.

Las variables son características que los miembros de la población poseen y que se quieren examinar. Los resultados de las mediciones u observaciones se denominan *datos*, y su organización depende de la variable en cuestión y de cómo se lleva a cabo el experimento. Por último, para facilitar la interpretación de los datos, se utilizan *tablas de frecuencia* y *diagramas gráficos* que simplifican esta tarea.

Las variables se clasifican en dos grupos, las *cualitativas* (o *categorías*) y las variables *cuantitativas*.

- Las variables *cualitativas* no adoptan valores numéricos y pueden ser *ordinales* o *no ordinales*, esto sí dependen de un orden establecido o no. Por ejemplo:
 - Al realizar una encuesta de satisfacción se pueden encontrar *calificaciones* como variable, las cuales se contestan con Malo, Regular, Bueno, Excelente. Son variables *ordinales*, pues tienen un orden preestablecido.
 - Si se pregunta el *sabor favorito de helado* se considera variable cualitativa *no ordinal*, algunas de sus respuestas serían: Sandía, Limón, Chocolate, etcétera.
- Las variables *cuantitativas* adoptan valores numéricos y pueden ser *discretas* o *continuas*, por ejemplo:
 - La *cantidad de mascotas* que posee una persona es una variable cualitativa *discreta*, pues solo podría contestar con un número natural ($\mathbb{N}$).
 - La *estatura*, el *peso*, el *índice de masa corporal*, etc. se consideran variables cuantitativas *continuas*, pues se contestan con números que pueden contener varios decimales.

Para analizar los datos obtenidos en un experimento se utiliza una tabla de frecuencias o *distribución de frecuencias*. Considere un conjunto de n observaciones, las cuales fueron obtenidas después de realizar un experimento. Supóngase que dichos datos están clasificados en diferentes categorías. Se define lo siguiente

- El número de individuos de la i -ésima categoría se denota por n_i y se denomina *frecuencia absoluta*.
 - La *frecuencia relativa*, denotada por f_i es la proporción dada por el cociente de la frecuencia absoluta de la i -ésima categoría y el total de observaciones, es decir

$$f_i = \frac{n_i}{n}.$$

- El número de individuos acumulado hasta la categoría i se conoce como *frecuencia acumulada* o *frecuencia absoluta acumulada* y está dada por

$$N_i = n_1 + n_2 + \cdots + n_{i-1} + n_i.$$

- La *frecuencia relativa acumulada*, denotada por F_i está dada por el cociente de la frecuencia acumulada de la i -ésima categoría con el total de observaciones, esto es,

$$F_i = \frac{N_i}{n}.$$

En las distribuciones de frecuencias se puede observar el comportamiento de las variables de estudio a partir de las categorías definidas para ello. Por ejemplo, considere la siguiente situación.

Los *alumnos deportistas* de una universidad desean obtener mejores resultados, para ello se les hará una serie de análisis médicos. Los resultados proporcionarán herramientas a los entrenadores para que tomen decisiones encaminadas a un mejor rendimiento deportivo de los alumnos. Los análisis consisten en medir, tanto en hombres como en mujeres, *el porcentaje de masa muscular, el porcentaje de grasa en el cuerpo, el nivel de colesterol en sangre y su nivel de satisfacción dentro del equipo*. Para ello, se convocó a 20 deportistas de cada uno de los siguientes deportes: *fútbol, atletismo, natación y rugby*.

Los elementos estadísticos involucrados son los siguientes

- La población está compuesta por los alumnos deportistas de la universidad
- La muestra son los 20 alumnos convocados de cada deporte, 80 en total
- Las variables de estudio son
 - Cualitativas: el sexo de los deportistas, ya que tiene dos posibles valores (Hombre o Mujer) y es no ordinal; el nivel de estudios de cada deportista (bachillerato, licenciatura, etc.) es ordinal; el nivel de satisfacción dentro del equipo es de tipo ordinal.
 - Cuantitativas: el porcentaje de masa muscular, el porcentaje de grasa del cuerpo y el nivel de colesterol en sangre.

Posterior a la medición del colesterol en sangre, los datos obtenidos se agruparon en la *distribución de frecuencias* mostrada en la **Tabla 15**. A partir de estos datos se puede afirmar que un 94% ($F_4 = 0.941$) de individuos a los que se les realizó la prueba tiene un nivel de colesterol inferior a $270 \frac{\text{mg}}{100 \text{ mL}}$.

Nivel de colesterol (mg/100 mL)	Frecuencia absoluta n_i	Frecuencia relativa f_i	Frecuencia absoluta acumulada N_i	Frecuencia relativa acumulada F_i
150 a 180	10	0.083	10	0.083
180 a 210	36	0.300	46	0.383
210 a 240	42	0.350	88	0.733
240 a 270	25	0.208	113	0.942
270 a 300	7	0.058	120	1.000

Tabla 15. Distribución de frecuencias de la variable *nivel de colesterol en sangre*, agrupadas en diferentes rangos. 10 personas tienen un nivel de colesterol de 150 a $180 \frac{\text{mg}}{100 \text{ mL}}$ ($n_1 = 10$), y estos representan un 8.3% de los datos ($f_1 = 0.083$).

Esta información permite construir el siguiente *histograma*.

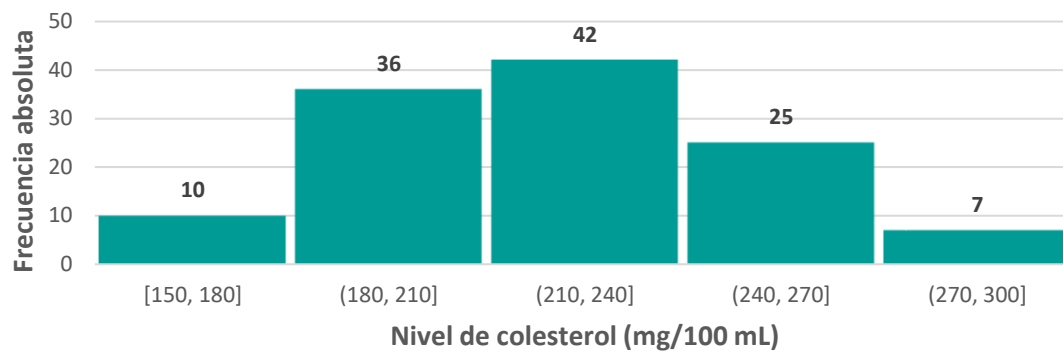


Ilustración 44. El eje vertical muestra los intervalos sobre los cuales se realizó en análisis; mientras que el eje vertical muestra la cantidad de personas que tienen su nivel de colesterol dentro de los valores de dichos intervalos.

1.28.2 Medidas de tendencia central y dispersión

Cuando se tienen variables cuantitativas se puede realizar un análisis más profundo con ayuda de las *medidas de tendencia central* y las *medidas de dispersión*. Las medidas de tendencia central dan información sobre la posición o localización de los datos observados: son la *media*, la *mediana* y la *moda*. Mientras que las medidas de dispersión dicen que tan dispersos están los datos o que tanta variabilidad poseen; son la *varianza* y la *desviación estándar*, por mencionar algunas.

Considere un conjunto de n observaciones con valores $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, entonces:

- La *media* de las observaciones es su promedio aritmético, denotado por $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} x_i.$$

- La *mediana* de las observaciones es el valor para el cual, cuando todas las observaciones se ordenan de manera creciente, la mitad de éstas es menor que este valor y la otra mitad mayor. Si n es impar, entonces la mediana es el valor de las observaciones que se encuentra a la mitad del conjunto ordenado. Si n es par, la mediana es el promedio aritmético de los valores de las dos observaciones que se encuentran a la mitad del conjunto, previamente ordenado de forma creciente.
- La *moda* de las observaciones es el valor que ocurre con mayor frecuencia, es decir, el valor que se observó más veces en el experimento.
- La *varianza* de las observaciones, denotada por S , corresponde al promedio de los cuadrados de las distancias entre cada observación y la media del conjunto de observaciones:

$$S = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

- La *desviación estándar* de las observaciones, denotada por σ , corresponde a la raíz cuadrada positiva de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

La varianza y la desviación estándar están relacionadas mediante la relación $S = \sigma^2$. Por otro lado, en ambas cantidades se expone la fórmula para una muestra, cuando se quiera calcular la varianza poblacional o desviación estándar poblacional se toma n en lugar de $n - 1$. A continuación, se muestran dos ejemplos para calcular las medidas de tendencia central y las medidas de dispersión.

- Un futbolista jugó 15 partidos en el torneo de apertura 2023, donde los minutos de cada uno son los siguientes: 64, 54, 82, 76, 75, 90, 64, 55, 71, 69, 73, 78, 74, 80, 75.

- Los datos ordenados de forma ascendente son:

54, 55, 64, 64, 69, 71, 73, 74, 75, 75, 76, 78, 80, 82, 90.

- La media aritmética representa el tiempo promedio que jugó durante un partido del torneo, está dada por:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{15} (64 + 54 + 82 + 76 + 75 + 90 + 64 + 55 + 71 + 69 + 73 + 78 \\ &\quad + 74 + 80 + 75) = \frac{1\,080}{15} = 72. \end{aligned}$$

- Para la mediana se considera el conjunto de datos ordenados, como el número de datos es impar, solo se toma el valor central, por lo que la mediana es 74.
- Se puede observar que 64 y 75 se repiten dos veces, entonces la moda corresponde al conjunto {64, 75}.

- Una reserva ecológica tropical alberga dos poblaciones de anfibios: las ranas de árbol (*Hylidae*) y las ranas dardo venenosas (*Dendrobatidae*). A cada miembro de las poblaciones se les midió el peso (g): los datos de seis ranas de árbol son 8, 12, 9, 13, 7 y 11; mientras que el peso de siete ranas venenosas es 4, 5, 3, 6, 4, 2 y 4.

- Para calcular las medidas de dispersión, es necesario conocer la media aritmética de cada población de ranas.

$$\bar{x}_A = \frac{1}{12} (8 + 12 + 9 + 13 + 7 + 10) = \frac{60}{6} = 10,$$

$$\bar{x}_{DV} = \frac{1}{13} (4 + 5 + 3 + 6 + 4 + 2 + 4) = \frac{28}{7} = 4.$$

- Se toma la fórmula muestral de la varianza.

- Para las ranas árbol:

$$\begin{aligned} S_A &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_A)^2 \\ &= \frac{(8-10)^2 + (12-10)^2 + (9-10)^2 + (13-10)^2 + (7-10)^2 + (10-10)^2}{6-1} \\ &= \frac{(-2)^2 + (2)^2 + (-1)^2 + (3)^2 + (-3)^2}{5} = \frac{4+4+1+9+9}{5} = \frac{28}{5} = 5.6. \end{aligned}$$

- Para las ranas dardo venenosas:

$$\begin{aligned} S_{DV} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_{DV})^2 \\ &= \frac{(4-4)^2 + (5-4)^2 + (3-4)^2 + (6-4)^2 + (4-4)^2 + (2-4)^2 + (4-4)^2}{7-1} \\ &= \frac{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2 + (-2)^2}{6} = \frac{1+1+4+4}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} = 1.\bar{6}. \end{aligned}$$

- Dada la ecuación $S = \sigma^2$, es posible calcular la desviación estándar.

- Para las ranas árbol:
 $\sigma_A = \sqrt{S_A} = \sqrt{5.6} \approx 2.37.$
- Para las ranas dardo venenosas:
 $\sigma_{DV} = \sqrt{S_A} = \sqrt{1.6} \approx 1.29.$

En conclusión, se puede observar que la población de ranas de árbol tiene una varianza más grande, esto significa que las ranas de esta población cubren un rango más amplio de pesos; por el contrario, las ranas dardo venenosas, al tener un valor de varianza más pequeño, se traduce en que todas tienen pesos muy parecidos.

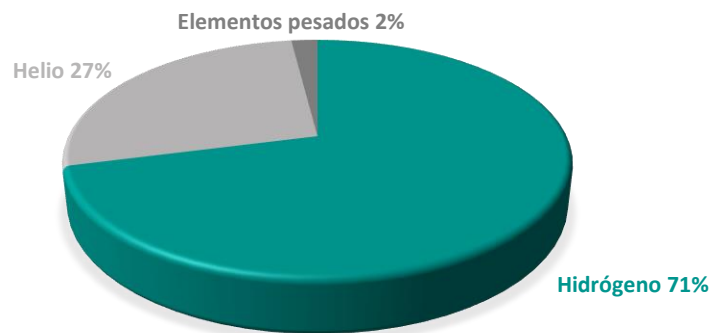
1.28.3 Gráficos estadísticos

Los datos obtenidos en una distribución de frecuencias se visualizan con ayuda de diferentes *gráficos estadísticos*, es decir, también contribuyen a la comprensión de los fenómenos aleatorios estudiados. Los hay de varios tipos: *diagramas de sectores* (o gráficas de pastel), *gráficos de barras*, *gráficos de dispersión*, *histogramas* y *diagramas de cajas y bigotes*.

Los *diagramas de sectores* y de *barras* ayudan a visualizar frecuencias absolutas o relativas, principalmente con variables cualitativas, en casos donde las variables cuantitativas sean discretas y de pocos valores o variables cuantitativas continuas agrupadas en un número reducido de intervalos también son útiles. El *histograma* y el *diagrama de cajas y bigotes* contienen información sobre variables cuantitativas continuas, sin embargo, también ayudan a representar variables cuantitativas discretas con una gama de valores muy amplia. A continuación, se muestran algunos ejemplos.

- *Diagrama de sectores.*

El *Sol* está compuesto de los mismos elementos químicos que los demás planetas del sistema solar, sin embargo, no posee las mismas cantidades de estos. La composición del Sol es principalmente hidrógeno (H), con el 71% de su masa; seguido de helio (He), con un 27%; otros elementos más pesados como el oxígeno (O), carbono (C), nitrógeno (N), etcétera, juntan el 2% de la masa solar restante.

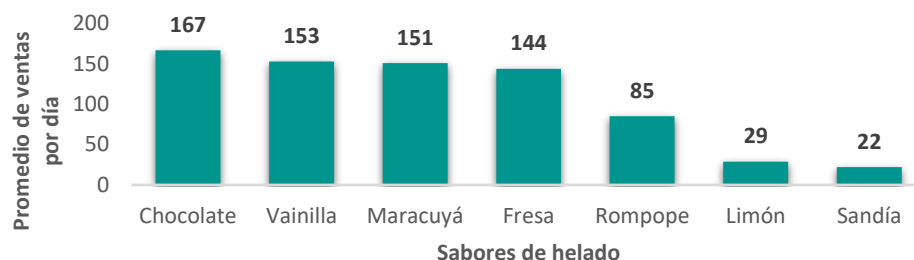


Los diagramas de sectores consisten en dividir un disco en tantas partes como sea necesario, de tal forma que el 100% de los datos corresponda a todo el disco y cada uno de los sectores contenga la proporción que le corresponda a cada variable. A diferencia de los demás gráficos estadísticos, estos no se acompañan de elementos como el eje vertical u horizontal.

Los segmentos del disco presentado tienen un tamaño proporcional a la cantidad de cada elemento que el Sol contiene, esto es, se puede apreciar la abundancia de los elementos químicos mencionados.

- **Gráfico de barras.**

Una heladería realizó un registro de ventas para conocer los sabores preferidos de sus clientes, se obtuvo el promedio diario de ventas de un mes para los sabores más vendidos.

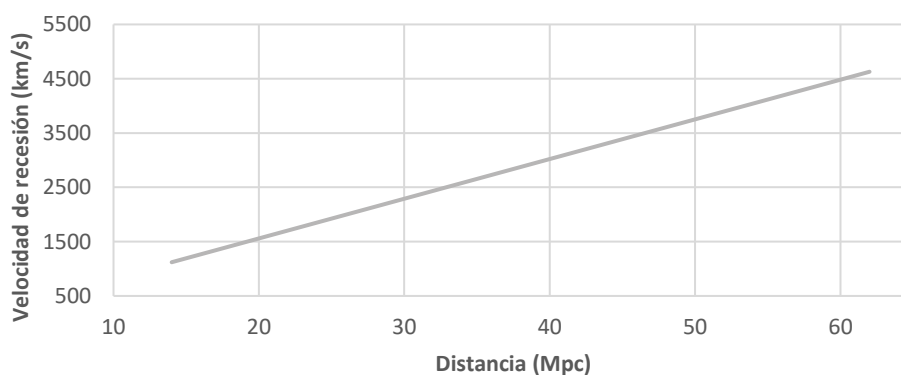


Los gráficos de barras pueden mostrar las frecuencias absolutas o relativas a partir de diferentes categorías. El eje horizontal contiene dichas categorías, mientras que el eje vertical marca la cantidad de veces que cada valor aparece en el estudio, donde la altura de la barra representa la frecuencia con la que aparecen.

El eje horizontal del gráfico anterior muestra los sabores ofrecidos por la heladería (variable cualitativa no ordinal) y el eje vertical marca el promedio de ventas. Se observa que el helado de chocolate se vende, en promedio, 167 veces por día; el helado de limón solo se vende 29 veces en un día, etcétera.

- **Gráfico de dispersión.**

La *Ley de Hubble-Lemaître* es una relación astronómica postulada por el astrónomo *Georges Lemaître* en 1927 y dos años más tarde por *Edwin Hubble*. Establece que *la velocidad a la que una galaxia se aleja de nosotros (km/s) es directamente proporcional a su distancia (Mpc)*. Esta ley ha tenido un impacto significativo en la cosmología, pues se infiere que el universo se está expandiendo aceleradamente.



En este tipo de gráficos se analiza la correlación en un conjunto de datos, cada punto del gráfico posee dos coordenadas, que son los valores de dos variables diferentes que pueden estar relacionadas.

En este caso, cada punto representa una galaxia, de las cuales se conoce la distancia (en mega parsec, Mpc, donde $1 \text{ Mpc} = 3.086 \times 10^{19} \text{ km}$) y la velocidad de alejamiento desde la tierra (km/s). La línea muestra la tendencia que siguen los datos en función de la distancia (la ecuación

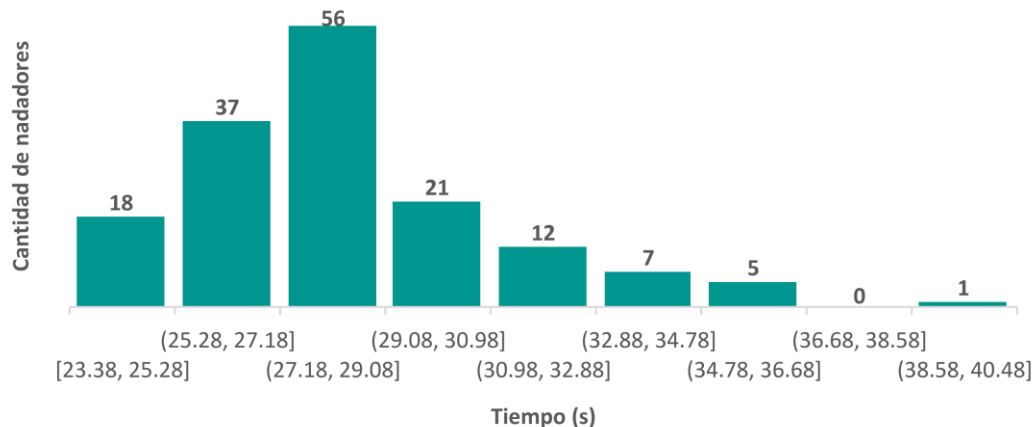
de la línea recta se puede obtener con métodos estadísticos. Para más información véase la bibliografía complementaria.). Se dice entonces que, estadísticamente, la velocidad de recesión de las galaxias depende linealmente de la distancia a la que se encuentran de nosotros y eso se puede ver mediante la relación

$$v(D) = H_0 \cdot D,$$

donde la pendiente de la recta es la constante de Hubble H_0 .

- **Histograma.**

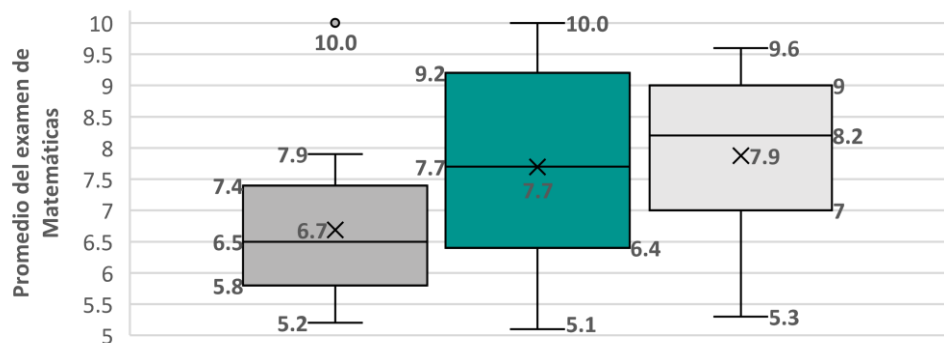
En la temporada 2023 de Curso Largo, se registró el tiempo (s) de 157 nadadores de la CDMX en la prueba de 50 m libres, donde se obtuvo el siguiente gráfico.



Un histograma contiene la distribución de las frecuencias sobre diferentes clases o intervalos. Sobre el eje horizontal del gráfico anterior se presentan los intervalos de tiempo en los que están distribuidos los datos; cada barra muestra la cantidad de nadadores que marco un tiempo dentro de dicho intervalo. Por ejemplo, 56 nadadores marcaron un tiempo mayor a 27.18 s, pero menor o igual a 29.08 s.

- **Diagrama de cajas y bigotes.**

Se compararon los promedios (1/10) de tres grupos diferentes que hicieron un examen de matemáticas, obteniendo lo siguiente.



Cada caja con bigotes representa un conjunto de datos; en cada caja se encuentra el 50% de todos los valores obtenidos, siendo la parte inferior de la caja el primer cuartil (Q_1) y la parte superior el tercer cuartil (Q_3); la línea (—) que divide la caja marca la mediana y la (X) marca la media de los datos. Por encima y por debajo de la caja se encuentran los bigotes, cada uno de ellos encierra el 25% de los datos superiores ($> q_3$) e inferiores ($< q_1$) respectivamente. Los valores atípicos se encuentran fuera del bigote.

Entonces, en el diagrama anterior, cada caja con bigotes representa un grupo de estudiantes, donde los datos que se exponen son los promedios. El grupo central tiene a su 50% de población con un promedio entre 6.4 y 9.2; mientras que el grupo de la izquierda tiene a su 50% de población con un promedio menor a 7.4 y mayor a 5.8, además tiene un único alumno con 10 de promedio.

1.29 Probabilidad

1.29.1 Conceptos de probabilidad

Ahora, recuérdese que se conoce como evento o experimento *aleatorio* a todo aquél en el que no están garantizados los mismos resultados a partir de las mismas *condiciones iniciales*, es decir, son experimentos en los cuales no se puede predecir el resultado, sin embargo, si se puede inferir qué opción es *más probable* que suceda. Los eventos o experimentos *deterministas* son aquellos en los cuales se garantiza el mismo resultado dadas las mismas condiciones iniciales.

La *probabilidad* es una rama de las matemáticas que describe y permite comprender los experimentos aleatorios o sujetos al azar. Cuantifica la ocurrencia de un suceso en un experimento, asociándole un número del 0 al 1, el cual se obtiene dividiendo el número de casos favorables (para que ocurra el suceso) entre el número total de casos (resultados posibles del experimento).

$$P = \frac{\text{Núm. de casos favorables para que ocurra un suceso}}{\text{Núm. de casos posibles en el experimento}} \leq 1.$$

1.29.2 Aplicación de la teoría de conjuntos al cálculo de probabilidades

Para entender los conceptos básicos de la probabilidad y analizar los eventos probabilísticos de manera precisa, es esencial conocer las nociones básicas de la *teoría de conjuntos*. Esta teoría ofrece las herramientas necesarias para organizar y relacionar los eventos, facilitando así un análisis más claro y efectivo de las interacciones entre ellos.

La teoría de conjuntos comprende aquella rama de las matemáticas, formulada por *Georg Cantor*, que estudia los *conjuntos*, sus propiedades y operaciones entre ellos, tales como la *unión*, *intersección*, *diferencia*, *complemento*, etc.

Intuitivamente, se dice que un conjunto es una *colección de objetos*, dichos objetos son los *elementos* del conjunto; un *subconjunto* es un conjunto en sí mismo que está contenido en otro conjunto. Cuando un conjunto no contiene elementos se dice que es el *conjunto vacío* ($\emptyset$) y, por formalidad matemática, se dice que el conjunto vacío es un elemento de cualquier conjunto. Respecto a la notación, un conjunto se denota con corchetes y sus elementos son aquellos que se encuentran dentro de dichos corchetes. Por ejemplo

- El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, contiene al 10 y 24, es decir, $10, 24 \in \mathbb{N}$; el conjunto de números impares $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$ también está contenido el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, esto es, $\{1, 3, 5, 7, \dots\} \subset \mathbb{N}$.
- La clasificación de los seres vivos es un proceso dinámico que ha evolucionado considerablemente a lo largo de la historia, y hasta la fecha no está completamente definida ni es unívoca. Diferentes enfoques y teorías han sido propuestos, lo que refleja la complejidad de los organismos y las interacciones entre ellos. Uno de los pioneros en este campo fue *Carl von Linné* (1707 - 1788), un naturalista sueco que revolucionó la taxonomía al introducir el sistema de nomenclatura binomial y establecer una *jerarquía taxonómica* organizada en *categorías* que van de lo general a lo particular: *Reino*, *Phylum*, *Clase*, *Orden*, *Familia*, *Género* y *Especie*. Esta estructura se convirtió en la base para la clasificación de los organismos y fue fundamental para el desarrollo de la biología moderna. En el siguiente diagrama se puede apreciar cómo se relacionan dichas categorías.

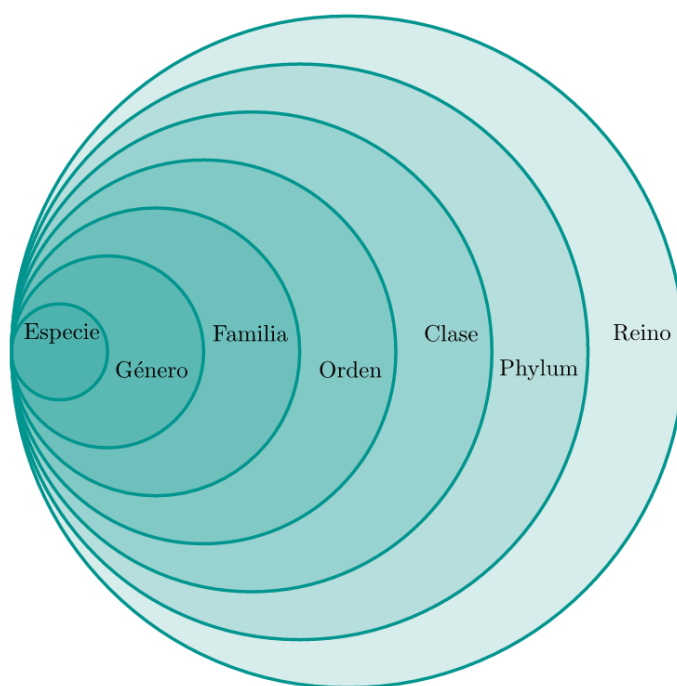


Ilustración 45. Diagrama de Venn de las categorías taxonómicas. En notación de la teoría de conjuntos se puede escribir $\{Especie\} \subset \{Género\} \subset \{Familia\} \subset \{Orden\} \subset \{Clase\} \subset \{Phylum\} \subset \{Reino\}$.

Los animales pertenecen al reino *Animalia*, el cual se divide en muchos Filos, como *Chordata*. En éste se encuentran varias clases, una de ellas se compone de los animales que poseen glándulas mamarias, conocido como clase *Mammalia*. Dentro de ella, se encuentra el orden de los animales carnívoros, denominado *Carnívora*, el cual contiene alrededor de 296 especies divididas en diferentes familias. A continuación, se muestran algunas de estas familias, con algunos de sus géneros y algunas de sus especies.

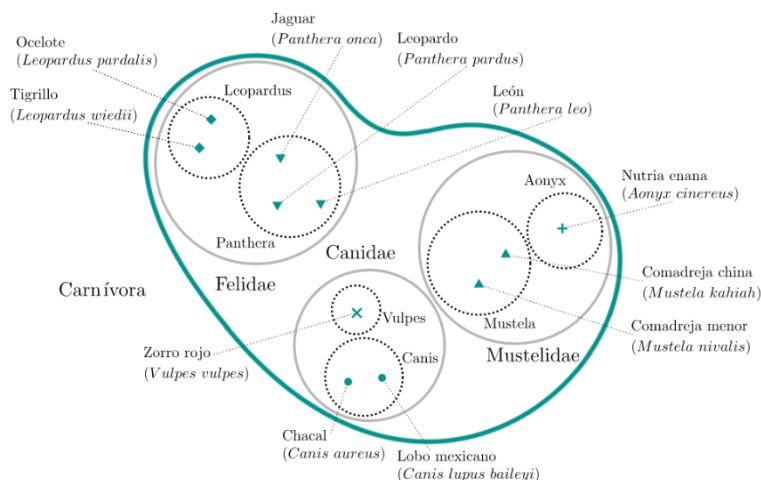


Ilustración 46. En el lenguaje de la teoría de conjuntos: El jaguar, el león y el leopardo (especies) son elementos del conjunto *Panthera* (género); el cual es un subconjunto de *Felidae* (Familia); además, éste último junto con los conjuntos *Mustelidae* y *Canidae* son subconjuntos de *Carnívora* (Orden).

El **espacio muestral** de un experimento o evento aleatorio es el **conjunto** que contiene todos los resultados posibles, cada uno de los resultados posibles es un **punto muestral**. En experimentos aleatorios el espacio muestral tiene más de dos elementos, por otro lado, en experimentos deterministas el espacio muestral contendrá un solo elemento.

Un **suceso** de un experimento o evento aleatorio es un **subconjunto** de un espacio muestral, además, se dice que un suceso determinado se ha verificado cuando el resultado del experimento pertenece a dicho conjunto. El **espacio de sucesos** es aquel que contiene todos los sucesos posibles de un espacio muestral, se denota por U_E ; y si E contiene n elementos, U_E contiene 2^n elementos. Un **suceso imposible** es aquel que no se puede verificar, se denota por el conjunto vacío. Por ejemplo, considere los siguientes experimentos.

- Lanzar una moneda una vez (aleatorio).
 - El espacio muestral es $E = \{Cara, Cruz\} = \{C, X\}$.
 - Un suceso es $A = \{X\}$, si en el lanzamiento sale X , se ha verificado el suceso A . El espacio de sucesos es $U = \{\emptyset, \{C\}, \{X\}, \{C, X\}\}$.
 - La probabilidad de obtener C es $P(C) = \frac{1}{2}$, pues, en un lanzamiento, hay dos posibilidades.
- Medir la temperatura del agua al hacer ebullición (determinista).
 - El espacio muestral es $E = \{100^\circ\text{C}\}$, el único suceso es $A = \{100^\circ\text{C}\}$ y el espacio de sucesos es $U = \{\emptyset, \{100^\circ\text{C}\}\}$.
- Lanzar una moneda dos veces (aleatorio).
 - El espacio muestral es $E = \{CC, CX, XC, XX\}$
 - Uno de sus sucesos es $A = \{XX, CC\}$. Si al realizar el experimento, en el primer lanzamiento se obtiene X y en el segundo X entonces el suceso A se ha verificado.
 - El espacio de sucesos contiene $2^4 = 16$ sucesos: $\{CC\}, \{CX\}, \{XC\}, \{XX\}, \{CC, CX\}, \{CC, XC\}, \{CC, XX\}, \{CX, XC\}, \{CX, XX\}, \{XC, XX\}, \{CC, CX, XC\}, \{CC, CX, XX\}, \{CC, XC, XX\}, \{CX, XC, XX\}, \{CC, CX, XC, XX\}, \{\emptyset\}$.
 - La probabilidad de obtener dos caras es $P(CC) = \frac{1}{4}$, pues es un suceso que se puede llevar a cabo mediante un solo caso favorable y hay cuatro posibles resultados.
- Lanzar un dado una vez (aleatorio).
 - El espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 - Un suceso es $A_{\text{impar}} = \{1, 3, 5\}$. Si al realizar el lanzamiento se obtiene un número impar, se ha verificado el suceso A_{impar} . El conjunto U contiene $2^6 = 64$ sucesos.
 - La probabilidad de obtener un número impar es $P(n_{\text{impar}}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, pues tres de los seis números del dado son impares.

Considere dos sucesos A y B de un espacio muestral E , entonces se define lo siguiente.

- El suceso A **incluye** al suceso B , denotado por $B \subset A$, si siempre que se verifica B , se verifica también A .
- Son **iguales**, $A = B$, si siempre que se verifica uno de ellos se verifica también el otro.
- La **unión** de los sucesos A y B , denotada por $A \cup B$, es el suceso que se verifica cuando se verifica al menos uno de los sucesos A o B .

- La **intersección** de los sucesos A y B , denotada por $A \cap B$, es el suceso que se verifica cuando se verifican simultáneamente los sucesos A y B .
- Son **incompatibles** cuando $A \cap B = \emptyset$.
- Son **complementarios** cuando $A \cap B = \emptyset$ y $A \cup B = E$, en este caso se denota por A^C al suceso complementario del suceso A .
- La **diferencia** de los sucesos A y B , denotada por $A \setminus B$, es el suceso que se verifica cuando A se verifica, pero no B , es decir, $A \setminus B = A \cap B^C$.

Por ejemplo, considere como experimento lanzar un dado de seis caras, el espacio muestral esta dado por el conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- Sea A es el suceso que se verifica cuando salen números pares y B el suceso que se verifica cuando aparece el 2 o el 6, es decir, $A = \{2, 4, 6\}$ y $B_1 = \{2, 6\}$. De esta forma $B \subset A$, pues $2, 6 \in \{2, 4, 6\}$.
- Si se define el suceso $B_2 = \{2, 6, 4\}$ se tiene que todos los elementos de dicho suceso están en el suceso $A = \{2, 4, 6\}$ ($B \subset A$) y, de forma análoga, los elementos del suceso A se encuentran dentro del suceso B_2 ($A \subset B$). Por lo tanto, $A = B_2$.
- Sea los sucesos $C = \{1, 3, 5\}$, $D_1 = \{1, 2\}$, entonces la unión de los dos sucesos está dada por $C \cup D_1 = \{1, 2, 3, 5\}$ y este se verifica cuando aparece alguno de dichos números (verificándose C o D_1).
- Los sucesos $B_1 = \{2, 6\}$ y $D_1 = \{1, 2\}$ se verifican al mismo tiempo cuando aparece un 2, es decir, se verifica el suceso $B_1 \cap D_1 = \{2\}$.
- Los sucesos $A = \{2, 4, 6\}$ y $C = \{1, 3, 5\}$ son complementarios. En efecto, $A \cap C = \emptyset$ ya que no comparten ningún elemento; además, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = E$.
- Sea $D_2 = \{3, 6\}$, entonces el suceso $A \setminus D_2 = \{2, 4, 6\} \setminus \{3, 6\} = \{2, 4\}$ se verifica cuando sale 2 o 4 en un lanzamiento, de esta forma, se verifica A y no se verifica D_2 .

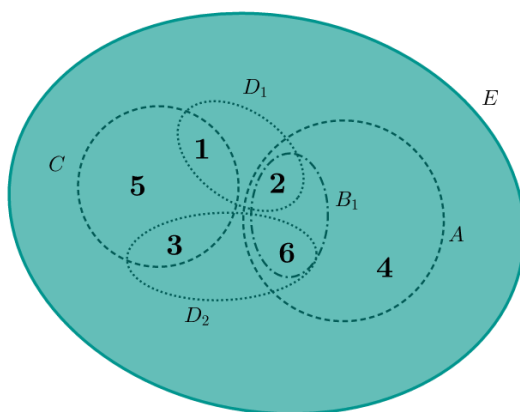


Ilustración 47. Diagrama de Venn de los sucesos $A = \{2, 4, 6\}$, $B_1 = \{2, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\}$, $D_1 = \{1, 2\}$ y $D_2 = \{3, 6\}$ correspondientes al lanzamiento de un dado de seis caras, cuyo espacio muestral E los contiene.

Considere A y B dos sucesos cualesquiera de un espacio muestral E no necesariamente incompatibles. Para el cálculo de las probabilidades de los sucesos se tienen los siguientes resultados

- En general, $P(A) \leq 1$ y $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.
- La probabilidad del suceso $A \cup B$ es

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
 - Si A y B son incompatibles, es decir, $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cap B) = 0$, y

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- La probabilidad del suceso complementario de A es

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$
- La probabilidad de la diferencia de A y B es

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$
- Si $P(A) \neq 0$, la probabilidad del suceso B condicionada por el suceso A , denotada por $P(B|A)$, está dada por la fórmula

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$
 - Si B y C son incompatibles, es decir, $B \cap C = \emptyset$, entonces

$$P(B \cup C|A) = P(B|A) + P(C|A).$$
 - Si $P(A) \neq 0$, entonces

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$
 - Para tres sucesos, tales que $P(A) \neq 0$, se cumple que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B).$$
- Si $P(A) \neq 0$, B es independiente del suceso A si $P(B|A) = P(B)$. En caso contrario, si $P(B|A) \neq P(B)$, el suceso B es dependiente del suceso A .
 - Cuando A y B son independientes, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Considere el siguiente ejemplo.

La *baraja inglesa* contiene 52 naipes; está dividida en cuatro palos (en inglés, *suit*), dos de color rojo y dos de color negro: Picas (o espadas) de color negro ($\spadesuit$); Tréboles (o flores) de color negro ($\clubsuit$); Corazones (o copas) de color rojo ($\heartsuit$); y Diamantes (o rombos) de color rojo ($\diamondsuit$). Cada palo se compone de 13 naipes siendo 9 numerales y 4 literales: $\mathcal{A}$ (*ace*), 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, $\mathcal{J}$ (*Jack*), $\mathcal{Q}$ (*Queen*), $\mathcal{K}$ (*King*). A continuación, se describen varios experimentos, de los cuales se expone su espacio muestral. Si se cuenta con una baraja inglesa, se puede comprobar el resultado directamente contando los naipes y con la fórmula.

- En el experimento, sacar un naipe, el espacio muestral es

$$E = \{\mathcal{A}\spadesuit, 2\spadesuit, \dots, 10\spadesuit, \mathcal{J}\spadesuit, \mathcal{Q}\spadesuit, \mathcal{K}\spadesuit, \mathcal{A}\clubsuit, 2\clubsuit, \dots, 10\clubsuit, \mathcal{J}\clubsuit, \mathcal{Q}\clubsuit, \mathcal{K}\clubsuit, \\ \mathcal{A}\heartsuit, 2\heartsuit, \dots, 10\heartsuit, \mathcal{J}\heartsuit, \mathcal{Q}\heartsuit, \mathcal{K}\heartsuit, \mathcal{A}\diamondsuit, 2\diamondsuit, \dots, 10\diamondsuit, \mathcal{J}\diamondsuit, \mathcal{Q}\diamondsuit, \mathcal{K}\diamondsuit\},$$
 y contiene 52 elementos (total de naipes de la baraja inglesa) y el espacio U contiene $2^{52} \approx 4.5 \times 10^{15}$ sucesos.

La probabilidad de sacar la carta $\mathcal{A}\diamondsuit$ es $P = \frac{1}{52}$, pues hay un único naipe de la baraja con $\mathcal{A}\diamondsuit$ y hay 52 posibilidades en total.
- Los sucesos de palos rojos son

$$N_{\heartsuit} = \{\mathcal{A}_{\heartsuit}, 2_{\heartsuit}, \dots, 10_{\heartsuit}, J_{\heartsuit}, Q_{\heartsuit}, K_{\heartsuit}\},$$

$$N_{\spadesuit} = \{\mathcal{A}_{\spadesuit}, 2_{\spadesuit}, \dots, 10_{\spadesuit}, J_{\spadesuit}, Q_{\spadesuit}, K_{\spadesuit}\},$$

y los de palos negros son

$$N_{\clubsuit} = \{\mathcal{A}_{\clubsuit}, 2_{\clubsuit}, \dots, 10_{\clubsuit}, J_{\clubsuit}, Q_{\clubsuit}, K_{\clubsuit}\},$$

$$N_{\diamondsuit} = \{\mathcal{A}_{\diamondsuit}, 2_{\diamondsuit}, \dots, 10_{\diamondsuit}, J_{\diamondsuit}, Q_{\diamondsuit}, K_{\diamondsuit}\}.$$

donde cada uno contiene 13 elementos. Se puede observar que los sucesos son incompatibles, pues sus intersecciones dos a dos son vacías.

- Si $p_{\clubsuit} = \{2_{\clubsuit}, 4_{\clubsuit}, 6_{\clubsuit}, 8_{\clubsuit}, 10_{\clubsuit}\} \subset N_{\clubsuit}$ es el suceso de numerales pares de Picas negras, es menos probable sacar una pica par que sacar cualquier naipe con pica de la baraja, esto es $P(p_{\clubsuit}) < P(N_{\clubsuit})$, esto es, $\frac{5}{52} < \frac{13}{52}$.
- Si $N_{\clubsuit} \setminus p_{\clubsuit} = \{\mathcal{A}_{\clubsuit}, 3_{\clubsuit}, 5_{\clubsuit}, 7_{\clubsuit}, 9_{\clubsuit}, J_{\clubsuit}, Q_{\clubsuit}, K_{\clubsuit}\}$, la probabilidad de dicho suceso está dada por la fórmula $P(N_{\clubsuit} \setminus p_{\clubsuit}) = P(N_{\clubsuit}) - P(N_{\clubsuit} \cap p_{\clubsuit}) = \frac{13}{52} - \frac{5}{52} = \frac{8}{52}$.
- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un naipe rojo?
Nótese que el conjunto $N_{\heartsuit} \cup N_{\spadesuit}$ contiene todos los naipes rojos, entonces, la probabilidad de sacar un naipe rojo es igual a la probabilidad de sacar un naipe de corazones o un naipe de diamantes, esto es,

$$P(\text{naipe}_{\text{rojo}}) = P(N_{\heartsuit} \cup N_{\spadesuit})$$

y como los sucesos son incompatibles se puede escribir

$$P(N_{\heartsuit} \cup N_{\spadesuit}) = P(N_{\heartsuit}) + P(N_{\spadesuit}),$$

siendo $P(N_{\heartsuit}) = \frac{13}{52}$ y $P(N_{\spadesuit}) = \frac{13}{52}$, pues ambos palos contienen 13 naipes y la baraja es de 52. Finalmente,

$$P(\text{naipe}_{\text{rojo}}) = P(N_{\heartsuit} \cup N_{\spadesuit}) = P(N_{\heartsuit}) + P(N_{\spadesuit}) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52}.$$

Y, directamente, la probabilidad de sacar un naipe negro es $P(\text{naipe}_{\text{negro}}) = \frac{26}{52}$. Nótese que el resultado se puede simplificar.

- El suceso de numerales de la baraja es

$$M = \{2_{\clubsuit}, \dots, 10_{\clubsuit}, 2_{\spadesuit}, \dots, 10_{\spadesuit}, 2_{\heartsuit}, \dots, 10_{\heartsuit}, 2_{\diamondsuit}, \dots, 10_{\diamondsuit}\}$$

el cual contiene 36 naipes; el suceso de literales de la baraja

$$L = \{\mathcal{A}_{\clubsuit}, J_{\clubsuit}, Q_{\clubsuit}, K_{\clubsuit}, \mathcal{A}_{\spadesuit}, J_{\spadesuit}, Q_{\spadesuit}, K_{\spadesuit}, \mathcal{A}_{\heartsuit}, J_{\heartsuit}, Q_{\heartsuit}, K_{\heartsuit}, \mathcal{A}_{\diamondsuit}, J_{\diamondsuit}, Q_{\diamondsuit}, K_{\diamondsuit}\}$$

contiene 16 naipes.

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un naipe que contenga un numeral o sea negro?
El suceso de naipes negros $N_{\text{negro}} = N_{\clubsuit} \cup N_{\spadesuit}$ contiene 26 naipes. Entonces, la probabilidad de extraer un naipe de la baraja que sea un numeral o sea negro está dada por $P(M \cup N_{\text{negro}})$. Como

$$M \cap N_{\text{negro}} = \{2_{\clubsuit}, \dots, 10_{\clubsuit}, 2_{\spadesuit}, \dots, 10_{\spadesuit}\} \neq \emptyset$$

y contiene 18 elementos (9 numerales de cada palo negro), se puede escribir

$$P(M \cup N_{\text{negro}}) = P(M) + P(N_{\text{negro}}) - P(M \cap N_{\text{negro}}),$$

de donde $P(M) = \frac{36}{52}$, $P(N_{\text{negro}}) = \frac{26}{52}$ y $P(M \cap N_{\text{negro}}) = \frac{18}{52}$. Finalmente,

$$P(M \cup N_{\text{negro}}) = \frac{36}{52} + \frac{26}{52} - \frac{18}{52} = \frac{44}{52},$$

es decir, de 52 naipes en la baraja, 44 son numerales o son negros y la probabilidad de extraer una con alguna de las condiciones mencionadas es igual a $\frac{44}{52}$.

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un literal de la baraja?

El suceso de literales de la baraja está dado por el conjunto $L = M^c$, es decir, contiene todos los naipes de la baraja que no son numerales. Entonces

$$P(L) = P(M^c) = 1 - P(M) = 1 - \frac{36}{52} = \frac{52}{52} - \frac{36}{52} = \frac{52 - 36}{52} = \frac{16}{52}.$$

Esto es, de 52 naipes, 36 son numerales y, por lo tanto, 16 son literales.

- Ahora, considere los sucesos de números pares de los palos rojos

$$p_{\heartsuit} = \{2\heartsuit, 4\heartsuit, 6\heartsuit, 8\heartsuit, 10\heartsuit\},$$

$$p_{\diamondsuit} = \{2\diamondsuit, 4\diamondsuit, 6\diamondsuit, 8\diamondsuit, 10\diamondsuit\},$$

los sucesos de números pares de los palos negros

$$p_{\spadesuit} = \{2\spadesuit, 4\spadesuit, 6\spadesuit, 8\spadesuit, 10\spadesuit\},$$

$$p_{\clubsuit} = \{2\clubsuit, 4\clubsuit, 6\clubsuit, 8\clubsuit, 10\clubsuit\}.$$

y el suceso de números pares $p = p_{\heartsuit} \cup p_{\diamondsuit} \cup p_{\spadesuit} \cup p_{\clubsuit}$.

- ¿Cuál es la probabilidad de sacar un naipe que contenga un número rojo que sea par?

La probabilidad solicitada se refiere a una probabilidad condicionada, es decir, al momento de sacar el naipe este debe de ser rojo y está condicionado a ser un número par. Para ello se recuerda que $P(N_{\text{rojo}}) = \frac{26}{52}$ y como el suceso

$$p \cap N_{\text{rojo}} = \{2\heartsuit, 4\heartsuit, 6\heartsuit, 8\heartsuit, 10\heartsuit, 2\diamondsuit, 4\diamondsuit, 6\diamondsuit, 8\diamondsuit, 10\diamondsuit\},$$

entonces $P(p \cap N_{\text{rojo}}) = \frac{10}{52}$. Por lo tanto

$$P(N_{\text{rojo}} | p) = \frac{P(p \cap N_{\text{rojo}})}{P(N_{\text{rojo}})} = \frac{10/52}{26/52} = \frac{10}{26},$$

esto es, de los 26 posibles naipes rojos hay 10 con un número par.

- Análogamente, como $P(p) = 20/52$, la probabilidad de sacar un número par que sea rojo está dada por

$$P(p | N_{\text{rojo}}) = \frac{P(p \cap N_{\text{rojo}})}{P(p)} = \frac{10/52}{20/52} = \frac{10}{20},$$

esto es, de 20 naipes con un número par, 10 son rojos.

- Al sacar naipes al azar,

- ¿Cuál es la probabilidad de que tres consecutivos sean rojos?

La probabilidad de sacar un naipe rojo es $P(N_{\text{rojo}}) = 26/52$. Supóngase que se llevo a cabo el experimento con éxito, ahora la baraja cuenta con 25 naipes rojos de 51 naipes en total. En este momento, la probabilidad de sacar un segundo naipe rojo es $P(N_{2\text{rojo}}) = \frac{25}{51}$. Análogamente, para el tercer naipe rojo $P(N_{3\text{rojo}}) = \frac{24}{50}$. Entonces la probabilidad de que ambos eventos ocurran al mismo tiempo es

$P(N_{\text{rojo}} \cap N_{2\text{rojo}} \cap N_{3\text{rojo}}) = P(N_{\text{rojo}}) \cdot P(N_{2\text{rojo}} | N_{\text{rojo}}) \cdot P(N_{3\text{rojo}} | N_{\text{rojo}} \cap N_{2\text{rojo}})$, es decir, se calcula la probabilidad de sacar un naipe, multiplicada por la probabilidad de sacar el segundo, condicionada a que se saque el primer naipe. El resultado es

$$P(N_{\text{rojo}} \cap N_{2\text{rojo}}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} = \frac{15\,600}{132\,600} \approx 0.12.$$

- ¿Cuál es la probabilidad de uno sea rojo y otro negro?

Como se vio anteriormente $P(N_{\text{rojo}}) = 26/52$ y $P(N_{\text{negro}}) = 26/52$. Sin embargo, el segundo naipe se sacará de una baraja con 51 cartas, entonces

$$P(N_{\text{rojo}} \cap N_{\text{negro}}) = P(N_{\text{rojo}}) \cdot P(N_{\text{negro}} | N_{\text{rojo}}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{26}{51} = \frac{676}{2\,652} = 0.25.$$

1.29.3 Aplicación de la teoría combinatoria al cálculo de probabilidades

Supóngase que en un experimento se puede hablar de éxito si se verifica un determinado suceso, y de fracaso si se verifica el suceso contrario. Considere el suceso en donde, al llevar a cabo n ensayos, los primeros k son éxitos y los siguientes $(n - k)$ son fracasos, su probabilidad está dada por el número $p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$. El orden en el que se llevan a cabo (o se obtienen) los éxitos y fracasos no importa para el cálculo de la probabilidad, sin embargo, es necesario calcular de cuantas maneras (número de ordenaciones) se puede obtener el resultado. Para ello, se toman *las combinaciones posibles de n elementos tomados de k en k*

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

entonces, la *probabilidad de obtener k éxitos en n ensayos* está dada por la cantidad

$$\left(\frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} \right) \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Teorema (Distribución binomial). Sea X una variable aleatoria discreta que representa el número de éxitos en n intentos y que, por lo tanto, puede tomar los valores $0, 1, \dots, n$, y sea p la probabilidad de un éxito independiente. Entonces, la colección de valores de una variable aleatoria X está distribuida de forma binomial si:

$$P_B(X = k; n, p) = \begin{cases} C_n^k \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}, & 0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases},$$

de donde C_n^k son las combinaciones de n elementos tomados de k en k .

Por ejemplo, considere una caja con n bolas, donde hay x bolas blancas y $(n - x)$ bolas negras. Al sacar una bola de la caja sin ver hay dos posibilidades, que sea blanca o que sea negra. En este experimento, el suceso extraer una bola blanca será considerado como éxito; el contrario, sacar una bola negra, como fracaso. Si se repite el experimento, pero devolviendo la bola en cada extracción, la probabilidad de éxito es constante e igual a $\frac{x}{n}$. Sin embargo, si se mantienen afuera las bolas con cada extracción, la probabilidad va cambiando conforme salen negras o blancas. Ahora considere que la caja contiene 20 bolas, de las cuales 11 son blancas y 9 son negras, la probabilidad de sacar 10 bolas blancas en 15 intentos se calcula como sigue: el número de éxitos buscado es $k = 10$; el número de intentos permitidos para ello es $n = 15$; la probabilidad de un éxito independiente es $p = \frac{\text{bolas blancas}}{\text{bolas}} = \frac{11}{20} = 0.55$ y $1 - p = 1 - \frac{11}{20} = 0.45$ es la probabilidad de un fracaso independiente; las combinaciones de 15 elementos tomados de 10 en 10 son

$$\begin{aligned} C_{15}^{10} &= \binom{15}{10} = \frac{15!}{10! \cdot (15 - 10)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)} \\ &= \frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{11 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot 13 \cdot (7 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 5)}{2 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 5} = 11 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 7 = 3\,003; \end{aligned}$$

finalmente,

$$P\left(X = 10; 15, \frac{11}{20}\right) = \binom{15}{10} \cdot \left(\frac{11}{20}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{11}{20}\right)^{15-10} = (3\,003) \cdot (0.0025) \cdot (0.0185) = 0.1389.$$

Bibliografía sugerida

- Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams, T. A. (2008). Estadística para administración y economía. Cengage Learning Editores, S.A.
- Aguilar Marquéz, A., Bravo Vázquez, F. V., Cerón Villegas, M., Gallegos Ruiz, H. A., & Reyes Figueroa, R. (2014). Aritmética y Álgebra, Matemáticas Simplificadas (2da ed.). Pearson.
- Anfossi, A. (1954). Cálculo, diferencial e integral, para preparatoria. Progreso, S.A.
- Balan Novelo, J., Chin Moreno, M., Cuenca Villamonte, S. A., Salas López, N., & Zavala Centeno, B. (2020). Compilación de ejercicios de la unidad de aprendizaje, álgebra básica. URL: <https://prepaermilo.uacam.mx/view/download?file=162/ANTOLOGIA%20ALGEBRA%20BASICA%202019.pdf&tipo=paginas>
- Baldor, A. (2019). Álgebra (4ta ed.). Patria.
- Baldor, A. (2019). Geometría y trigonometría (4ta ed.). Patria.
- Barrantes, M. C., Zamora, V., & Barrantes, M. (2021). Las demostraciones dinámicas del Teorema de Pitágoras. Revista de Educación Matemática, 36(1), 27-42.
- Bulajich-Manfrino, R., & Gómez-Ortega, J. A. (2002). Geometría: Cuadernos de Olimpiadas Matemáticas. México: UNAM.
- Cálculo Diferencial e Integral I (2023). Portal Académico del CCH, UNAM. URL: <https://portalacademico.cch.unam.mx/calculo1>
- Cálculo Diferencial e Integral II (2023). Portal Académico del CCH, UNAM. URL: <https://portalacademico.cch.unam.mx/calculo2>
- Cuéllar Carvajal, J. A. (2004). Álgebra. Mc Graw Hill Interamericana.
- Dowling, E. T. (1991). Teoría y problemas de cálculo para administración, economía y ciencias sociales. Santafé de Bogotá, Colombia: Mc Graw Hill Interamericana.
- Fuenlabrada de la Vega Trucíos, S. (2004). Geometría y Trigonometría. Mc Graw Hill Interamericana.
- Gutiérrez González, E. (2014). Probabilidad y estadística, aplicaciones a la ingeniería y las ciencias. Grupo Editorial Patria.
- Guzmán Herrera, A. (2006). Geometría y Trigonometría (J. H. Pérez Castellanos, Trans.). Publicaciones Cultural.
- Hasser, N. B., La Salle, J., & Sullivan, J. (2009). Análisis matemático Vol. 1. Editorial Trillas.
- Hemmerling, E. M. (2005). Elementos básicos de la geometría. Limusa S.A. De C.V.
- Hernández, S. L. (2010). Trigonometría Preuniversitaria. Limusa S.A. De C.V.
- Hertzer, K. (2019). Funciones y Cálculo Diferencial, Nivel Medio Superior con aplicación de simulador Graphmatica (1ra ed.). Grupo Editorial Uribe-GC SA de CV
- Kindle, J. H. (2007). Geometría Analítica (1ra ed.). México: McGraw-Hill Interamericana.
- Larson, R., & Edwards, B. H. (2016). Cálculo (Tomo I, 10ma ed.). Cengage Learning.

Larson, R., & Hostetler, R. (2018). Precálculo. Reverté.

Lehmann, H. C. (2001). Álgebra. México: Limusa.

Matemáticas 1 (2023). Portal Académico del CCH, UNAM. URL:
<https://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas1>

Matemáticas 2 (2023). Portal Académico del CCH, UNAM. URL:
<https://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/matematicas2>

Moncho Vasallo, J. (2015). Estadística aplicada a las ciencias de la salud. Elsevier.

Rees, P. K., & Sparks, F. W. (2011). Álgebra. McGraw-Hill.

Rodríguez Wilhelmi, M. (2004). Combinatoria y probabilidad. Departamento de Didáctica de la
 Matemática, Universidad de Granada. URL:
<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/librowilhelmi.pdf>

Ross, S. M. (2018). Introducción a la estadística. Reverté.

Soto, S. J. (2005). Curso de matemáticas IV. Bachillerato. México: Dirección general ENP. UNAM.

Spivak, M. (2006). Calculus. Cambridge University Press.

Stewart, J. (2002). Cálculo de una variable. Trascendentes y Tempranas (4ta ed.). Thomson.

Weimer, R. C. (2002). Estadística. Compañía Editorial Continental, S.A. De C.V

2. Humanidades

2.1 La Filosofía como Disciplina

La intensa vida política de la antigua Grecia, sus intercambios comerciales con diversos pueblos, el contacto con diferentes formas de vida y conocimientos de otras culturas, la observación de los fenómenos naturales y el deseo de ofrecer explicaciones racionales para estos, contribuyeron a la formación de una visión particular del universo, que dio lugar al surgimiento de la filosofía. Esta disciplina se centra en el estudio de cuestiones fundamentales sobre la existencia, el conocimiento, la verdad, la moral, la mente y el lenguaje, buscando entender y explicar los principios que rigen la realidad y nuestra percepción de ella. Los filósofos desarrollan teorías y conceptos que permiten cuestionar y comprender mejor nuestras propias ideas y prejuicios. De este modo, la filosofía se convierte en una herramienta clave no solo en el ámbito académico, sino también en la vida diaria, promoviendo la reflexión y el compromiso con el conocimiento.

2.1.1 Diferencias entre mito, filosofía y ciencia

Muchos eventos a nuestro alrededor nos parecen misteriosos, por lo que buscamos explicaciones, a menudo fantásticas, a través de mitos que tratan de resolver grandes enigmas sobre el origen del universo, el ser humano y sus costumbres. Con el tiempo, el pensamiento mítico fue reemplazado por una visión más racional de la realidad, basada en la causa y efecto, y en la idea de que los fenómenos son producto de cambios naturales, no de intervenciones sobrenaturales. Los primeros filósofos buscaron la verdad mediante la razón, reflexionando sobre lo correcto e incorrecto, mientras que la ciencia, mediante la observación y la experimentación, trata de describir el mundo de manera objetiva, desarrollando hipótesis que se prueban a través del método científico.

2.1.2 Características de la filosofía

La filosofía es una forma de pensamiento que busca comprender profundamente el mundo, a nosotros mismos y nuestras relaciones con los demás. Entre sus características principales está su actitud crítica, ya que cuestiona todo, incluso lo que parece obvio, para llegar a la verdad. También es reflexiva, porque invita a pensar con calma sobre temas como el conocimiento, la moral o la existencia. Otra característica es su universalidad: se interesa por cuestiones que afectan a todos los seres humanos, como el sentido de la vida o la justicia. Además, es sistemática, porque organiza sus ideas de manera lógica y coherente. Finalmente, la filosofía no busca respuestas simples ni inmediatas, sino que fomenta el diálogo y el análisis constante, ayudándonos a entender mejor el mundo y nuestro lugar en él.

2.1.3 Ramas de la filosofía

Son las distintas áreas de estudio que nos ayudan a cuestionar y reflexionar sobre los diferentes aspectos de la realidad. Cada una de estas ramas aborda preguntas fundamentales que nos permiten comprender mejor el mundo, nuestra vida y nuestro pensamiento.

- Metafísica
- Gnoseología
- Epistemología
- Lógica
- Ética

- Estética
- Axiología
- Ontología

2.1.4 Métodos de la filosofía

Son las diversas herramientas intelectuales que los filósofos han utilizado a lo largo de la historia del pensamiento humano para acercarse al conocimiento, permitiendo investigar, razonar, construir argumentos sólidos e interpretar y evaluar ideas filosóficas.

- Mayéutico
- Dialéctico
- Lógico
- Hermenéutico
- Fenomenológico
- Escolástico
- Cartesiano
- Empirista

2.2 Ética

La ética es una disciplina filosófica que estudia la moralidad, el comportamiento humano y los principios que orientan las acciones de los individuos. Su propósito es fomentar la responsabilidad moral y guiar hacia el bien individual y colectivo, dotando de sentido a la existencia. Como ciencia normativa, se enfoca en los valores éticos, la conciencia y la libertad, que son esenciales para la toma de decisiones conscientes y responsables.

2.2.1 Diferencia entre ética y moral.

La ética y la moral son ideas muy parecidas que a menudo se confunden, pero en realidad tienen significados diferentes. Ambas nos ayudan a saber cómo debemos comportarnos y lo que está bien o mal, pero lo hacen de maneras distintas. Entender esta diferencia es importante para saber de dónde vienen nuestros valores y cómo tomamos decisiones en el día a día.

Ética	Moral
-------	-------

*Proviene del vocablo griego *ethos*, que significa costumbre, hábito, carácter.

*Abre preguntas que han acompañado a los seres humanos en su devenir histórico y su proceso de consciencia de sí y para sí.

*Disciplina filosófica que estudia la moral.

*Proviene del latín *moralis*, que significa costumbre o hábito.

*La moral se entiende como el conjunto de reglas, normas y principios que rigen el comportamiento interior y exterior de los individuos en la dinámica social.

*No existe comunidad sin moral pues todo grupo humano cuenta con un conjunto de reglas y/o principios para la convivencia.

2.2.2 Principales conceptos de la ética (virtudes).

Aristóteles, propone una visión de la virtud como el camino hacia la vida plena, que define como eudaimonía (felicidad o florecimiento humano). Para él, la virtud (areté) no es un simple hábito, sino una excelencia que permite a una persona cumplir con su función propia como ser humano racional. Este concepto se relaciona profundamente con otros términos como aghatós y ethos, que ayudan a entender su filosofía ética.

El ethos no es algo con lo que se nace, sino una cualidad que se forma a través de la práctica constante de acciones virtuosas. El carácter moral de un individuo se configura en relación con su entorno, influido por la sociedad, la educación y las vivencias personales. Además, el ethos tiene un componente social y cultural, ya que las virtudes se desarrollan dentro de una comunidad que puede tanto incentivar como obstaculizar el camino hacia la excelencia.

El término aghatós hace referencia a "lo bueno" o "lo virtuoso" y está estrechamente vinculado con la eudaimonía. Aristóteles afirma que todas las acciones humanas están orientadas hacia un fin último: el bien supremo que otorga significado a la vida. Este bien, identificado como la felicidad en términos de autorrealización, se logra viviendo de acuerdo con la virtud. De esta manera, quien cultiva la areté y desarrolla un ethos adecuado se convierte en una persona aghatós.

2.2.3 Teorías éticas

Desde el ámbito de la filosofía, uno de los grandes retos del sujeto moral es distinguir entre lo bueno y lo malo, basándose en los principios éticos y morales que ha desarrollado a lo largo de su vida. Estos principios se forman mediante la interacción y socialización con su entorno, como la familia y la comunidad, que influyen en sus juicios de valor y en su identidad moral. La evolución de este sujeto —su formación, consolidación y posibles crisis— puede entenderse desde diversas perspectivas éticas, lo que permite una mejor comprensión de su desarrollo moral.

Perspectivas éticas:

- * Eudemonismo
- * Hedonismo
- * Estoicismo
- * Contractualismo
- * Ética formal
- * Utilitarismo
- * Vitalismo
- * Multiculturalismo
- * Existencialismo

2.2.4 La satisfacción de las necesidades humanas frente a los derechos de otros seres vivos

El hombre es un ser social por naturaleza y, en su interacción con otros seres vivos, se diferencia de ellos en el grado de inteligencia para transformar su entorno en beneficio propio, generando bienes de consumo que le permiten subsistir y produciendo valores culturales, como la tolerancia, la justicia y la solidaridad, esenciales para la vida en comunidad. Como individuo en sociedad, el hombre construye normas, principios, valores y leyes que regulan su conducta y su relación con los demás, con el fin de garantizar el bien común. Así, el desafío es encontrar un equilibrio ético y sostenible que permita satisfacer las necesidades humanas de una manera que no solo garantice el respeto por otros seres vivos, sino que también preserve el ambiente en su totalidad.

Existen diferentes enfoques que buscan equilibrar el bienestar humano con el respeto hacia la vida de otros seres. El enfoque antropocéntrico sitúa al ser humano en el centro de todo lo que lo rodea, considerando que el entorno está al servicio de sus intereses. En contraste, el biocentrismo establece que todos los seres vivos son merecedores de respeto por ser otras formas de vida y tienen derecho a existir y desarrollarse.

2.2.5 El ejercicio de la libertad frente al respeto a los demás en las relaciones interpersonales

El ejercicio de la libertad requiere equilibrar conceptos como la autonomía, el determinismo, la heteronomía y la responsabilidad. El ser humano es libre porque puede autodeterminarse y construir su propio destino, no solo por moverse conscientemente, sino porque tiene la capacidad de pensar, expresarse, reunirse y decidir quién quiere ser y quién lo representa. Para los griegos, la libertad se definía como no pertenecer a otro, siendo soberano de uno mismo y de sus actos. Esta facultad es esencial en la ética, pues sin libertad no tendría sentido hablar de moralidad o de la forma en que adoptamos y respondemos a las normas. Así, la verdadera libertad implica responsabilidad: la capacidad de responder por nuestras decisiones.

2.3 Filosofía política

La Filosofía Política se ocupa del estudio y análisis de los fenómenos políticos desde una perspectiva normativo-prescriptiva. Entre los temas que abarca se incluyen el origen y las formas de organización del poder político, el análisis de las instituciones sociales y la consideración de las normas, principios y valores que las fundamentan.

Asimismo, tiene como tarea la construcción, clasificación y esclarecimiento de conceptos fundamentales como la justicia, la libertad, la democracia, la nacionalidad y la pluralidad cultural, los cuales conforman el universo político.

Entre los problemas más relevantes abordados históricamente se encuentran: la naturaleza de la política, el análisis de las distintas formas de gobierno que se ejercen en las naciones y sus condiciones de legitimidad, las teorías de la justicia, la teoría del contrato social y cuestiones relacionadas con la igualdad, la libertad, la democracia, la justicia, así como los límites de las dinámicas de poder.

2.3.1 El interés del individuo frente al interés de la colectividad en la toma de decisiones políticas

La cultura está compuesta por elementos interconectados que forman una unidad en la que los actos, acontecimientos y objetos adquieren sentido, valor y función. Estas relaciones culturales siempre se desarrollan dentro de un contexto institucional, definido por una formación social histórica o sistema económico-político, y bajo la autoridad de un Estado.

La política, como expresión sistemática de la vida social, organiza la sociedad mediante un sistema político compuesto por diversas partes que cumplen funciones específicas y comparten responsabilidades. Este

sistema responde a un momento histórico y un territorio determinado, manifestando una cultura que refleja tanto sus valores como las contradicciones de su orden institucional.

En esencia, la política trata de cómo las personas dentro de una cultura interactúan para proyectarla hacia el futuro, ya sea preservándola o transformándola. Este proceso exige coordinación y eficiencia en las tareas individuales que conforman un sistema funcional con capacidad de trascendencia. No obstante, estas interacciones también pueden revelar tensiones internas, como desigualdades, injusticias y la cosificación de las personas.

La política abarca toda acción social y práctica vinculada con la producción. Es fundamental comprenderla como la ciencia del Estado, que incluye actividades teóricas y prácticas a través de las cuales los grupos dominantes justifican y consolidan su poder, a la vez que buscan el consenso de los demás. Para ello, la política organiza y regula a los diversos grupos sociales.

2.3.2 Los derechos del individuo frente a los derechos de la colectividad

Encontrar un equilibrio entre los derechos de cada persona y los de la comunidad es un reto importante en las sociedades actuales. Los derechos individuales, como decir lo que piensas, tener tus propias cosas o decidir sobre tu vida, protegen a las personas de posibles abusos del gobierno o de las mayorías. Por otro lado, los derechos de la comunidad, como la seguridad, la salud y el bienestar general, buscan que todos vivan en buenas condiciones. A veces, estos derechos chocan, como cuando lo que alguien hace afecta negativamente a los demás, o cuando las reglas para beneficiar a todos limitan demasiado las libertades personales. Por eso, es importante que las leyes y las instituciones encuentren un punto medio para que se respeten los derechos de las personas, sin descuidar lo que necesita la comunidad.

2.3.3 El respeto a los derechos del individuo en el contexto de la diversidad cultural

Los derechos humanos son los derechos que todas las personas tienen solo por el hecho de haber nacido, sin importar cosas como su raza, religión, género, edad, lugar de nacimiento o su situación económica. Estos derechos son universales, lo que significa que se aplican a todas las personas en cualquier parte del mundo, y están todos conectados entre sí. No se pueden separar, ya que el respeto de unos afecta a los otros. Además, los gobiernos, sin importar el tipo de sistema político que tengan, tienen la responsabilidad de garantizar que estos derechos se respeten y se cumplan para todas las personas.

Derecho consuetudinario. Este tipo de derecho surge cuando no existen leyes escritas, pero las personas de una comunidad o grupo social siguen costumbres y reglas no escritas que todos aceptan. Estas normas reflejan las tradiciones y valores de su cultura, y son respetadas por toda la comunidad, especialmente en comunidades indígenas o grupos étnicos.

2.4 Lógica

La lógica es una disciplina filosófica que se encarga de estudiar las reglas que hacen que nuestro razonamiento sea preciso y válido. Su propósito es examinar cómo pensamos a través de los argumentos, que son formas de expresar nuestras ideas mediante el lenguaje. La lógica nos permite detectar si estamos razonando correctamente o si estamos cometiendo errores en nuestro pensamiento. Como ciencia, la lógica requiere pruebas y evidencias antes de aceptar algo como verdadero o falso, y asegura que todo razonamiento esté basado en argumentos sólidos.

2.4.1 Estructura de las argumentaciones y sus diferentes tipos

La lógica se ocupa de la expresión lingüística del pensamiento. A través de los términos y proposiciones, evaluamos cómo razonamos. Una proposición es un enunciado que afirma o niega algo sobre un sujeto. Las proposiciones se organizan en premisas que conducen a una conclusión, la cual puede ser afirmativa o negativa. El razonamiento, entonces, es un conjunto de proposiciones en el que una conclusión se apoya en las premisas. Este proceso nos permite determinar la validez y veracidad de los argumentos.

Una proposición es un enunciado que se compone a partir de:

Sujeto + Verbo (Ser) + Predicado

Un razonamiento es un conjunto de proposiciones entre las cuales una de ellas, llamada conclusión, se sostiene con apoyo de las demás premisas.

La estructura básica de un argumento son premisas, que son las oraciones base o de respaldo que nos permiten sostener o justificar una afirmación final, llamada conclusión.

Ejemplo.

Premisa 1. Todos los reptiles son de sangre caliente

Premisa 2. Los lagartos son reptiles

Conclusión. Por lo tanto, los lagartos son de sangre caliente

Existen diferentes tipos de argumentos: deductivo, inductivo, analógico, abductivo.

2.4.2 Conectivos de la lógica proposicional y su tabla de verdad

Los conectivos lógicos son operadores fundamentales en la lógica proposicional que permiten establecer relaciones entre proposiciones para formar expresiones más complejas. Entre los principales se encuentran la conjunción, que une dos proposiciones que deben ser ambas verdaderas; la disyunción, que es verdadera si al menos una de las proposiciones lo es; la negación que invierte el valor de verdad de una proposición; el condicional (si... entonces), que expresa una relación de consecuencia lógica; y el bicondicional (si y solo si), que indica que ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Estos conectivos son esenciales para analizar argumentos, construir razonamientos y evaluar la validez de inferencias lógicas.

Conector	Símbolo
Negación	$\neg$
Conjunción	$\wedge$
Disyunción	$\vee$
Condicional	$\rightarrow$
Bicondicional	$\leftrightarrow$

Una tabla de verdad es un arreglo en el que la validez de un argumento se puede someter a prueba, mediante la exposición de todas las combinaciones posibles de los valores de verdad de las variables en un argumento.

2.4.3 Reglas de inferencia, método de deducción natural

El método de deducción natural es una herramienta clave en la lógica formal que permite derivar conclusiones válidas a partir de un conjunto de premisas utilizando reglas de inferencia. Estas reglas son principios básicos que establecen cómo se pueden combinar proposiciones para obtener nuevas proposiciones de manera válida. Entre las reglas más comunes están el modus ponens (si $p \rightarrow q$ y p son verdaderos, entonces q es verdadero, el modus tollens (si $p \rightarrow q$ y q es falso, entonces p también es falso) y la introducción y eliminación de conectivos como la conjunción, disyunción y negación.

2.4.4 Comprobación de validez e invalidez en la lógica proposicional

El objetivo principal de la lógica es distinguir entre estructuras de pensamientos correctas e incorrectas. Es por eso que analiza a detalle la relación que hay entre las premisas y la idea final conclusión. Son correctas las estructuras de un argumento cuando la conclusión se sigue de las premisas. A esto se le llama coherencia, es cuando nuestro pensamiento tiene un buen orden y relaciona bien las ideas.

Cabe señalar que la coherencia indica la validez de un argumento. Para la lógica la validez se refiere que la estructura o el orden de cómo se acomodaron las premisas en relación con la conclusión es correcta. Es decir, hay validez cuando la conclusión depende de las premisas. Se destaca que, un argumento puede ser correcto o válido, pero no necesariamente verdadero.

La distinción entre validez e invalidez es esencial para evaluar argumentos, ya que un argumento válido preserva la verdad, mientras que uno inválido no proporciona tal garantía, incluso si las premisas son correctas en un caso particular.

2.4.5 Tipos de falacias

Una falacia es un tipo de razonamiento que, aunque pueda parecer válido, contiene un error lógico que invalida la conexión entre las premisas y la conclusión. Estas equivocaciones, aunque variadas, suelen tener un carácter persuasivo, lo que las hace parecer convincentes en ciertos contextos. Sin embargo, es posible identificar las fallas en estos argumentos si entendemos los distintos tipos de errores que pueden presentar. Entre las falacias más comunes se encuentran: *Argumentum ad populum*, *Argumentum ad ignorantiam*, *Argumentum ad verecundiam*, *Argumentum ad misericordiam*, *Argumentum ad baculum*, *Argumentum ad hominem*.

2.5 Problemas filosóficos

Los problemas filosóficos buscan ayudarnos a entender y analizar aspectos fundamentales de la existencia humana y el progreso del pensamiento moderno. Gracias a ello, podemos tomar mayor conciencia y responsabilidad sobre nuestra identidad, tanto como individuos como integrantes de una comunidad cultural. Este enfoque resulta especialmente relevante en un mundo caracterizado por su diversidad, donde interactuamos en escenarios locales, nacionales y globales, enriquecidos por una variedad de culturas y perspectivas.

2.5.1 Sentido de la vida humana

La idea del "ser" ha sido un tema importante en la filosofía, y diferentes pensadores han intentado entenderlo desde varias perspectivas. Tres conceptos claves que nos ayudan a explorar el "ser" son su historicidad, su relación con la experiencia estética y su dialéctica.

La historicidad del ser

El "ser" no es algo fijo o estático; está profundamente conectado con el tiempo y la historia. Esto significa que nuestra comprensión de lo que somos cambia según el momento histórico en el que vivimos. Por

ejemplo, en la antigüedad, muchas personas definían el ser a través de su relación con los dioses; en cambio, hoy lo entendemos más en términos de ciencia, cultura y relaciones sociales. Esta idea de que el "ser" está influido por el contexto histórico nos ayuda a comprender que nuestras identidades y formas de pensar no son universales, sino que evolucionan con el tiempo.

Vida y experiencia estética

La experiencia estética se refiere a cómo vivimos y apreciamos la belleza en el mundo, ya sea en la naturaleza, el arte o los momentos cotidianos. Esta conexión con lo bello nos ayuda a sentirnos vivos y en armonía con nuestro entorno. Por ejemplo, escuchar una canción que nos emociona o contemplar un atardecer nos hace reflexionar sobre lo que significa existir. Estas experiencias no solo enriquecen nuestra vida, sino que también nos ayudan a conectarnos con nuestro ser más profundo y con los demás.

La dialéctica del ser

La dialéctica del ser se basa en la idea de que el "ser" se define en relación con sus opuestos y con el cambio constante. Es como un diálogo entre lo que somos y lo que no somos, entre lo que deseamos y lo que evitamos. Por ejemplo, entendemos la alegría porque hemos conocido la tristeza, o reconocemos lo que significa ser libres porque sabemos lo que es sentirse limitado. Esta tensión entre opuestos es lo que impulsa nuestro crecimiento y nos lleva a reflexionar sobre quiénes somos realmente.

2.5.2 Inclusión y responsabilidad social en el desarrollo científico y tecnológico

El Positivismo es una corriente filosófica que surgió en el siglo XIX, impulsada por el pensador francés Auguste Comte. Esta filosofía sostiene que el conocimiento humano debe basarse en hechos observables y comprobables, es decir, en la experiencia y la ciencia. Los positivistas promueven la idea de progreso, entendida como la creencia de que la humanidad avanza hacia un futuro mejor gracias al desarrollo de la ciencia y la tecnología. Según Comte, la historia humana pasa por tres etapas: la etapa teológica, en la que las personas explicaban el mundo a través de mitos y religiones; la etapa metafísica, donde buscaban explicaciones filosóficas más abstractas; y, finalmente, la etapa positiva, en la que la ciencia se convierte en la principal guía para comprender y transformar la realidad.

2.5.3 El ejercicio de la libertad frente al respeto a los demás en las relaciones interpersonales

La libertad es esencial para nuestra vida, pero debe ejercerse con responsabilidad y respeto hacia los demás, reconociendo sus derechos y valores. El existencialismo, una filosofía centrada en el ser humano, sostiene que somos libres para dar sentido a nuestra vida, aunque esta libertad conlleva responsabilidad sobre nuestras decisiones y su impacto. Sin embargo, problemas como la objetivación, que reduce a las personas a simples herramientas, y la alienación, que genera desconexión con lo que hacemos o somos, pueden alejarnos de una existencia auténtica. Reflexionar sobre estas ideas nos ayuda a equilibrar nuestra libertad con el respeto y la conexión con los demás.

2.5.4 El ser humano en la sociedad.

El ser humano es un ser social por naturaleza. Desde que nacemos, vivimos en comunidades donde necesitamos comunicarnos, entender a los demás y ser entendidos. Aquí es donde entran en juego dos ideas importantes: la ética del discurso y la acción comunicativa, propuestas por el filósofo alemán Jürgen Habermas, que nos ayudan a reflexionar sobre cómo nos relacionamos con los demás de manera justa y respetuosa.

La ética del discurso

Esta idea nos invita a pensar en cómo debatimos y tomamos decisiones en sociedad. Habermas propone que cuando hablamos con otras personas, debemos hacerlo desde una postura ética, buscando siempre el entendimiento mutuo y la igualdad. Esto significa que todos los participantes en un diálogo tienen derecho a expresar sus ideas y a ser escuchados sin prejuicios. Por ejemplo, en una discusión familiar o escolar, nadie debería imponer su punto de vista por la fuerza o ignorar a quienes tienen una opinión diferente.

La acción comunicativa

La acción comunicativa es el tipo de comunicación que busca el entendimiento y la cooperación entre las personas. No se trata solo de transmitir información, sino de construir acuerdos basados en la razón y el respeto. Por ejemplo, si un grupo de amigos quiere organizar un evento, deben dialogar de manera abierta, escucharse mutuamente y llegar a decisiones que beneficien a todos, evitando conflictos o malentendidos.

2.5.5 El respeto a los derechos del individuo en el contexto de la diversidad cultural.

En una sociedad diversa, respetar los derechos de cada persona es esencial para una convivencia justa. Esto implica valorar las culturas, creencias y tradiciones de los demás, evitando prejuicios y discriminación. Sin embargo, este respeto no puede separarse de conceptos como la decolonización y la filosofía de la liberación, que cuestionan las estructuras de poder que históricamente han oprimido a ciertos grupos.

La decolonización busca dismantelar las formas de dominación que dejaron el colonialismo, promoviendo el reconocimiento y la valorización de los saberes, lenguas y tradiciones de los pueblos marginados. Por su parte, la filosofía de la liberación, desarrollada por pensadores como Enrique Dussel, propone un enfoque ético que pone en el centro a las personas oprimidas, exigiendo transformar las relaciones sociales para lograr equidad y dignidad para todos.

Bibliografía sugerida

- Angulo, Y. (2006). Ética. Santillana.
- Aristóteles. (1985). Ética nicomáquea. Gredos. https://www.posgrado.unam.mx/filosofia/wp-content/uploads/2020/03/Etica_AristotelesEN_Mae.pdf
- Aula Legal. (27 de diciembre de 2016). La Costumbre. Teoría del derecho. [Archivo de video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=kJSR4bKQv_g
- Bilbeny, N. (2012). Ética. Ariel.
- Bully Magnets (8 de diciembre de 2019). ¿Qué es el Positivismo? [Archivo de video] YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=g-0-i59a1PQ>
- Chávez, C. P. (2015). Historias de las doctrinas filosóficas. (5ª ed.). Pearson Educación.
- Cicerón. (1982). Tratados morales. CONACULTA.
- Cohen, M. (2005). 101 dilemas éticos. Alianza.
- COMPLEXUS. (14 de diciembre de 2016). PENSAR el MUNDO desde LA FILOSOFÍA de la LIBERACIÓN con Enrique Dussel. [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=tvolegCo1Pg>
- Comte A. (1980). Discurso sobre el espíritu positivo. Aguilar.
- Contartiese, D. & López Nestor, A. H. (2013). Alienación: la dignidad negada. En busca de caminos para cambiar el mundo. Herramienta. Revista de debate y critica marxista. <https://herramienta.com.ar/alienacion-la-dignidad-negada-en-busca-de-caminos-para-cambiar-el-mundo>
- Copi, I. y Cohen, C. (2004). Introducción a la lógica. (2ª ed.). Limusa.
- Copi, I. M. (1979). Lógica Simbólica. CECSA
- Dussel, E. (2022). Filosofía de la Liberación. FCE.
- Dussel, E. (1977). Introducción a una Filosofía de la Liberación Latinoamericana. Extemporáneos. https://enriquedussel.com/txt/Textos_Libros/28.Introduccion_filosofia_liberacion_latinoamericana.pdf
- Enterarse. (17 de diciembre de 2020). Falacias: ¿Qué son y por qué debemos evitarlas? [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=suVugHxroas>
- Escobar, G. y Albarrán, M. (2002). Filosofía: un panorama de su problemática y corrientes contemporáneas. McGraw Hill.
- ES School Zone. (7 de agosto de 2016). Filosofía. Qué es la Lógica... ¿? [Archivo de video] YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=va3kFdSVlrk>
- Filosofía Libre. (12 de octubre de 2021). Disciplinas filosóficas. [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=w4En-ObFbuE>
- García, M. M. (1938). Lecciones preliminares de filosofía. Nuevo talento.
- García, J. (2018). Lógica. Esfinge.
- González, V. J. (2007). El Ethos, destino del hombre. (2ª ed.). FCE.

- Habermas, J. (1999). Teoría de la acción comunicativa, I. Racionalidad de la acción y racionalización social. Taurus. https://pics.unison.mx/doctorado/wp-content/uploads/2020/05/Teoria-de_la_accion_comunicativa-Habermas-Jurgen.pdf
- Hegel, G. (2017). Fenomenología del espíritu. (2ª ed.). FCE.
- Herrera I. A. y Torres, J. (2007). Falacias. Editorial Torres Asociados
- Historiclases. (26 de diciembre de 2020). Los métodos de la Filosofía. [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=63BQxf2S6zk>
- JenniferBeltrn. (16 de noviembre de 2012). Teoría de la Acción Comunicativa. [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=uvdDyPz9rgU>
- Lipovetsky, G. (1996). La era del vacío. Anagrama.
- Montesquieu. (2007). Del espíritu de las leyes. Tecnos.
- Mora, J. (2015). Diccionario de Filosofía. Alianza.
- Pallares, E. (1964). Diccionario de filosofía. Porrúa.
- Platón. (2019). Diálogos. Porrúa.
- Priani, S. E. y López, M. I. (2009). Historia de las doctrinas filosóficas. Prentice Hall.
- Rafilosofía. (6 de octubre de 2021). Los problemas filosóficos. [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=Oa5lmez1dH0>
- Reygadas, P. (2015). El arte de argumentar. Sentido, forma, dialogo y persuasión. UACM
- Rousseau. (2015). El contrato social. Alianza.
- Russell, B. Los problemas de la Filosofía. Centro mexicano de estudios culturales.
- Sánchez, V. A. (1980). Filosofía de la praxis. Grijalbo.
- Sánchez, A. (2007). Ética. Debolsillo.
- Sartre, J.P. (2017). El existencialismo es un humanismo. Época.
- Séneca. (2006). Sobre la felicidad. Alianza.
- sulycastrom. (23 de abril de 2016). Cortina, A. (2014) ¿Qué es y para qué sirve la Ética? [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=JspFfzuJvec>
- sulycastrom. (27 de julio de 2020). Ética y moral (Adela Cortina). [Archivo de video]. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=EYpV6H26GYk>
- Ugalde, Q. J. (2017). El asombro, la afección originaria de la filosofía. ARETÉ. Revista de Filosofía, XXIX(1), 167-181. <http://revistas.pucp.edu.pe/index.php/arete/article/view/18967/19193>
- Unboxing Philosophy. (26 de febrero de 2017). Lógica y Tablas de Verdad. [Archivo de video]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=G53Da_gzso0
- Valenzuela, G. E. (1995). Filosofía. McGraw-Hill.
- Vatimo, G. (2010). Adiós a la verdad. Gedisa.
- Wolff, J. (2009). Filosofía política. Una introducción. Ariel.

Xirau, R. (2000). Introducción a la historia de la Filosofía. UNAM.
<http://www.proglocode.unam.mx/system/files/Xirau%20R%202010.pdf>

Ciencias Experimentales

3. Biología

3.1 Origen de la vida

Química prebiótica

Una de las preguntas más controversiales que el ser humano se ha hecho, es sobre cómo podría haber surgido la vida en la Tierra. En la antigüedad, la mayoría aseguraba que la vida había sido creada por un ser divino todopoderoso, y es una idea incuestionable para muchos. Con el pasar del tiempo fueron surgiendo diversas teorías debido al avance en los estudios científicos.

Teoría abiogenista o de la generación espontánea

Aristóteles decía que el origen de gusanos, insectos y peces provenía del rocío, sudor y humedad, aseguraba así que la vida surge de la materia inerte: lodo, agua o de las combinaciones de los cuatro elementos fundamentales: aire, fuego, agua, y tierra. A la interacción de la materia no viva con las fuerzas capaces de darle esta, le llamaba Entelequia. Más adelante Helmont propuso una receta para generar ratones: poner ropa sucia, maíz y esperar 21 días.

Teoría biogenista

Francisco Redi fue el primero en refutar la teoría de la generación espontánea con un sencillo experimento, en 3 frascos colocó carne, uno lo dejó abierto, otro lo cubrió con una tela y el último lo selló, en el primero se formaron larvas y moscas en la carne, en el segundo, gusanos y moscas sobre el lienzo de tela y en el tercero no se formó nada. Más adelante la idea fue comprobada rotundamente por Luis Pasteur con su experimento (figura 1).

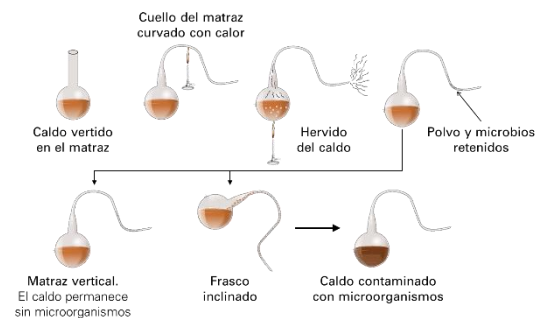


Figura 1. Experimento de Pasteur.

Panspermia

Svante August Arrhenius en 1908 propuso la teoría de que la vida en la Tierra tiene un origen extraterrestre por las esporas descubiertas en un meteorito.

Síntesis abiótica

Alexander Oparin y John Haldane sugirieron que la vida podría haber surgido por la interacción de moléculas inorgánicas (CH_4 , CO , CO_2 , NH_3 , H_2 , N_2 , vapor de H_2O y HCN) teóricamente presentes en una atmósfera muy antigua, estas sustancias se disolvieron en los cálidos océanos (sopa primigenia), el agua recibió descargas eléctricas y radiaciones UV produciendo moléculas orgánicas sencillas como: Alanina (un aminoácido), Ribosa (un azúcar), Adenina (una purina) y Citosina (una pirimidina) que son las moléculas precursoras de la vida.

3.2 Biomoléculas

Biomoléculas orgánicas

En los organismos se encuentran cuatro tipos diferentes de moléculas orgánicas en gran cantidad: carbohidratos, lípidos, proteínas y nucleótidos.

Todas estas moléculas están compuestas por el famoso C, H, O, N, P y S, en diferentes proporciones.

Los carbohidratos son la fuente primaria de energía química para los sistemas vivos. Los más simples son los monosacáridos (azúcares simples). Los monosacáridos pueden combinarse para formar disacáridos (dos azúcares) y polisacáridos (cadenas de muchos monosacáridos).

Los lípidos son moléculas hidrofóbicas que, como los carbohidratos, almacenan energía y son importantes componentes estructurales. Como ejemplo están las grasas, los aceites, los fosfolípidos, los glucolípidos, y el colesterol.

Las proteínas son moléculas muy grandes compuestas de cadenas largas de aminoácidos, conocidas como cadenas polipeptídicas. A partir de sólo 20 aminoácidos diferentes usados para hacer proteínas se puede sintetizar una inmensa variedad de diferentes tipos de moléculas proteínicas, cada una de las cuales cumple una función altamente específica en los sistemas vivos.

Los ácidos nucleicos son moléculas complejas formadas por un grupo fosfato, un azúcar de cinco carbonos y una base nitrogenada. Son los bloques estructurales de los ácidos desoxirribonucleico (DNA) y ribonucleico (RNA), que transmiten y traducen la información genética. Los nucleótidos también desempeñan papeles centrales en los intercambios de energía que acompañan a las reacciones químicas dentro de los sistemas vivos. El principal portador de energía en la mayoría de las reacciones que ocurren dentro de las células es un nucleótido que lleva tres fosfatos, conocido como ATP.

Biomoléculas inorgánicas

Son compuestos fundamentales para la vida pero que no están basados en el Carbono, exceptuando el CO_2 . Ejemplos de estas son: agua (H_2O), amoníaco (NH_3), sales minerales (NaCl) y ozono (O_3).

El agua

La vida, depende de la presencia de agua: impregna todas las partes de la célula, constituye el medio en el que se realiza el transporte de los nutrientes, las reacciones del metabolismo y la transferencia de energía química, el agua es el componente mayoritario de los seres vivos (70%), disuelve a la mayor parte de los compuestos iónicos, lo que se debe a su naturaleza polar, es conocido como el disolvente universal.

Sales minerales

Tienen una función principalmente esquelética o de sostén, como el carbonato cálcico (CaCO_3), el fosfato cálcico ($\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$), constituye la materia mineral de los huesos de los vertebrados, aunque no es una sal, el dióxido de silicio (SiO_2) desempeña una función semejante: impregna y endurece los tallos de muchas plantas.

3.3 Taxonomía

Clasificación de los seres vivos

La taxonomía es la ciencia que estudia los principios, métodos y fines de la clasificación. Este término se utiliza especialmente en biología.

Los seres vivos se clasifican de acuerdo con sus características anatómicas, lo que está relacionado con la cercanía o parentesco que los organismos tienen entre sí. Aristóteles fue el primero que intentó clasificar a los seres vivos. Sin embargo, la taxonomía moderna surgió hasta la segunda mitad del siglo XVIII, cuando Carlos Linneo, naturalista sueco, retomó los trabajos de Aristóteles y propone la nomenclatura binomial donde cada organismo debe tener un nombre científico formado por un género y una especie.

El género es una categoría que puede incluir muchas especies, por ejemplo, el perro doméstico tiene el nombre científico de *Canis familiaris*, donde *Canis* es el género y *familiaris* la especie; sin embargo, existen otras especies dentro de este género como el lobo (*C. lupus*), el coyote (*C. aureus*), el chacal (*C. latrans*), entre otros.

En los sistemas de clasificación actuales, los científicos han ideado ocho diferentes taxa o categorías taxonómicas, que se ordenan formando una estructura jerárquica (dominio, reino, *phylum*, clase, orden, familia, género y especie) en la que cada categoría incluye a todas las ubicadas por debajo de ella. De esta manera, las categorías con menos organismos y los más relacionados son las inferiores, mientras que las categorías superiores grandes e incluyentes tienen a organismos muy distintos, cuyo ancestro común es muy lejano.

La actual clasificación de los seres vivos incluye tres dominios y cinco reinos. Los dominios agrupan a los seres vivos por sus características celulares y los reinos los agrupan por su parentesco evolutivo. El sistema de clasificación de los seres vivos se estructura de la siguiente manera:

1. Dominio *Eukarya*
2. Dominio *Bacteria*
3. Dominio *Archaea*

Y los siguientes reinos:

1. Reino *Animal*
2. Reino *Vegetal o plantae*
3. Reino *Fungi*
4. Reino *Monera*
5. Reino *Protista*

3.4 Célula

Componentes celulares

La teoría celular fue propuesta por Mathías Schleiden y Theodore Schwann entre 1838 y 1839, los postulados son: todos los seres vivos están formados por una o más células (unidad estructural), toda célula proviene necesariamente de una célula preexistente (unidad de origen) y en la célula se llevan a cabo todos los procesos vitales (unidad funcional).

La célula es la unidad básica, estructural y funcional de todo ser vivo.

Tipos	
Procariontes	Eucariontes
• No poseen núcleo verdadero • Tienen ADN de cadena sencilla • No poseen organelos membranosos • La poseen los organismos del reino <i>monera</i> (bacterias y cianofitas, según Whittaker o dominios <i>archaeas</i> y <i>eubacterias</i> según Woese	• Poseen núcleo verdadero • Tienen ADN de doble cadena • Poseen organelos membranosos • Lo poseen los reinos: <i>Protista</i> (algas y protozoarios), <i>Fungi</i> (hongos), <i>Plantae</i> y <i>Animalia</i>, según Whittaker o el dominio <i>Eukaria</i>, según Woese

A continuación, se muestran algunas partes de las células y su función:

Organelo	Función
Membrana celular	Regula el intercambio de sustancias entre la célula y su medio externo: Transporte celular
Citoplasma	Reacciones químicas de la ruta metabólica
Núcleo	Replicación del ADN, división celular y transcripción
Mitocondria	Respiración celular
Ribosoma	Síntesis de proteínas
Retículo endoplásmico	Liso: sintetiza y procesa lípidos y Rugoso: produce proteínas
Aparato de Golgi	Almacenamiento y secreción de sustancias
Lisosoma	Se encarga de la digestión o degradación
Centriolo	Participa en la división celular. Presente en células animales y angiospermas
Cloroplasto	Fotosíntesis, la realizan las células vegetales
Vacuola	Contiene agua y enzimas digestivas
Pared celular	Proporciona forma y rigidez a la célula, la poseen las células vegetales, bacterias y hongos.

Tabla 1. Partes y funciones de la célula.

3.5 Metabolismo celular

Respiración celular

El término respiración celular se refiere a la ruta bioquímica por la que las células liberan energía de los enlaces químicos de las moléculas de los alimentos, y proporcionan esa energía para los procesos esenciales de la vida. Todas las células vivas tienen que llevar a cabo la respiración celular. Puede ser respiración aeróbica en presencia de oxígeno o respiración anaeróbica sin la participación del oxígeno.

Las células procariotas llevan a cabo la respiración celular dentro del citoplasma o en las superficies internas de las células. Las células eucariotas son el lugar donde se produce la mayoría de las reacciones.

La moneda de energía de estas células es el ATP y una manera de ver el resultado de la respiración celular, es viendo el proceso de producción de ATP.

Fotosíntesis

La fotosíntesis es un proceso que puede definirse como la utilización de luz solar para sintetizar moléculas orgánicas en alimentos, a partir de moléculas más simples como el CO_2 y H_2O , dicho de otra manera, la captación de energía lumínica para ser utilizada en la transformación del CO_2 y otras en moléculas alimenticias que almacenan energía química.

De acuerdo con la sustancia externa que actúa como fuente de hidrógenos (y electrones) en el proceso, se habla de dos tipos de fotosíntesis: oxigénica (aerobia) y anoxigénica (anaerobia).

- Oxigénica (aerobia). Muchas células de las plantas utilizan el H_2O como fuente de hidrógeno para reducir al CO_2 y producir carbohidratos. Además, se libera O_2 , procedente de la molécula de agua, que se rompe durante el proceso. Estas células tienen clorofila (u otros pigmentos que le permiten capturar y utilizar la luz). Este tipo de fotosíntesis es la fuente más importante de los alimentos que consumimos los seres vivos, incluyendo a los humanos.
- Anoxigénica (anaerobia). Este tipo solo lo hacen algunas bacterias, las sulfurosas fotosintéticas, que al utilizar al H_2S (ácido sulfhídrico) como fuente de hidrógeno (en lugar de agua) y no liberan oxígeno al ambiente.

Etapas de la fotosíntesis

El proceso consta de una serie de complejas vías metabólicas que en términos generales se suele dividir en dos grandes etapas o fases: fase luminosa y fase oscura.

Fase luminosa. Son las reacciones que requieren luz y se caracterizan por:

- La absorción de energía lumínica de ciertas longitudes de onda (en especial azul y roja) por parte de las moléculas de la clorofila.
- La excitación de la clorofila desencadena una serie de procesos que permitirán la síntesis del ATP (con transformación de energía lumínica en energía química almacenada en el ATP).
- La absorción de energía lumínica por la clorofila, permitirá que las moléculas de H_2O se rompan o disocien (fotólisis) pasando sus hidrógenos a la coenzima NADP que se transforma en NADPH y además se libera oxígeno atmosférico.

Fase oscura. No utiliza energía lumínica y sus características son:

- En esta etapa se utilizan los productos de la fase luminosa, el ATP y el NADPH_2 para, junto con el CO_2 , producir compuestos orgánicos.
- El ATP proporciona la energía requerida para esta síntesis y el NADPH_2 los hidrógenos necesarios para la reducción del CO_2 .

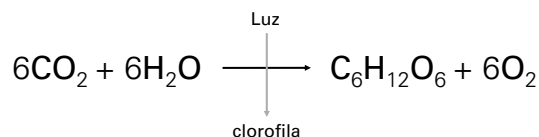


Figura 2. Fórmula general de la fotosíntesis.

3.6 Reproducción celular

Etapas y características del ciclo celular

Es el ciclo de vida de cada célula y conlleva cuatro etapas: G₁, crecimiento de las células hijas; S, replicación del ADN, G₂, aumento de la síntesis de proteínas y preparación para la división celular; estas tres etapas constituyen la interfase y M, división celular por mitosis.

Mitosis

Este tipo de división celular consta de cuatro fases:

1. Profase: la cromatina se condensa y los cromosomas se hacen visibles, la membrana nuclear que los envuelve comienza a desvanecerse, el centriolo se divide y entre las partes se comienza a formar el huso acromático.
2. Metafase: los cromosomas se alinean al centro de la célula, los centriolos están colocados en polos opuestos y entre ellos se encuentran los microtúbulos del huso acromático.
3. Anafase: los microtúbulos del huso acromático están unidos al cinetocoro del cromosoma y jalan desde este para conducir a cada cromátida a un polo opuesto.
4. Telofase: la membrana celular comienza a dividirse por la parte central, los cromosomas son envueltos por una membrana nuclear y el huso acromático se desintegra, finalmente la célula se divide en 2 (citocinesis).

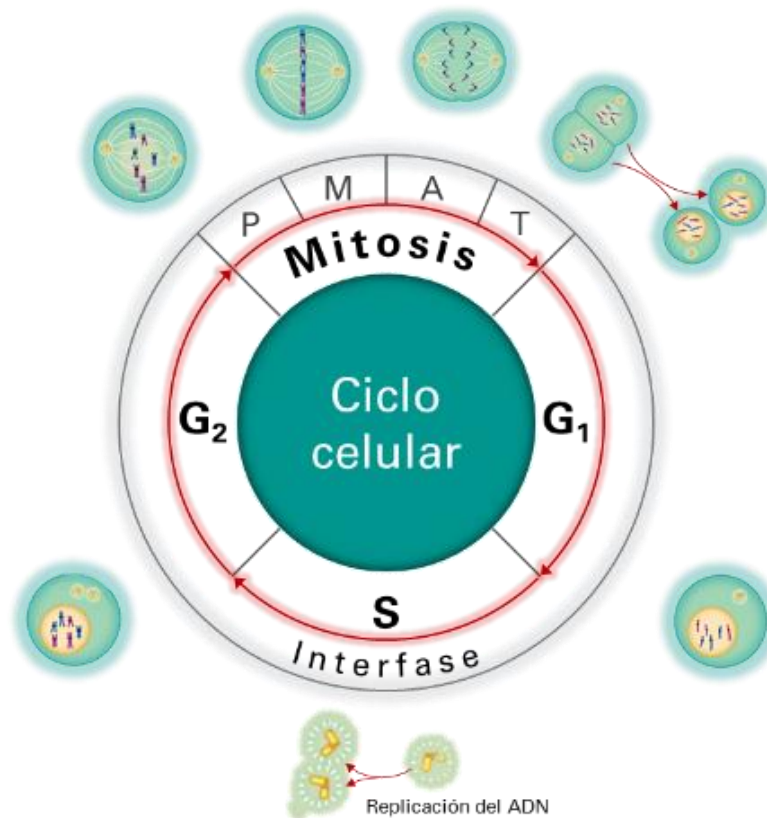


Figura 3. Ciclo celular.

Meiosis

Es un proceso de división celular especial, ya que sólo se presenta en células gaméticas (sexuales: óvulos y espermatozoides), se llevan a cabo dos divisiones celulares consecutivas. Lo más importante de este proceso es que hay un intercambio genético durante la profase y el resultado son cuatro células hijas distintas a su progenitora y con la mitad del número cromosómico.

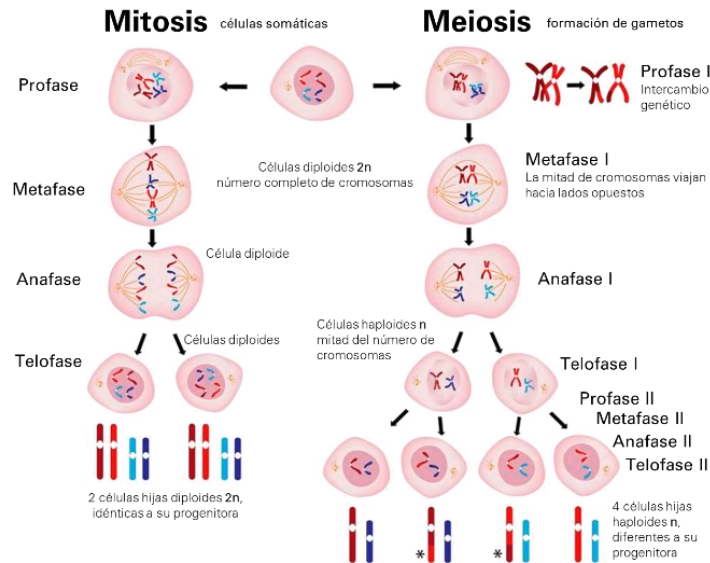


Figura 4. Mitosis y meiosis.

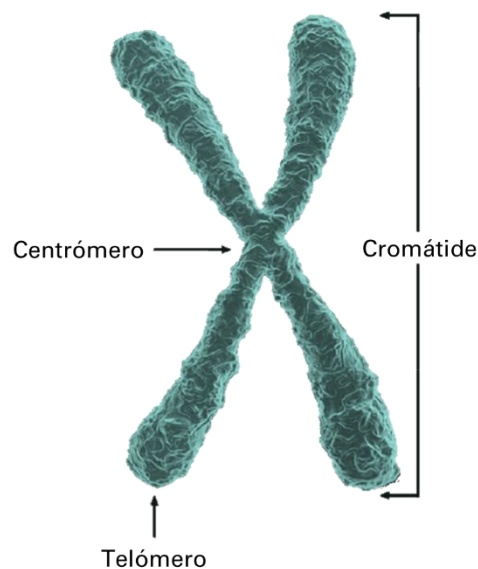


Figura 5. Cromosoma.

3.7 Comunicación celular

Autocrina

En este tipo de comunicación, la misma célula que secreta el ligando será a su vez la receptora de dicho ligando.

Endócrina

Sucede cuando la célula receptora (diana) y la célula emisora se encuentran muy distantes la una de la otra dentro del organismo, por lo que la hormona viaja por el torrente sanguíneo para llegar a la célula receptora.

Paracrina

Se da cuando la molécula señal (ligando) sólo afecta a las células que se encuentran cercanas a la célula que secretó al ligando.

Yuxtacrina

Comunicación por contacto directo entre células, en este caso, la molécula que actúa como ligando puede permanecer unida a la célula emisora durante su interacción con la célula receptora.

3.8 Genética

Genética mendeliana

La genética es la parte de la biología que estudia los genes y los mecanismos que regulan la transmisión de los caracteres hereditarios.

La herencia es el proceso por el cual las características de los individuos se transmiten a su descendencia; el DNA (ácido desoxirribonucleico) contiene la información genética en la forma de secuencias de nucleótidos, en los cuales se encuentran los genes que codifican la información necesaria para sintetizar una proteína específica. Los cromosomas están formados de DNA y varias proteínas. Los genes por consiguiente son parte de los cromosomas. Finalmente, los cromosomas se transmiten de una célula a otra y de un organismo a otro durante la reproducción. Así la herencia ocurre cuando los genes se transmiten de un progenitor a su descendencia.

Gregor Mendel asistió a la Universidad de Viena durante 2 años donde estudió botánica y matemáticas, entre otras materias; utilizó sus conocimientos para realizar una serie de experimentos revolucionarios sobre la herencia en guisantes (chicharos) comunes comestibles, estudio la herencia en las plantas de chicharos para entender su genética, estos experimentos establecieron las bases para entender cómo se heredan los rasgos y sentaron las bases de la genética.

Primera ley de Mendel (Ley de uniformidad)

Esta ley manifiesta que, si se cruzan dos razas puras, es decir, que tengan dos alelos dominantes (A) o bien, dos alelos recesivos (a) para un determinado carácter, se obtendrán hijos/as iguales entre sí en términos fenotípicos o genotípicos, así como iguales al progenitor que presente el alelo dominante (A).

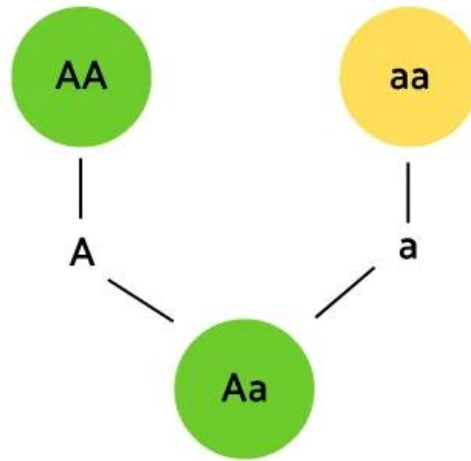


Figura 6. La primera será una semilla homocigota dominante (AA) que tiene dos alelos verdes, es decir, el color verde es dominante; y la segunda será una semilla homocigota recesiva (aa) que tiene dos alelos amarillos, es decir, el color amarillo es recesivo. Entonces, al cruzar estas dos semillas homocigotas nos resulta una primera generación conformada por 4 descendientes, todos ellos heterocigotos con el mismo genotipo (Aa) y con el color verde dominante..

Segunda ley de Mendel (Ley de segregación)

Esta defiende que el cruce de dos individuos de la primera generación (Aa) dará lugar a una segunda generación filial. En esta, se recupera el fenotipo del individuo recesivo (aa) de la primera generación. Por lo tanto, el carácter recesivo permanecerá oculto en una proporción de 1 a 4.

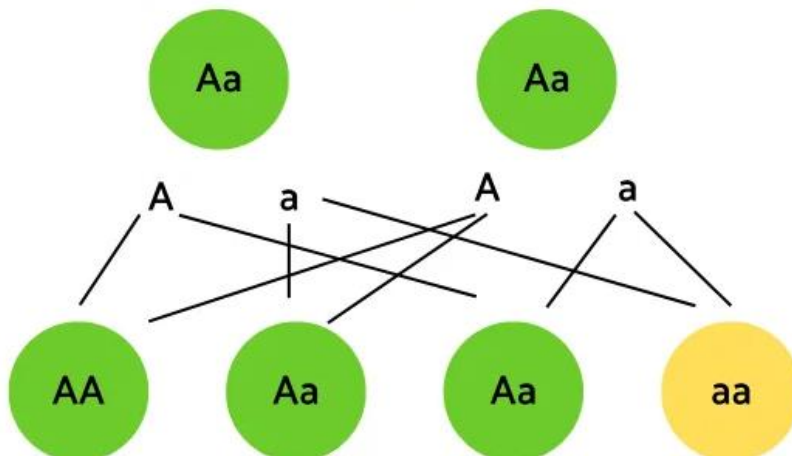


Figura 7. Si tomando dos organismos de la primera generación de arveja (Aa) y los cruzamos, obtendremos que la mitad de los nuevos descendientes son homocigotos (dominantes y recesivos), y la otra mitad son heterocigotos. Por tanto, podemos decir que los genes de la primera generación se segregaron en la segunda generación, generando así descendientes diferentes a sus padres.

Tercera ley de Mendel (Ley de transmisión independiente)

Esta ley nos indica que los rasgos heredados se transmiten independientemente unos de otros, sin ninguna relación entre ellos, y además no existirá un patrón de herencia que afecte al de otro, esto quiere decir que los alelos, o variaciones, de un gen se transmitirán de forma independiente a los alelos de otro gen.

	AB	Ab	aB	ab
AB	AABB	AABb	AaBB	AaBb
Ab	AAbB	AAbb	Aabb	Aabb
aB	aABB	aABb	aaBB	AaBb
ab	AaBb	aAbb	aabB	aabb

Figura 8. Si realizamos el cruzamiento de 2 semillas representadas de la siguiente forma: AABb, aaBb, y 2 semillas con las mismas características: AABb y aaBb; obtendremos una proporción de 9:3:3:1, lo que se interpretaría como 9 semillas amarillas y lisas, 3 semillas amarillas y rugosas, 3 verdes y lisas, y por último una semilla verde y rugosa

3.9 Evolución

Teoría evolutiva de Lamarck

Lamarck decía que el motor de la evolución era una fuerza vital que proporcionaba a las especies la capacidad de cambiar su estructura y comportamiento según sus necesidades. Sus postulados son: Automejoramiento de las especies, las especies cambian a voluntad propia; uso y desuso de órganos, se desarrollan más los órganos que utiliza con mayor frecuencia.

Teoría catastrofista de George Cuvier

Paleontólogo que en excavaciones encontró una gran variedad de organismos en diferentes estratos, por lo que indujo que quizá después de cada gran catástrofe, las especies morían en su totalidad, para aparecer otras nuevas en la siguiente generación.

Teoría evolutiva de Darwin

Basada en la selección natural, sus postulados son:

- Variabilidad: variaciones genéticas al azar.
- Sobreproducción: generación de mucha descendencia que no sobrevive hasta la edad adulta.
- Lucha por la existencia: competencia por sobrevivir.
- Supervivencia del más apto: el medio selecciona a los organismos mejor adaptados.
- Herencia de las variaciones favorables: los adaptados se reproducen y heredan sus características.
- Especiación: origen de nuevas especies.

Teoría sintética

Sus representantes son: Theodosius Dobzhansky, Ernst Mayr, Julian Huxley y George Simpson; estos autores integran los estudios de Darwin basados en la selección natural, los de Gregor Mendel como base de la herencia biológica y la genética de poblaciones. Sus principales aportaciones son, fijar a las mutaciones y a la recombinación genética como las principales fuentes de variabilidad genética, manejar conceptos de fondo o reserva genética, flujo genético, evolución convergente y divergente.

Tipos de adaptación al medio: morfológicas (forma), anatómicas (estructura), fisiológicas (función) y conductuales (comportamiento).

Evidencias de evolución: registro fósil, anatomía comparada, embriología comparada y genética poblacional, basadas en ellas se presentan los diversos patrones de evolución, la divergencia, todos descienden de un ancestro común. Convergencia dos organismos se encuentran en un tipo y espacio determinado, sus semejanzas van siendo cada vez menores hasta que de ellos surge una nueva especie.

3.10 Poblaciones

Estructura y dinámica poblacional

Una población es un grupo de organismos de la misma especie que se cruzan entre sí y que conviven en el espacio y en el tiempo. El conocimiento de la dinámica de poblaciones es esencial para los estudios de las diversas interacciones entre los grupos de organismos y tiene, además, una importancia práctica enorme.

Entre las propiedades de las poblaciones, que no son propiedades de los individuos, se encuentran los patrones de crecimiento, de mortalidad, la estructura etaria (de edades), la densidad y la distribución espacial. La tasa de crecimiento de una población es el incremento en el número de individuos en una unidad dada de tiempo por cada individuo presente.

En ausencia de inmigración neta (movimiento de otros individuos de la especie hacia la población desde cualquier otro sitio) o de emigración neta (la salida de individuos de la población), el incremento es igual a la tasa de natalidad menos la tasa de mortalidad. Así, la tasa de crecimiento puede ser igual a cero, positiva o negativa (como lo es actualmente para la población humana en algunos países).

3.11 Comunidad

Relaciones interespecíficas

Las poblaciones no viven aisladas en el ambiente, por el contrario, se establecen interacciones muy intensas entre las distintas poblaciones de especies diferentes, a lo que se le llama comunidad. Por ello, se denominan interacciones interespecíficas.

Entre las poblaciones que coexisten en un mismo ambiente se establecen interacciones muy intensas, ya sea por competir por un recurso compartido como puede ser el alimento, la luz, el espacio, la humedad entre otros; igualmente una población puede depender de otra como fuente de alimento, para brindarse ayuda mutua o tal vez, la presencia de una población no tenga ningún efecto directo sobre otra.

Entre las relaciones mencionadas se pueden reconocer aquellas que causan un efecto negativo en alguna de las poblaciones relacionadas, simbolizado con (-); aquellas que causan un efecto positivo entre las poblaciones implicadas en dicha interacción, simbolizándose como (+) y también pueden no tener efecto directo alguno (0).

Las principales interacciones son las siguientes:

Mutualismo

Es una relación recíproca positiva entre dos especies distintas. Con esta relación, ambas especies aumentan su supervivencia, crecimiento o reproducción.

El mutualismo a su vez se puede clasificar en: simbiótico (los individuos interaccionan físicamente y su relación es obligatoria, un ejemplo son las “micorrizas”, unas relaciones mutualistas que se establecen entre las raíces de las plantas y los hongos) o asimbiótico (los organismos llevan vidas separadas, sin embargo, ambos dependen de alguna manera del otro).

Un ejemplo es el que se presenta entre algunas plantas y los insectos comedores de néctar, donde los insectos se alimentan del polen o del néctar de las flores de estas plantas, pero que, al llevar los granos de polen de las anteras de una planta al estigma de otra de la misma especie, aseguran de esta forma la reproducción de las plantas y la alimentación de los insectos.

Comensalismo

Es la relación en la que una especie se beneficia al asociarse a otra y esta última no se afecta en ningún sentido, ni negativo, ni positivo. Por ejemplo, el tronco o las ramas de un árbol proporcionan el sustrato donde crecen las orquídeas, que consiguen sus nutrimentos a través de sus raíces aéreas, al tiempo que el árbol no se ve afectado.

Competencia

Es la relación que se presenta en poblaciones de ambas especies involucradas, es decir, las dos especies que entran en competencia se ven afectadas negativamente. La competencia se establece cuando las dos especies utilizan un mismo recurso, el cual es escaso, ejemplo de esto son los leones que compiten por una pareja, comida o territorio.

Amensalismo

Es la relación que se presenta cuando la población de una especie afecta negativamente a la población de otra, pero la primera especie no se ve afectada en absoluto. Siendo una relación, por ejemplo, las poblaciones de nutrias que acostumbran acumular su excremento y con ello causan la muerte de la mayoría de las plantas del sitio de acumulación.

Depredación

La población depredadora tiene un efecto positivo y la población de la especie presa experimenta un efecto negativo en esta relación. Esto es, la especie depredadora incrementa el tamaño de su población al alimentarse de la población de la presa, de la que se observa una disminución en sus integrantes; ejemplo, el coyote y los ratones de campo o la horca y las crías de lobos marinos.

Parasitismo

En este tipo de relación, la población de la especie parásito presenta un efecto positivo (+), al alimentarse del hospedero, por lo que la población de la especie hospedera muestra un efecto negativo (-). Un ejemplo es la lombriz intestinal, piojos, pulgas, garrapatas, etc., que viven en hospederos como los mamíferos.

3.12 Ecosistemas

Ciclos Biogeoquímicos Ecosistema

Espacio donde interactúan el ambiente abiótico (sin vida) y el biótico (seres vivos). Un ecosistema posee características propias y distintivas y puede ser muy pequeño o tan grande como se desee estudiar. Las conexiones entre el ambiente biótico y abiótico son por medio de la energía y materia que fluyen entre ellos de manera lineal y cíclica.

En un ecosistema los materiales se reciclan y la energía fluye en una sola dirección. La principal fuente de energía es el Sol. Para estudiar como flujo de energía se utiliza un esquema llamado pirámide trófica:

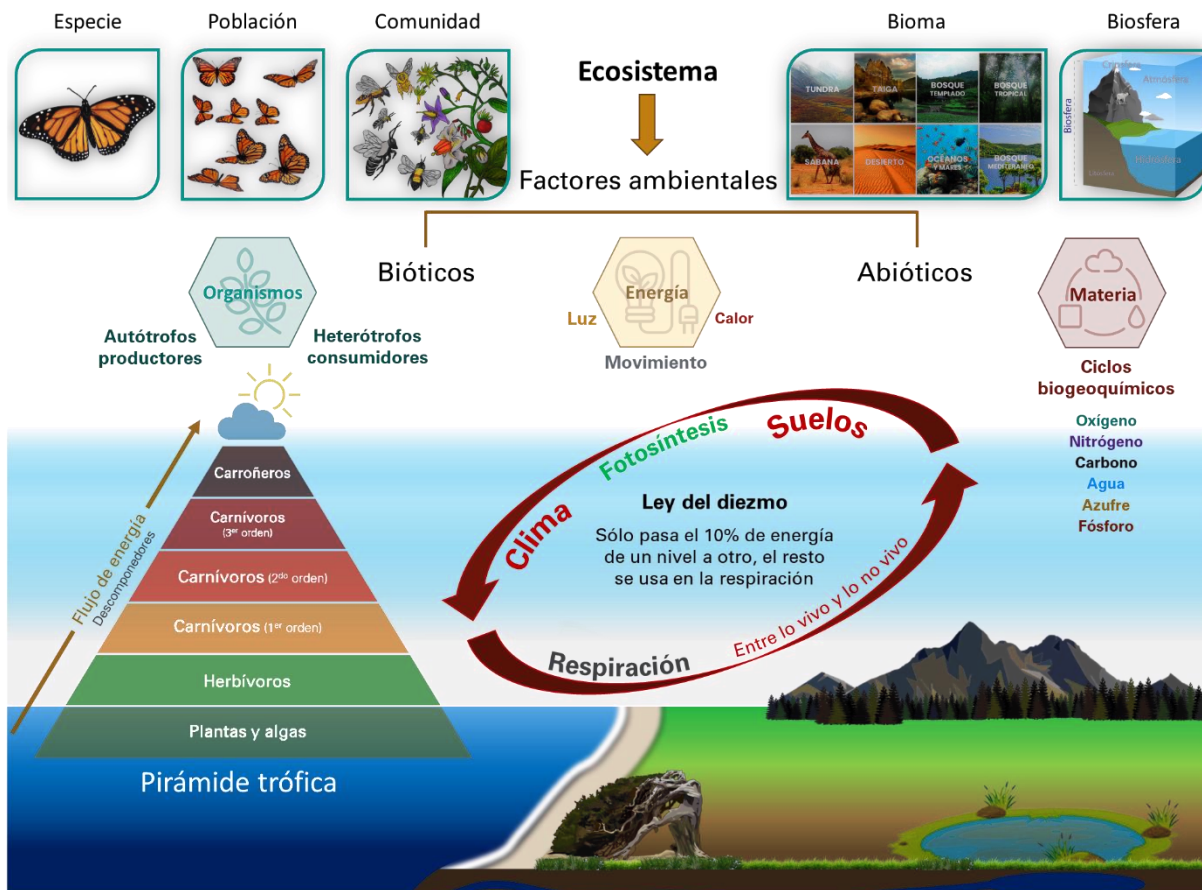


Figura 9. Pirámide trófica en un ecosistema.

La materia fluye de manera cíclica entre los ambientes, los principales ciclos son:

- Gaseosos: oxígeno, nitrógeno y carbono
- Hidrológico y sedimentarios: azufre y fósforo

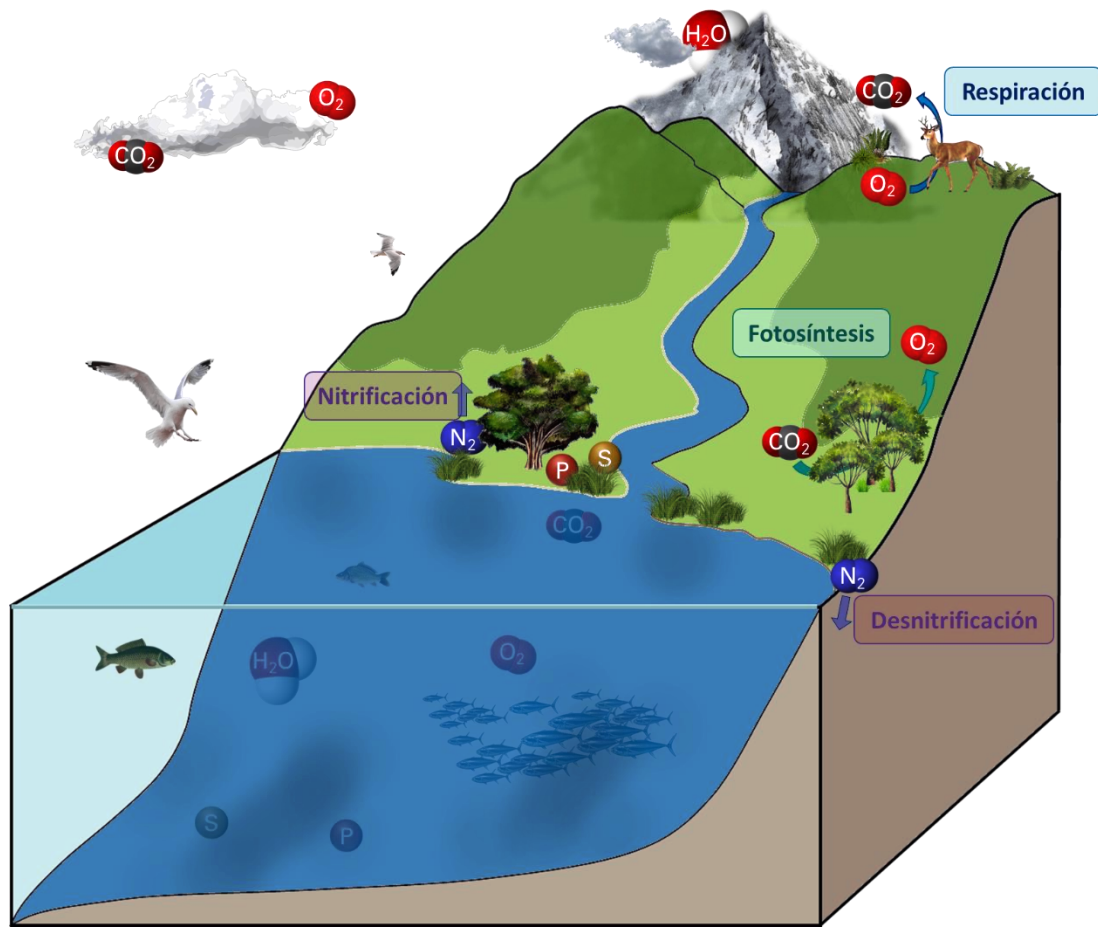


Figura 10. Ejemplo de algunos ciclos biogeoquímicos.

Bibliografía sugerida

Audesirk, T y Audesirk, G. (2008). Biología: Ciencia y naturaleza. 2da. Edición. Edit. Pearson.

Audesirk, T. Audessirk G. y Byers, B. (2004). Biología Ciencia y Naturaleza. Pearson Prentice Hall.

Compendio fascicular. Biología I. (2009). Colegio de bachilleres. Edit. Limusa.

Curtis H.et. al. (2008). Biología. Editorial Panamericana.

Odum, E.P. (1994). Ecología. 3a. edición. Editorial Interamericana.

Valverde, T., Santana Z., Meave J. y Carabias J. (2005). Ecología y Medio Ambiente. Ed. Pearson Prentice Hall.

Bibliografía electrónica

Khan Academy. (1 de julio de 2025). Evolución de las especies.

https://es.khanacademy.org/search?referer=%2Fscience%2Fap-biology%2Fnatural-selection%2Forigins-of-life-on-earth%2Fa%2Fhypotheses-about-the-origins-of-life&page_search_query=Evolucion+de+las+especies

Khan Academy. (1 de julio de 2025). Hipótesis sobre el origen de la vida.

<https://es.khanacademy.org/science/ap-biology/natural-selection/origins-of-life-on-earth/a/hypotheses-about-the-origins-of-life>

López, J. M., & Moreno, E. (1 de julio de 2025). Genética y las leyes de Mendel: las leyes de Mendel. Museo Virtual de la Ciencia del CSIC. CSIC - Museo Virtual de la Ciencia.

<http://museovirtual.csic.es/salas/mendel/m11.htm>

4. Geografía

4.1 Mapas

Representaciones espaciales

Un mapa es la representación plana, reducida y simplificada de la superficie terrestre o de una parte de ésta, también recibe el nombre de carta geográfica.

Las personas que hacen mapas se llaman cartógrafos, fueron ellos quienes idearon las proyecciones para tratar de eliminar la deformación que resulta al representar un geoide (cuerpo achatado en los polos, como la Tierra) en un plano.

Los mapas impresos son representaciones de la superficie terrestre de forma plana, en ellos se puede representar el total de la superficie terrestre o solo una porción, ya que esto depende del tipo de estudio a realizar, su manejo es más sencillo y permite un mayor detalle en la información que se vaya a estudiar. Sin embargo, los mapas al construirse sobre la base de que la Tierra no es plana, se hace uso de diversas proyecciones cartográficas para corregir los errores de representación.

Los elementos fundamentales que un mapa debe de contener son los siguientes: título, simbología, escala y coordenadas.



Figura 1. Elementos de un mapa.

Fuente: Elaboración propia, tomado de: INEGI. Marco Geoestadístico Nacional, 2023.

Algunos usos de los mapas son:

- Representar el mundo o alguna de sus partes
- Tener un conocimiento más real del planeta en que vivimos
- Saber con precisión dónde estamos y cómo llegar a otro lugar
- Comprender el contexto del lugar donde vivimos

- Conocer la interrelación de elementos que constituyen un espacio geográfico
- Ubicar los continentes y países, así como las ciudades y localidades
- Localizar ríos, lagos, vegetación y montañas

4.1 Sistema de Información Geográfico

En la actualidad una herramienta de representación de la superficie de la Tierra dinámica son los Sistema de Información Geográfico (SIG) que son un conjunto de herramientas informáticas y cartográficas, cuya finalidad es la obtención de datos relacionados con el espacio físico, ya que permite a los usuarios crear consultas interactivas, integrar, analizar y representar de una forma eficiente cualquier tipo de información geográfica referenciada asociada a un lugar, país o el resto del mundo, conectando mapas con bases de datos. Los SIG están conformados por dos componentes importantes:

- Una base de datos, en la cual se almacenan características del espacio geográfico, junto con información georreferenciada (coordenadas), donde se muestran las diversas relaciones existentes los elementos del espacio geográfico.
- Funciones o comandos que permiten al usuario consultar la base de datos y obtener respuesta, en base a datos o imágenes (mapas digitalizados).

El SIG lo utilizamos todos los días como, por ejemplo, el uso de *Google Maps* para llegar a algún lugar a través del uso del Sistema de Posicionamiento Global (GPS) de nuestro celular.

4.2 Estructura de la Tierra

Placas tectónicas, sismicidad y vulcanismo

Los agentes internos (el vulcanismo y el tectonismo) crean nuevas formas de relieve, pero éstas no son indestructibles, sino que en el transcurso de millones de años son modificadas continuamente por los denominados agentes externos: estos son el viento, el agua, los cambios de temperatura, la acción de los elementos químicos disueltos en el agua y en el aire, así como las acciones de los seres vivos.

Los sismos son fenómenos naturales que se producen por la liberación repentina de energía acumulada en las rocas. Por su origen, los sismos pueden ser tectónicos, volcánicos o artificiales.

Las erupciones volcánicas son emisiones de magma y gases calientes, ceniza, gravas o fragmentos de roca, que fluyen a través de un conducto o fisura de la corteza terrestre.

Los agentes externos cambian paulatinamente todos los relieves del planeta y pueden convertir en amplias llanuras, zonas montañosas; en estos cambios participan dos procesos estrechamente relacionados: el intemperismo y la erosión. El primero consiste en la transformación y destrucción de las rocas, esta acción puede ser mecánica o química. El segundo, se refiere a la transportación y depositación de las rocas previamente intemperizadas.

La acción de estos procesos es tan lenta que, por ello, no resulta perceptible para los seres humanos, pero es continua y redistribuye los materiales de la superficie terrestre a lo largo de millones de años.

4.3 Recursos Naturales

Tipos de recursos

Recursos naturales, se refiere a todos aquellos medios, elementos o fuerzas que proporciona la naturaleza y que satisfacen las necesidades de los seres humanos. En vista de que los recursos son un bien, éstos se

pueden convertir en una fuente de riqueza, el cual puede ser explotado por algunos para luego ser consumido por las mayorías. Es decir, puede convertir en ricos a los que logren controlar los recursos y en pobres a los consumidores que no posean ese control.

Características de los recursos naturales.

- **Escasos:** no están presentes en cualquier espacio geográfico, ni en abundancia, muchos de ellos son finitos, es decir, algún día se terminarán.
- **Dependientes:** hoy más que nunca, cada recurso natural dependerá del correcto uso que le demos y de la capacidad que les proporcionemos para alargar su estancia en la Tierra.

Los recursos naturales pueden ser:

- **Renovables:** son aquellos recursos bióticos como el agua, el suelo, flora y fauna que si se aprovechan adecuadamente seguirán existiendo; se podrán renovar, y los seres humanos los podremos seguir disfrutando. Su costo puede ser menor en la medida que haya mayor número y costo cuando baje la cantidad. Con todo esto no significa que sean eternos, por ejemplo, si contaminamos el agua, podremos hacerla escasa; pero al mismo tiempo si la sometemos a tratamientos adecuados, puede ser reutilizada. El suelo puede sufrir un agotamiento por el mal uso de cultivos y se necesitará un proceso para volverlo a hacer rico en nutrientes.
- **No renovables:** son aquellos recursos que, aunque existan en cantidades enormes, tienden a desaparecer, además, es casi imposible regenerarlos o volverlos a crear. Tal es el caso de los minerales, el petróleo, el gas o los metales y los depósitos de agua subterránea. El costo de estos elementos es elevado y cuando más se acerque su fin, más caros serán.
- **Inagotables:** son aquellos recursos que, por su condición, no se agotarán, por lo menos en los próximos cientos de años. Entre ellos podremos encontrar a la energía solar, la energía de las olas, del mar y del viento. Si utilizamos adecuadamente éstos, los recursos no renovables podrán ser sustituidos por los inagotables.

4.4 Deterioro ambiental

Causas y afectaciones naturales

Se denomina fenómenos naturales a todos los procesos de cambio que ocurren en la naturaleza de manera constante y espontánea, sin que este presente la intervención humana. Pueden ser constantes y responder a los cambios físicos propios de la Tierra. Son acontecimientos extraordinarios e inusuales que pueden ser observables en diversos espacios geográficos. Por ejemplo, la lluvia es un tipo de fenómeno natural atmosférico, los arcoíris son fenómenos de tipo meteorológico y las corrientes oceánicas son fenómenos hidrológicos.

Existen diferentes tipos de fenómenos naturales que se categorizan a partir de sus características, su impacto en la naturaleza y en los seres vivos. En gran medida, los fenómenos naturales son inofensivos. Sin embargo, dependiendo de las dimensiones en que estos afecten la vida humana, pueden ser considerados como positivos o negativos, y catalogados como desastres naturales, según los daños generados.

Fenómenos como la lluvia, el viento, los sismos, etc., se pueden convertir en desastres naturales, cuando superan su límite de normalidad.

Se denomina desastre natural, a aquellos acontecimientos que son provocados por eventos naturales, este se amplifica debido la ubicación de los asentamientos humanos, sobre poblamiento, medidas y sistemas de alerta deficientes y/o poco conocidos.

Las graves consecuencias de los desastres naturales, se debe a las acciones del ser humano que no planifican ni prevén la posibilidad de que ocurra un fenómeno natural de gran impacto negativo. Por ejemplo, la construcción de viviendas en zonas de alto riesgo, la deforestación, la contaminación ambiental, entre otros.

Los fenómenos naturales que más comúnmente pueden conllevar a desastres naturales o estados de emergencia son:

- Fenómenos meteorológicos: vientos, precipitaciones (lluvias, granizadas, nevadas), inundaciones, huracanes, aquellos causados por el fenómeno del niño y muchos más.
- Fenómenos hidrológicos: oleajes, tsunamis o inundaciones.
- Fenómenos geológicos: avalanchas, derrumbes, deslizamientos, terremotos, erupciones, hundimientos de tierra, etc.

4.5 Desastres

Causas y afectaciones antrópicas

Se llama desastres naturales a los cambios repentinos y violentos del medio ambiente, causante de significativas pérdidas materiales y de vidas humanas, producto de accidentes ambientales que no son ocasionados directamente por la mano del hombre, tales como terremotos, tsunamis, vaguadas, etc.

Se habla así de desastres cuando ciertas condiciones ambientales se van a los extremos, rebasando los límites de lo considerado normal.

Por ejemplo, un sismo tectónico puede ser inofensivo, si no aumenta su intensidad y se convierte en un terremoto, capaz de ocasionar numerosas muertes y destrucción en las ciudades cercanas.

Del mismo modo, podría alegarse que los desastres nunca son del todo naturales, sino que se deben en cierta medida a la mala planificación (o falta total de ella), imprudencia o destrucción ambiental de las sociedades humanas.

No deben confundirse los desastres naturales con los desastres medioambientales, en los cuales un elemento específico contamina, degrada o destruye una determinada instancia del medio ambiente.

Las causas de un desastre natural no siempre son determinables, o simplemente responden a factores ambientales que resulta imposible predecir. Así, es posible explicar que los terremotos se deben al movimiento de las placas tectónicas terrestres, pero no cuándo ni dónde se producirá el siguiente o de cuánta intensidad será.

Los desastres naturales a menudo tienen consecuencias directas en la vida humana, ya que pueden costar la vida de numerosas personas (cientos, miles o incluso millones, dependiendo del caso) o pueden también desencadenar otros desastres a su paso. Por ejemplo, es frecuente que un terremoto muy intenso y cercano a la costa ocasione un tsunami, que a su vez inunde terrenos fértiles y conduzca a una hambruna.

4.6 Climas Terrestres

Elementos y factores del clima

Clasificación climática mundial de Köppen

Creada inicialmente por el climatólogo alemán Vladimir Köppen en 1884, describe cada tipo de clima con una serie de letras, que indican el comportamiento de las temperaturas y las precipitaciones. Es una de las clasificaciones climáticas más utilizadas debido a su generalidad y sencillez.

El sistema de Köppen se basa en que la vegetación natural tiene una clara relación con el clima, por lo que los límites entre un clima y otro se establecieron teniendo en cuenta la distribución de la vegetación. Los parámetros para determinar el clima de una zona son las temperaturas y precipitaciones medias anuales y mensuales, y la estacionalidad de la precipitación.

La clasificación divide los climas del mundo en cinco grupos principales, identificados por la primera letra en mayúscula. Cada grupo se divide en subgrupos, y cada subgrupo en tipos de clima. Los tipos de clima se identifican con un símbolo de dos o tres letras.

El primer nivel está constituido por cinco grupos climáticos básicos.

- Clima tipo A (tropical):
Su principal rasgo climático es la ausencia de invierno y una temperatura media superior a los 18 °C en todos los meses del año. También se caracteriza por un tipo de vegetación tropical.
- Clima tipo B (seco):
Precipitaciones escasas, la evaporación supera a la precipitación anual. La vegetación se limita a plantas xerófilas y no hay árboles.
- Clima tipo C (templado):
Se caracteriza por tener inviernos suaves en los que el mes más frío nunca presenta temperaturas medias inferiores a -3 °C. Los inviernos y veranos son variables pero nunca extremos.
- Clima tipo D (frío):
Los inviernos son fríos, la temperatura media mensual es inferior a los -3 °C, aunque por otra parte la del mes más cálido del año supera los 10 °C y el mes más frío es cercano a los 0 °C.
- Clima tipo E (más frío):
Sin verano, donde la temperatura del mes más cálido del año no alcanza los 10 °C y no hay vegetación.

Dentro de cada uno de estos cinco grandes grupos, Köppen establece una serie de subdivisiones añadiendo una segunda letra relativa a las precipitaciones con la siguiente nomenclatura, diferenciando mayúsculas y minúsculas:

Para los climas tipo B:

- S: clima estepario. La evaporación solar es superior a la precipitación, pero no la dobla. La vegetación consiste en praderas herbáceas.
- W: clima desértico. El índice de evaporación solar es más del doble que el de las precipitaciones.

Para los climas A, C y D:

- f: precipitaciones todo el año
- m (monzónico): con estación seca pero compensada por un alto nivel de precipitaciones anuales

- s: estación seca durante el verano del respectivo hemisferio
- w: estación seca durante el invierno del respectivo hemisferio

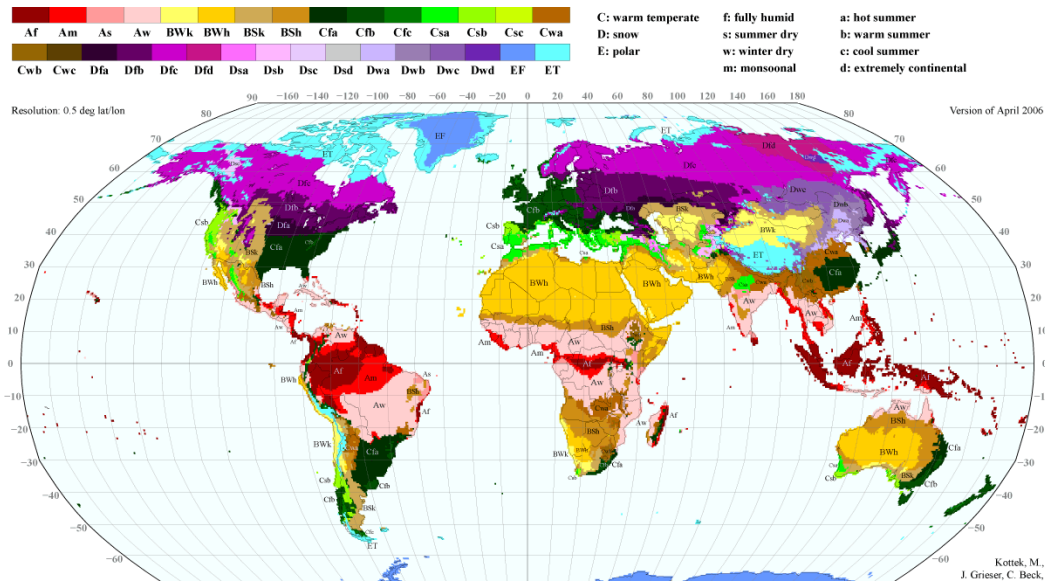


Figura 2. Mapamundi: Clasificación climática de Köppen.
Fuente: <https://koeppen-geiger.vu-wien.ac.at/present.htm>

4.7 Geografía de la Población

Indicadores Demográficos

El Índice de Desarrollo Humano (IDH) fue establecido en el año 2010 por el Programa de las Naciones Unidas para el Desarrollo (PNUD) que forma parte de la Organización de las Naciones Unidas (ONU), estableciendo tres indicadores para clasificar a los países en niveles de desarrollo humano.

Los indicadores son los siguientes:

- Esperanza de vida: expectativa de vida en años que vive una persona, en función de varios factores como la calidad de la salud pública, la alimentación, etc.
- Educación: tasa de alfabetización en adultos, acceso y duración a la educación obligatoria y tasa bruta de culminación de estudios.
- Ingreso per cápita: indicador macroeconómico de productividad y desarrollo económico medido en dólares.

4.8 Migración a nivel mundial

La dispersión de la población es un fenómeno en el que contribuyen factores históricos, culturales, económicos y geográficos que otorgan características particulares a los patrones de poblamiento regionales.

Esas características contribuyen a la dispersión y segregación de las personas, ya que condicionan la prestación de servicios, la construcción de infraestructura de comunicaciones, conectividad y transporte, porque en la mayoría de los casos son insuficientes para atender las necesidades de los habitantes que se establecieron en una determinada región, lo anterior por los altos costos que genera proveerlos de las instalaciones y los medios necesarios para recibir los bienes y servicios básicos, así como los elementos esenciales para su desarrollo.

Las tendencias futuras también obedecen a los efectos migratorios complejos. Asimismo, el escenario regional en materia de desigualdades territoriales, factor clave para los flujos migratorios, se presenta desafiante e incierto ya que si bien hay rasgos persistentes (como los elevados niveles de desigualdad entre campo y ciudad, y el menor desarrollo relativo de las zonas de pobreza histórica), hay otros casos emergentes, los fenómenos de suburbanización de algunas metrópolis, la configuración de ciudades-región que hacen necesaria una nueva escala de análisis, y la creciente migración internacional (que puede sustituir a la interna en algunos casos). Por último, los cambios en materia de política pública también son claves y ameritan un análisis más laborioso que en el pasado, pues lo que tenemos en la actualidad son cada vez menos políticas explícitas de migración interna y cada vez más políticas territoriales o con efectos territoriales (de desarrollo regional o local, de combate a la pobreza, de desarrollo o regulación urbanos, de ordenamiento territorial, etc.), que inciden en los patrones de localización y movilidad de la población.

4.9 Geografía política

Fronteras y Soberanía

División territorial

El nombre oficial de nuestro país es Estados Unidos Mexicanos, aunque también se conoce como República Mexicana o México, está integrado por 32 entidades federativas. La Ciudad de México es la capital y sede de los tres poderes de gobierno (Ejecutivo, Legislativo y Judicial).

Extensión territorial

La superficie de México se integra por la superficie continental y la superficie marítima. La superficie continental se refiere a la parte del territorio nacional que está articulado con el continente americano, así como a las islas del país.

La superficie marítima está constituida por el mar territorial y la Zona Económica Exclusiva (ZEE), en ella México tiene los mismos derechos que en su mar territorial, pero permite la libre circulación de embarcaciones extranjeras y la instalación de diversas vías, por ejemplo, oleoductos marinos o diversos tipos de cableado. El área que ocupan el mar territorial y la ZEE se define por medio de tratados internacionales (con Estados Unidos de América, Guatemala, Belice, Honduras y Cuba) y está custodiada por la Secretaría de Marina.

Mar territorial de México

Franja de mar adyacente al continente e islas, que se extiende hasta 22.2 km (12 millas náuticas) mar adentro, contados desde la línea de costa. En el aplican las mismas leyes que en el territorio continental, por lo que el Estado ejerce plena soberanía en el subsuelo, el lecho, las aguas y el espacio aéreo de esta franja.



Figura 3. Mapa: Áreas de soberanía nacional.
Fuente: INEGI. Marco Geoestadístico Nacional 2018.

Bibliografía sugerida

- Ayllón T & Lorenzo I. (2000). Geografía para Bachilleres. Trilla.
- Jiménez, L. & Galicia M. (2018). Geografía Física para bachillerato. Lapslázuli.
- Quiroga, L & Acosta, G. (2009). Geografía. Bachillerato. ST Editorial.
- Sámano C. (2001). Geografía. Santillana.

Fuentes electrónicas

- CENAPRED. (1 de julio de 2025). Centro Nacional de Prevención de Desastres. Centro Nacional de Prevención de Desastres. <https://www.gob.mx/cenapred>
- División territorial. Cuéntame de México. (1 de julio de 2025). Cuéntame de México. <http://www.cuentame.inegi.org.mx/territorio/division/default.aspx?tema=T>
- Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática. (1 de julio de 2025). Datos de Población. <https://www.inegi.org.mx/temas/>
- Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática. (1 de julio de 2025). Guía para la Interpretación de Cartografía Topográfica. INEGI. https://www.inegi.org.mx/contenido/productos/prod_serv/contenidos/espanol/bvinegi/productos/historicos/1329/702825231743/702825231743_1.pdf
- Instituto Nacional para el Federalismo y el Desarrollo Municipal. (1 de julio de 2025). La distribución espacial de población es un reto nacional. Blog. <https://www.gob.mx/inafed/articulos/la-distribucion-espacial-de-poblacion-es-un-reto-nacional>
- Los mapas. Cuéntame de México. (1 de julio de 2025). Cuéntame de México | Territorio. <https://cuentame.inegi.org.mx/descubre/geografia/mapas/>
- Máxima Uriarte, J. (1 de julio de 2025). Desastres Naturales. Características. <https://www.caracteristicas.co/desastres-naturales/>
- Rubio Barroso, A., & Gutiérrez Puebla, J. (1 de septiembre de 2021). Los sistemas de información geográficos: origen y perspectivas. Revista General de Información y Documentación, 7. <https://revistas.ucm.es/index.php/RGID/article/download/RGID9797120093A/10990>

5. Química

5.1 El átomo

Partes y características del átomo

En el siglo V a. c. el filósofo griego Demócrito expresó la idea de que toda la materia estaba formada por muchas partículas pequeñas que llamó átomo (de una palabra griega que significa invisible). A pesar de que la idea de Demócrito no fue aceptada por muchos de sus contemporáneos (entre ellos Platón y Aristóteles), ésta se mantuvo.

Con base en la teoría atómica de Dalton, un átomo se define como la unidad básica de un elemento que puede intervenir en una combinación química. Dalton describió un átomo como una partícula extremadamente pequeña e indivisible. Sin embargo, una serie de investigaciones iniciadas alrededor de 1850, y que continuaron hasta el siglo XX, demostraron claramente que los átomos tienen una estructura interna, es decir, que están formados por partículas aún más pequeñas, llamadas partículas subatómicas.

A través de la historia de la química, se han propuesto diversos modelos atómicos, a partir del descubrimiento de las partículas subatómicas y el comportamiento de la materia. Los modelos propuestos son los de Dalton, Thompson, Rutherford, Bohr, entre otros.

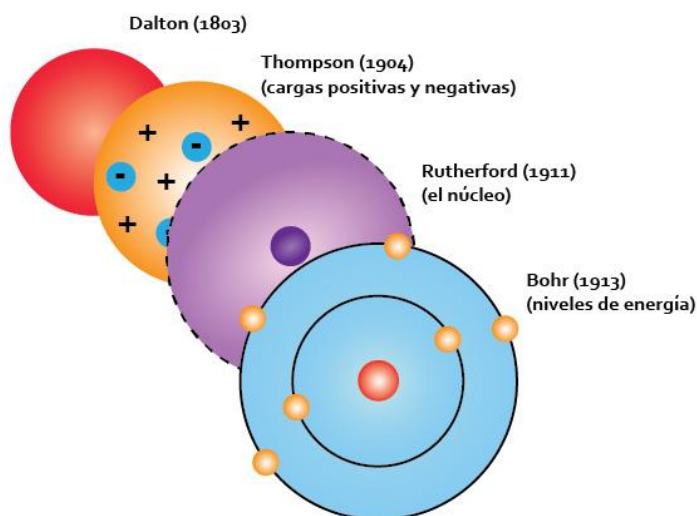


Figura 1. Modelos de átomo.

Fuente: https://e1.portalacademico.cch.unam.mx/alumno/quimica1/unidad2/modelos_atomicos/introduccion

Algunas propiedades del átomo son:

- Partícula muy pequeña (1 a 5 Å).
- Conformada por protones, neutrones y electrones.
- Lo que define a un elemento es su número de protones.
- Su estructura y enlaces determinan las propiedades físicas y químicas de los materiales.

5.2 Tabla periódica

Tipos de elementos: metales, no metales y gases nobles

La tabla periódica tiene una historia muy interesante, inicia con la búsqueda de una sola partícula elemental que fuera la responsable de la construcción de todas las cosas, una partícula que sólo al variar

la forma en que se agrupara diera origen a toda la materia. En la cultura griega (640 a. c.) surgió la pregunta por primera vez: ¿De qué están hechas las cosas? Entonces surgió la palabra *elementum* que intentó explicar la pureza de un bloque constructor de toda la materia. Los griegos dieron el nombre de *chemia* al arte de tratar materiales con objeto de cambiar su naturaleza, algunos piensan que *chem* significa "magia negra".

Los alquimistas, en su afán de encontrar la forma de cambiar la naturaleza de los materiales, encontraron los primeros elementos. En 1661, el inglés Robert Boyle, escribió sus descubrimientos sobre el comportamiento de los gases en un libro titulado "El Químico Escéptico". Boyle se llamó a sí mismo químico porque la palabra alquimista había ido adquiriendo una mala reputación, poco después la Alquimia se convirtió en Química.

En 1852, un químico llamado Edward Frankland, acuñó el término "valencia" para describir la capacidad de combinación de los elementos. En 1864, el químico John Alexander Reyna Newlands, se entretenía enrollando la lista de los elementos en columna y se percató de que, dividiendo la lista en columnas de siete, conseguía una pauta definida de similitudes. A finales de los años 1860, Dimitri Ivánovich Mendeléiev, como la mayoría de los químicos anteriores a él, se había enfrentado al problema de encontrar cierta clase de orden en la lista de los elementos. Mendeléiev se concentró en las valencias de los elementos para ordenarlos. Posteriormente el químico John Dalton los ordenó por peso atómico y finalmente, el químico Henry Gwyn-Jeffreys Moseley por número atómico.

Configuración electrónica

La configuración electrónica de un átomo representa la distribución de los electrones en sus orbitales. Las configuraciones electrónicas están escritas en una notación convencional que enumera en primer lugar al del número cuántico principal, seguido de la letra que indica el orbital s, p, d o f. Una cifra sobre la letra del orbital indica el número de electrones que contiene. En otras palabras, define la forma tridimensional del orbital. Cada número cuántico angular corresponde a un subnivel de energía para los orbitales de un átomo, dichos subniveles son:

- s – sharp (nítido)
- p – principal (principal)
- d – diffuse (difuso)
- f – fundamental (fundamental)

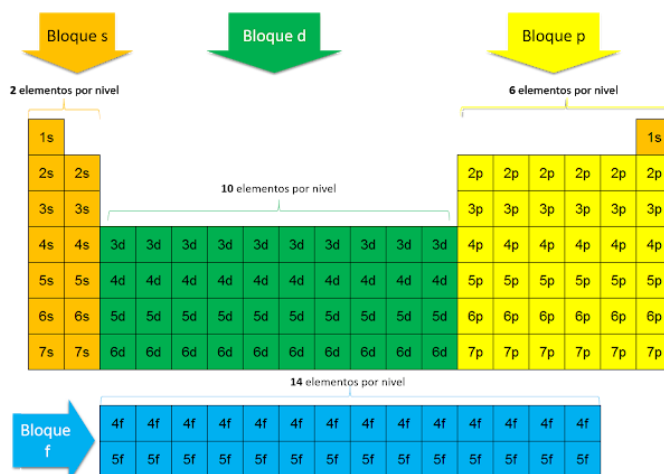


Figura 2. Ejemplo de la configuración electrónica aplicada a la tabla periódica, cubriendo periodos y grupos.

5.3 Estados de agregación de la materia

Cambios de estado

Los estados de agregación de la materia se definen como una de las maneras en que la materia interactúa con si misma para formar una fase homogénea. Es decir, que tanto se pueden atraer las moléculas unas con otras, esto dependerá de la energía y de la capacidad de la molécula en cuestión para absorber calor. Las moléculas se pueden encontrar estabilizadas en alguno de las siguientes fases: sólido, líquido, gas y plasma.

Aunque en la actualidad se han descubierto otros estados de la materia en ciertas condiciones, las más relevantes para nuestra vida diaria corresponden a estas cuatro fases, pues las podemos observar constantemente en nuestro entorno inmediato. Como es el plasma que se observa durante una tormenta en forma de rayo, la nieve de una montaña que contiene hielo, el líquido que corre por un río y en el cielo podemos ver el vapor del agua en forma de nubes.

Estos estados son estudiados por la termodinámica, la cual permite explicar, a través de sus leyes o principios, en qué condiciones se encuentran estos. Por ejemplo, un sistema que contiene siempre la misma cantidad y energía constante presentará un estado. Una cosa importante es observar que las moléculas pueden transitar de un estado a otro, esto es un fenómeno importante en nuestro planeta para regular el clima de la Tierra derivado del constante cambio de fase del agua. Es decir, el clima en el que vivimos se beneficia de la propiedad de los estados de la materia para lograr tener un clima estable.

Estado sólido

Las sustancias que se encuentran en estado sólido tienen forma y volumen definido. Las partículas que las constituyen se encuentran muy cerca unas de otras ya que predominan las fuerzas de cohesión. Esto ocasiona que no se puedan mover libremente y lo hagan únicamente en el lugar en el que se encuentran (movimiento vibracional). Entre las sustancias que de manera natural existen en estado sólido se encuentran, por ejemplo, la plata y el oro usados en joyería, el cobre que sirve para las conexiones eléctricas, el hierro y el aluminio utilizados en herrería.

Estado líquido

El líquido más conocido es el agua, debido a que es fundamental para nuestra vida. Entre las características de un líquido se puede mencionar que las partículas que lo constituyen tienen mayor libertad de movimiento que las de un sólido debido a que aparecen además de las fuerzas de cohesión las de repulsión, lo que permite que las partículas se deslicen una sobre de otra, es decir, fluyan.

Estado gaseoso

Las sustancias en estado gaseoso no son fáciles de distinguir a simple vista si no son coloridas. Todos sabemos que el aire que respiramos está constituido por varios gases y uno de ellos es el oxígeno. Sin embargo, no lo podemos ver, tanto a los gases como a los líquidos se les llama fluidos.

Plasma

El plasma se define como un gas que puede ser sometido a altas temperaturas, a corrientes eléctricas o al que se le transfiere una gran cantidad de energía en forma de luz, lo que permitirá que cambie su comportamiento clásico de gas. Entre los ejemplos de este cuarto estado de la materia están el Sol, los relámpagos y las lámparas fluorescentes usadas en las oficinas públicas.

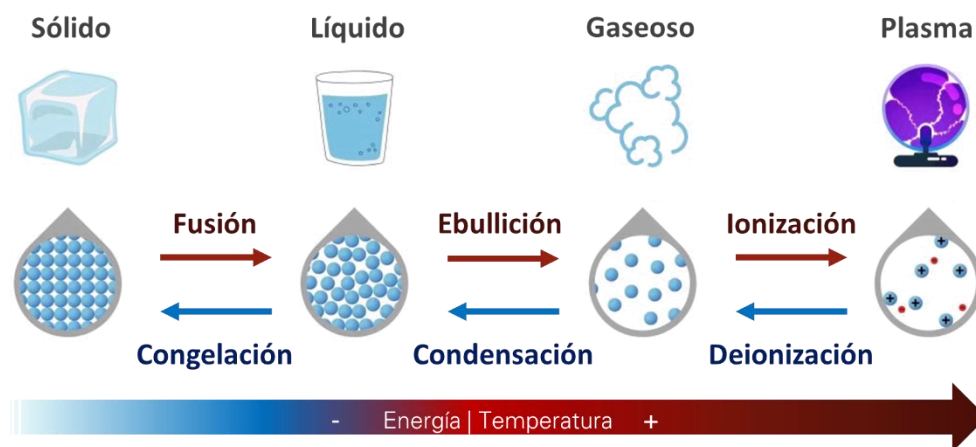


Figura 3. Estados y cambios de la materia.

5.4 Mezclas

Elementos puros y compuestos

Si consideramos que el 70% de la materia sustancial que nos rodea son mezclas, entonces podemos afirmar que las sustancias tienden a mezclarse naturalmente y no es fácil encontrarlas puras. Las mezclas se dan entre las diferentes combinaciones posibles de los estados o fases: sólido, líquido y gas.

Estados de las sustancias en la mezcla	Ejemplo	Tipo de mezcla
Gas-gas	Aire (mezclas de gases, principalmente de nitrógeno, oxígeno y argón)	Homogénea
Gas-líquido	Niebla (Mezcla de aire con vapor de agua)	Homogénea
Gas-sólido	Humo (mezcla de aire con partículas sólidas producto de una combustión incompleta)	Homogénea
Líquido-gas	Bebidas gaseosas (dióxido de carbono disuelto en agua)	Heterogénea
Líquido-líquido	Vinagre (contiene ácido acético en agua)	Homogénea
Líquido-sólido	Agua de mar (contiene sales disueltas en el agua, principalmente cloruro de sodio con un 77%)	Homogénea
Sólido-gas	Maíz palomero (vapor de agua disuelto en almidón)	Heterogénea
Sólido-líquido	Amalgama dental (mercurio disuelto en plata)	Homogénea
Sólido-sólido	Latón (disolución de Zinc en cobre)	Homogénea

Tabla 1. Tipos de mezclas.

Cualquier mezcla se genera mediante la unión de dos o más elementos o compuestos unidos en proporciones fijas o variables. Cada sustancia conserva sus características individuales ya que se tiene una unión física y no se lleva a cabo reacción alguna. Las mezclas pueden ser homogéneas o heterogéneas.

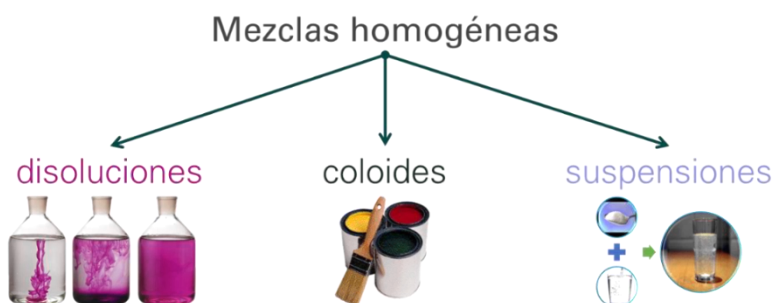


Figura 4. Tipos de mezclas homogéneas.

El tamaño de las partículas de los componentes de estas mezclas es menor a un nanómetro (una milésima de micra), por eso cuando se observa la disolución en un microscopio tiene un aspecto homogéneo. El componente de la disolución que está presente en mayor cantidad se denomina disolvente, y al otro u otros componentes que se encuentren en menor proporción se les denomina solutos. Tanto el soluto como el disolvente pueden ser sólidos, líquidos o gases.

Los coloides son mezclas que se dan a escala microscópica, en donde las partículas de una o más sustancias se dispersan (fase dispersa) en otra sustancia llamada medio dispersor o fase dispersante. Las partículas de la fase dispersa son suficientemente grandes como para dispersar la luz (este efecto óptico se conoce como Efecto Tyndall), pero demasiado pequeñas como para precipitar. Por tanto, una forma de distinguir una disolución de un coloide es mediante el Efecto Tyndall.

Las suspensiones son mezclas homogéneas que se dan a escala macroscópica, es decir, las partículas son tan grandes que se ven a simple vista (tienen un tamaño superior a $1\mu\text{m} = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$ es decir un millonésimo de metro). En estas mezclas la fase dispersa permanece suspendida en la fase dispersora, pero sólo por un tiempo determinado, pues finalmente sedimenta dependiendo del tamaño de partícula y de la diferencia entre las densidades de las sustancias dispersa y dispersora. Muchos de estos productos tienen impresa la leyenda “agítase antes de usarse”, esto significa que una mezcla heterogénea se convierte en homogénea cuando se agita.

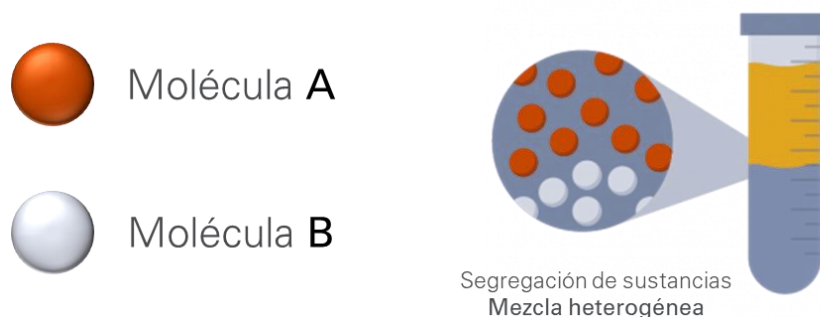


Figura 5. Modelo de una mezcla heterogénea.

5.5 Reacciones Óxido-Reducción

Oxidación y reducción

Históricamente los términos oxidación y reducción se aplicaron en procesos en los que ocurre una transferencia de oxígeno, hidrógeno o de electrones.

Oxidación	Reducción
✓ Ganancia de oxígeno	✓ Pérdida de oxígeno
✓ Pérdida de electrones	✓ Ganancia de electrones
✓ Pérdida de hidrógeno	✓ Ganancia de hidrógeno (en compuestos orgánicos)

Tabla 2. Características de las reacciones Oxido – Reducción.

En todos los casos, la transferencia se lleva a cabo entre dos especies, una que gana y otra que pierde partículas, siempre se presenta una oxidación y una reducción y viceversa, nunca se tiene un proceso sin el otro.

Una sustancia que oxida a otra se conoce como agente oxidante, en el mismo sentido, una que reduce a otra se llama agente reductor.

Los números de oxidación son un invento o, mejor dicho, una convención de los químicos. Se trata de un número entero que se asigna a cada elemento presente en un compuesto, con la idea de comparar su ambiente electrónico con el del mismo elemento en estado libre.

En todo compuesto electrónicamente neutro, la suma de los números de oxidación de los elementos que lo constituyen es cero, cualquier átomo en un elemento tiene número de oxidación cero.

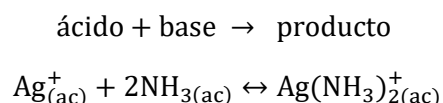
Las definiciones modernas de oxidación y reducción son las siguientes:

- Decimos que un elemento se oxida cuando en un cambio químico su número de oxidación aumenta
- Una disminución del número de oxidación de un átomo implica su reducción

5.6 Reacciones ácido-base

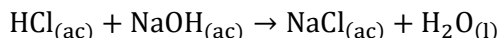
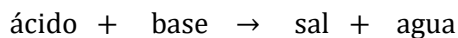
Sustancias ácidas y básicas, reacciones de neutralización

En 1932, el químico norteamericano G.N. Lewis formuló una definición, que actualmente se denomina base de Lewis, es una sustancia que puede donar un par de electrones. Un ácido de Lewis es una sustancia capaz de aceptar un par de electrones. Por lo tanto, una reacción ácido-base de Lewis es aquella que implica la donación de un par de electrones de una especie a otra. Dicha reacción no produce una sal y agua. Por ejemplo:



Reacciones de Neutralización

Una reacción de neutralización es una reacción entre un ácido y una base, generalmente en las reacciones acuosas ácido-base se forma agua y una sal, que es un compuesto iónico formado por un catión distinto de H^+ y un anión distinto del OH^- u O^{2-} .

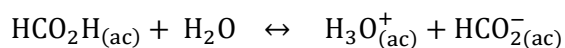


Reacciones par ácido-base conjugado

Cuando un ácido de Bronsted-Lowry dona un protón forma la base conjugada de ese ácido, cuando una base acepta un protón, forma el ácido conjugado de esa base, por lo tanto:

- La base conjugada de un ácido es la especie que queda cuando el ácido pierde un protón
- Un ácido conjugado resulta de la adición de un protón a una base
- Al par ácido-base lo diferencia un protón y se le llama par conjugado o ácido-base conjugado

En general, una reacción ácido-base se describe como:



5.7 Potencial de hidrógeno

Escala de pH

Los ácidos producen iones hidrógeno H^+ , en una solución acuosa, los ácidos naturales y las soluciones ácidas comparten la característica de que la concentración del ion hidrógeno de la solución aumenta cuando el ácido se disuelve. Estas concentraciones se pueden expresar en notación científica, aunque una manera más conveniente de expresar estas cifras es usando una escala logarítmica de pH.

El pH de una solución es el negativo del logaritmo de la concentración de ion hidrógeno.

$$pH = -\log[H^+]$$

Con ello se observa que los ácidos tienen un pH relativamente bajo, mientras que una base tiene un pH alto, pero una concentración de ion hidrogeno muy baja. Por lo que, para soluciones acuosas a 25 °C, se puede decir que los ácidos tienen valores de pH inferiores a siete, las bases tendrán valores mayores de siete y que un pH de siete representa una solución neutra.

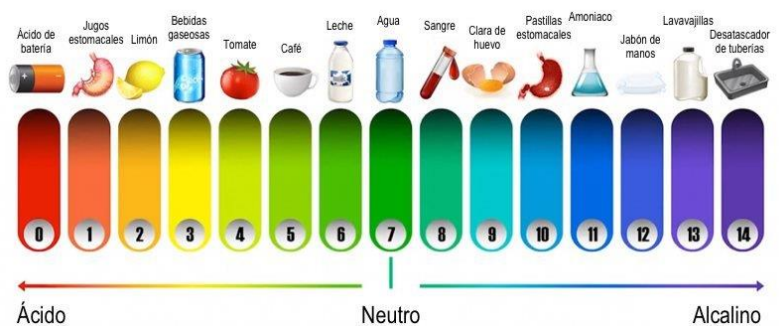


Figura 6. Escala de pH.

5.8 Enlaces químicos

Estructura de Lewis y Electronegatividad**Enlace metálico (metal-metal)**

Se obtiene cuando los elementos de la tabla periódica que se unen son los mismos metales o diferentes (aleaciones), por ejemplo: Cu, Al y Fe.

Enlace covalente (no metal-no metal)

Este tipo de enlace puede ser no polar, polar o coordinado, el enlace covalente no polar se obtiene cuando los elementos que se unen son los mismos no metales, por ejemplo: H_2 , N_2 , O_2 y F_2 .

El enlace covalente polar se une entre no metales y además son diferentes entre ellos. Por ejemplo: H_2S , CH_4 , NH_3 , H_2O y H_2CO_3 .

El enlace covalente coordinado se obtiene cuando los elementos que se unen son no metales, los dos elementos comparten un par electrónico (uno aporta el par), por ejemplo: H_2SO_4 , HNO_3 y $HClO_3$.

Enlace iónico (metal-no metal)

Se obtiene cuando los elementos que se unen son un metal con un no metal, si el metal pertenece a la familia IA o IIA y se une a un no metal de la familia VIIA, el enlace es iónico, por ejemplo: CaF_2 y $NaCl$.

Enlace	Características
Iónico	• Son sólidos duros y quebradizos • Generalmente son sales con puntos de fusión y ebullición muy grandes • La mayoría de las sales iónicas son solubles en disolventes polares como el agua • En disoluciones acuosas conducen la corriente eléctrica • Tienen tendencias a formar cristales • Su densidad es mayor que la del agua
Covalente	• No polar: ○ Insolubles en agua ○ No conducen la corriente eléctrica ni el calor • Polar: ○ Su densidad es menor que la del agua ○ Solubles en disolventes polares como el agua
Metálico	• Son conductores de calor, de corriente eléctrica, son dúctiles y maleables • Se mezclan entre sí para formar metales impuros (aleaciones) • Sólidos con puntos de fusión elevados (excepto el Hg que es líquido a temperatura ambiente) • Presentan brillo metálico (son de color gris, excepto el oro (Au) que es amarillo, el cobre (Cu) que es rojizo y la plata (Ag) blanca grisácea)

Tabla 3. Tipos de enlaces y sus características.

5.9 Ecuaciones de estado

Ley de gases ideales

Un gas se puede describir mediante cuatro cantidades interaccionadas: la presión, el volumen, la temperatura y la cantidad de mol, junto con una constante de proporcionalidad, denominada constante de los gases.

$$PV = nRT$$

En donde:

- P = presión
- V = volumen
- n = moles
- T = temperatura
- $R = 0.082 \frac{\text{atm L}}{\text{mol K}}$

Esta ecuación anterior se le llama ley de los gases ideales y describe el comportamiento de un gas ideal (este no existe) sin embargo, los gases a presiones cercanas a 1 atm o menos y una temperatura cercana a la ambiental suelen tener un comportamiento casi ideal.

5.10 Masa molecular

La masa molecular es la cantidad que indica cuánto pesa una molécula. Se obtiene sumando las masas atómicas de todos los átomos que la forman. Cada elemento químico tiene una masa atómica específica, que se puede encontrar en la tabla periódica.

Por ejemplo, el agua (H_2O) está formada por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno, al sumar las masas de estos tres átomos, se obtiene la masa molecular del agua, que es aproximadamente 18 unidades de masa atómica (uma). Este concepto es muy importante en química, ya que permite conocer la cantidad de sustancia presente en una muestra y realizar cálculos en las reacciones químicas.

Masa atómica del Hidrógeno es 1.008 u y la del Oxígeno es 16.00 u, por lo tanto, para calcularla podemos hacer lo siguiente:

$$\text{Masa molecular } \text{H}_2\text{O} = (2 \times 1.008) + (1 \times 16.00) = 2.016 + 16.00 = 18.016 \text{ u}$$

5.11 Compuestos del carbono

Nomenclatura

El carbono puede constituir más compuestos que ningún otro elemento, porque sus átomos tienen la capacidad de formar enlaces carbono-carbono sencillos, dobles y triples, también unirse entre sí formando cadenas o estructuras cíclicas. La rama de la química que estudia los compuestos del carbono es la química orgánica.

Los hidrocarburos son compuestos orgánicos formados únicamente por átomos de carbono (C) e hidrógeno (H), estos se dividen en:

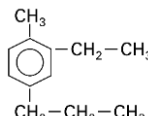
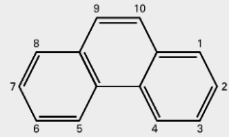
Hidrocarburos acíclicos (alifáticos)	
Lineales: no presentan cadenas laterales	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$
Ramificados: presentan cadenas laterales	$ \begin{array}{ccccccc} \text{H}_3\text{C} & - & \text{CH} & - & \text{CH}_2 & - & \text{CH} & - & \text{CH}_3 \\ & & & & & & & & \\ & & \text{CH}_3 & & & & \text{CH}_3 & & \end{array} $
Hidrocarburos cíclicos (aromáticos)	
Monocíclicos: tienen una sola operación de ciclización	
Policíclicos: tienen más de una sola operación de ciclización	

Tabla 4. Tipos de hidrocarburos.

La nomenclatura de los alcanos y de todos los demás compuestos orgánicos se basa en las recomendaciones de la Unión Internacional de Química Pura y Aplicada (IUPAC). Los nombres de los 10 alcanos más comunes de cadenas lineales son mostrados en la siguiente tabla.

Número de átomos de Carbono	Nombre	Fórmula molecular	Fórmula semi-desarrollada
1	Metano	CH_4	CH_4
2	Etano	C_2H_6	$\text{CH}_3 - \text{CH}_3$
3	Propano	C_3H_8	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$
4	Butano	C_4H_{10}	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$
5	Pentano	C_5H_{12}	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$
6	Hexano	C_6H_{14}	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$
7	Heptano	C_7H_{16}	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$
8	Octano	C_8H_{18}	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$
9	Nonano	C_9H_{20}	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$
10	Decano	$\text{C}_{10}\text{H}_{22}$	$\text{CH}_3 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$

Tabla 5. Nomenclatura de los alcanos.

La clase de componentes orgánicos se distinguen de acuerdo con los grupos funcionales que contienen, un grupo funcional es un grupo de átomos responsables del comportamiento químico de la molécula que lo contiene. Moléculas diferentes que contienen la misma clase de grupo o grupos funcionales reaccionan de manera semejante. Algunos de los grupos funcionales son: alcoholes, éteres, aldehídos, cetonas, ácidos carboxílicos y aminas.

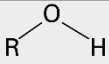
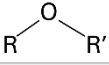
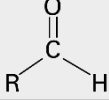
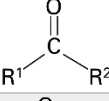
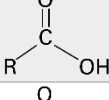
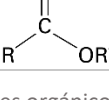
Grupo funcional	Fórmula	Estructura	Sufijo
Alcohol	$R-OH$		-ol
Éter	$R-O-R'$		R-il R'-il éter
Aldehído	$R-C(=O)H$		-al -carbaldehído
Cetona	$R-C(=O)R'$		-ona
Ácido carboxílico	$R-COOH$		Ácido -ico
Éster	$R-COO-R'$		R-ato de R'-ilo

Tabla 6. Clase de componentes orgánicos.

Bibliografía sugerida

Cervantes, B. y Loredo, J. (2011). Manual de prácticas de Química General en microescala, Trillas.

Chamizo, J. Petrich, M. (1995). Química 1. Esfinge.

Chang, R & Goldsby K.A. (2017), Química, Mc Graw Hill Education.

García, H.; Irazoque, G. y Talanquer, V. (1996). Introducción a la Física y a la Química. Fondo de Cultura Económica.

Garritz, A., C.J.A. (1994) Química. Addison-Wesley Iberoamericana.

Jardón, G. (2000) Capítulo 6. Teorías de disociación ácido-base. En Curso de Química general para estudiantes de ingeniería química.

Kotz, J.C., T.P.M. (2003) Química y reactividad química. Thomson.

6. Física

6.1 Movimiento

Movimiento Rectilíneo Uniforme (MRU)

El MRU se tiende que considerar en situaciones simplificadas de los fenómenos, para, una vez comprendidas, introducir variables que las aproximen más a la realidad. En esta línea, el movimiento de un objeto está condicionado por su interacción (rozamiento, acción de un motor, gravedad, fuerzas eléctricas, etc.) con el resto de los objetos del Universo, los cuales, con más o menos intensidad le comunican una aceleración que perturba su camino.

Características del MRU:

- Trayectoria rectilínea
- Velocidad constante (módulo, dirección y sentido)
- El espacio recorrido es igual al desplazamiento

Concepto	Fórmula	Unidad
Distancia	$d = v \cdot t$	m o km
Velocidad	$v = \frac{d}{t}$	$\frac{m}{s}$ o $\frac{km}{h}$
Tiempo	$t = \frac{d}{v}$	s o h

Tabla 1. Ecuaciones del Movimiento Rectilíneo Uniforme.

Movimiento Uniformemente Acelerado (MUA)

Este movimiento se presenta cuando el cuerpo experimenta cambios de velocidades iguales en tiempos iguales, lo que implica una aceleración constante no nula en el tiempo.

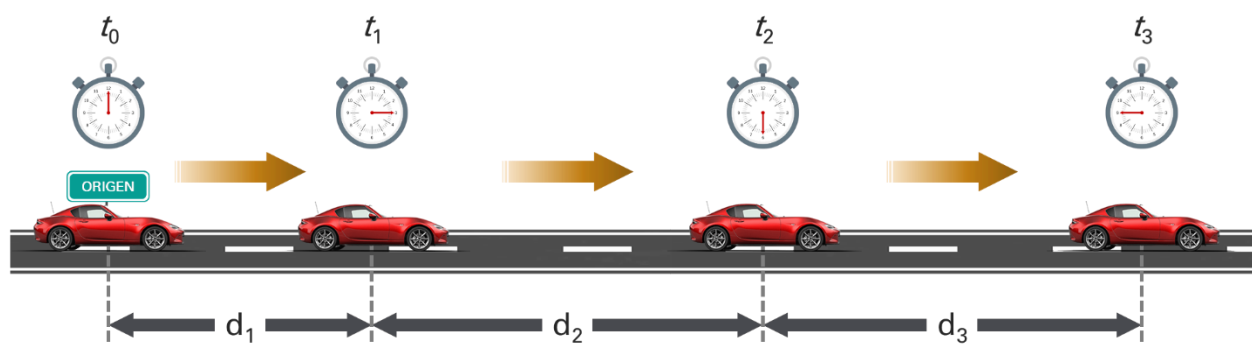


Figura 1. Movimiento Uniformemente Acelerado.

En la imagen se observa un automóvil que se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea, que va recorriendo distancias cada vez mayores en intervalos iguales de tiempo, esto quiere decir que el móvil va aumentando su velocidad uniformemente (siempre en la misma cantidad) en intervalos iguales de tiempo, por lo tanto, está acelerando. En los movimientos ordinarios, la velocidad no suele ser una magnitud constante, la aceleración está presente bien por causas naturales (p. e. la gravedad) o por otras

interacciones (rozamiento, fuerza producida por un motor o fuerzas eléctricas). Por la presencia de estas interacciones los objetos dejan de moverse en línea recta y resultan trayectorias, en general, curvilíneas.

Ecuaciones del Movimiento Uniformemente Acelerado (MUA)

Concepto	Fórmula	Unidad
Aceleración	$a = \frac{v}{t}$	$\frac{m}{s^2}$
Velocidad	$v_f = v_i + a \cdot t$	$\frac{m}{s}$
Tiempo	$t = \frac{v}{a}$	s

Tabla 2. Ecuaciones del Movimiento Uniforme Acelerado.

6.2 Mecánica clásica

Gravedad de la Tierra

Es la aceleración neta que reciben los cuerpos en la superficie de la Tierra, este valor es el resultado del efecto gravitacional (proporcionado por la distribución de la masa de la Tierra) y la fuerza centrífuga (la rotación de la Tierra), cuyo valor promedio es:

$$g = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

Leyes de Newton

1ra ley de Newton o ley de la Inercia

Un cuerpo permanece en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme (velocidad constante) a menos que una fuerza neta externa actúe sobre él.

¿Qué significa esto?

Si nada lo empuja o frena, un objeto no cambia su estado.

Si un objeto está quieto, permanece quieto.

Ejemplo: Una pelota en el suelo no se moverá hasta que alguien la empuje.

$$\sum F = 0$$

La anterior expresión significa que si la suma de las fuerzas netas es cero, la velocidad del cuerpo no cambia.

2da ley de Newton o de proporcionalidad entre fuerza y aceleración

Toda fuerza resultante diferente de cero al ser aplicada a un cuerpo le produce una aceleración en la misma dirección en que actúa. La magnitud de dicha aceleración es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada e inversamente proporcional a la masa del cuerpo.

$$F = ma$$

Donde la fuerza tiene unidades de Newton ($N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$), la masa en kg y la aceleración de la gravedad ($g = 9.81 \frac{m}{s^2}$).

¿Qué significa esto?

Cuanto mayor es la fuerza, mayor será la aceleración.

Cuanta más masa tenga el objeto, menor será la aceleración ante la misma fuerza.

Ejemplo: Empujar un carrito vacío requiere menos esfuerzo que empujar uno lleno.

3ra ley de Newton o de acción y reacción

A toda acción corresponde una reacción de la misma magnitud o intensidad, en la misma dirección, pero con diferente sentido.

¿Qué significa esto?

Cuando un cuerpo aplica una fuerza sobre otro, el segundo cuerpo siempre ejerce una fuerza igual y contraria sobre el primero.

Ejemplo: Al saltar, los pies ejercen una fuerza hacia abajo sobre el suelo, y este responde con una fuerza hacia arriba que nos impulsa.

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

Caída libre

Se define como el movimiento en línea recta con aceleración constante que experimenta un cuerpo en caída de arriba hacia abajo.

Los objetos parten del reposo, es decir, no se le impregna ninguna velocidad inicial.

Concepto	Fórmula	Unidad
Altura	$h = \frac{g \cdot t^2}{2}$	m
Velocidad	$v = g \cdot t$	$\frac{m}{s}$
Tiempo	$t = \frac{v}{g}$	s

Tabla 3. Ecuaciones de la caída libre.

Tiro vertical

Es un tipo de movimiento rectilíneo que ocurre cuando un objeto se lanza hacia arriba de forma vertical, bajo la influencia de la gravedad.

Concepto	Fórmula	Unidad
Altura	$h = v_i \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$	m
Altura máxima	$h_{max} = \frac{v_i^2}{2 \cdot g}$	
Velocidad final	$v_f = v_i - g \cdot t$	$\frac{m}{s}$
Tiempo	$t = \frac{2 \cdot v_i}{g}$	s

Tabla 4. Ecuaciones del tiro vertical.

6.3 Órbitas

Leyes de Kepler

Las leyes de Kepler o leyes del movimiento planetario son leyes científicas que describen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Reciben el nombre de su creador, el astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630).

El aporte fundamental de las leyes de Kepler fue dar a conocer que las órbitas de los planetas son elípticas y no circulares como se creía antiguamente.

Las leyes de Kepler son leyes cinéticas, esto quiere decir que su función es describir el movimiento planetario, cuyas características se deducen gracias a cálculos matemáticos. Con base en esta información, años más tarde Isaac Newton estudió las causas del movimiento de los planetas.

1ra ley de Kepler o ley de las órbitas

Se conoce también como “ley de las órbitas”, determina que los planetas giran alrededor del Sol describiendo una órbita con forma de elipse, el Sol se ubica en uno de los focos de la elipse.

El enunciado de la primera ley de Kepler es el siguiente:

“Los planetas se mueven de manera elíptica alrededor del Sol, el cual se sitúa en uno de los focos de la elipse”.

2da ley de Kepler o ley de las áreas

Establece que el radio vector barre áreas equivalentes en un mismo intervalo de tiempo. El radio vector es una línea imaginaria que conecta a un planeta con el Sol, por lo tanto, su longitud varía según la distancia entre ambos.

El enunciado de la segunda ley de Kepler es el siguiente:

“El radio vector que une a un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales”.

3ra ley de Kepler o ley de los períodos

Permite comparar las características del movimiento de los planetas entre sí, la comparación toma en cuenta el período orbital y el radio de órbita de cada planeta. El período orbital es el tiempo que demora un planeta en dar la vuelta completa al Sol, el radio de la órbita es el semieje mayor de la elipse.

El enunciado de la tercera ley de Kepler es el siguiente:

“El cuadrado del período orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del radio de la órbita”.

Si dividimos el cuadrado del tiempo orbital entre el cubo del radio de la órbita, tendremos como resultado una constante, llamada constante de Kepler. La constante de Kepler es igual para todos los cuerpos celestes que orbitan alrededor del Sol, ya que no depende de ellos sino de la masa solar.

6.4 Energía

Tipos de transferencia de energía

Conducción

La conducción es la forma de propagación del calor a través de un cuerpo sólido, debido al choque entre moléculas, los metales son buenos conductores del calor; y el corcho, la madera, el plástico, la lana, el aire, la porcelana, el vidrio y el papel son malos conductores de este. En el vacío no se propaga el calor por conducción.

Convección

La convección es la propagación del calor ocasionada por el movimiento de la sustancia caliente, el calentamiento en los líquidos y gases es por convección, los vientos son corrientes de convección del aire atmosférico, debido a las diferencias de temperatura y densidad que se producen en la atmósfera.

Radiación

La radiación es la propagación del calor por medio de ondas electromagnéticas esparcidas, incluso en el vacío, a una rapidez de aproximadamente $300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, todos los cuerpos calientes emiten radiaciones caloríficas, es decir, ondas electromagnéticas de energía proporcional a su temperatura.

6.5 Leyes de la Termodinámica

Equilibrio térmico

Las leyes de la termodinámica (o los principios de la termodinámica) describen el comportamiento de tres cantidades físicas fundamentales: la temperatura, la energía y la entropía, que caracterizan a los sistemas termodinámicos. El término «termodinámica» proviene del griego *thermos*, que significa “calor”, y *dynamos*, que significa “fuerza”.

Matemáticamente, estos principios se describen mediante un conjunto de ecuaciones que explican el comportamiento de los sistemas termodinámicos, definidos como cualquier objeto de estudio (desde una molécula o un ser humano, hasta la atmósfera o el agua hirviendo en una cacerola).

Existen cuatro leyes de la termodinámica y son cruciales para comprender las leyes físicas del Universo y la imposibilidad de ciertos fenómenos como el del movimiento perpetuo.

Ley cero de la Termodinámica

La “ley cero” se conoce con ese nombre, aunque fue la última en postularse. También conocida como Ley del Equilibrio Térmico, este principio dicta que: “Si dos sistemas están en equilibrio térmico de forma independiente con un tercer sistema, deben estar también en equilibrio térmico entre sí”.

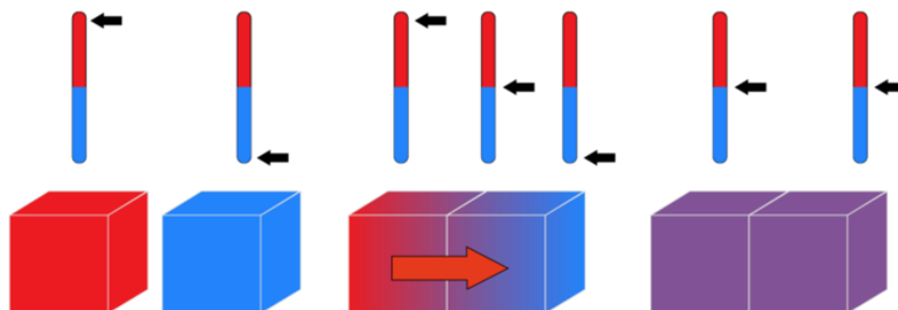


Figura 2. Ley del equilibrio.

Esta ley nos permite comparar la energía térmica de tres cuerpos distintos A, B, y C. Si el cuerpo A se encuentra en equilibrio térmico con el cuerpo C (tienen la misma temperatura) y B también tiene la misma temperatura que C, entonces A y B poseen igual temperatura.

1ra ley de la Termodinámica

La primera ley se llama “Ley de la Conservación de la Energía” porque dicta que, en cualquier sistema físico aislado de su entorno, la cantidad total de energía será siempre la misma, a pesar de que pueda transformarse de una forma de energía a otras diferentes. O, dicho en otras palabras: la energía no puede crearse ni destruirse, solo transformarse.

De ese modo, al suministrar una cantidad determinada de calor (Q) a un sistema físico, su cantidad total de energía podrá calcularse como el calor suministrado menos el trabajo (W) efectuado por el sistema sobre sus alrededores.

Expresado en una fórmula: $\Delta U = Q - W$.

2da ley de la Termodinámica

Dado el tiempo suficiente, todos los sistemas tenderán eventualmente al desequilibrio.

La segunda ley, también llamada «Ley de la Entropía», puede resumirse en que la cantidad de entropía en el Universo tiende a incrementarse en el tiempo. Eso significa que el grado de desorden de los sistemas aumenta hasta alcanzar un punto de equilibrio, que es el estado de mayor desorden del sistema.

Esta ley introduce un concepto fundamental en física: el concepto de entropía (representada con la letra S), que en el caso de los sistemas físicos representa el grado de desorden. Resulta que en cada proceso físico en el que hay una transformación de energía, cierta cantidad de energía no es utilizable, es decir, no puede realizar trabajo. Si no puede realizar trabajo, en la mayoría de los casos esa energía es calor. Ese calor que libera el sistema, lo que hace es aumentar el desorden del sistema, su entropía. La entropía es una medida del desorden de un sistema.

La formulación de esta ley establece que el cambio en la entropía (ΔS) será siempre igual o mayor a la transferencia de calor (ΔQ), dividido por la temperatura (T) del sistema. O sea, que:

$$\frac{\Delta S \geq \Delta Q}{T}$$

3ra ley de la Termodinámica

Al llegar al cero absoluto, los procesos de los sistemas físicos se detienen.

La tercera ley plantea que la entropía de un sistema que sea llevado al cero absoluto, será una constante definida. Dicho en otras palabras:

Al llegar al cero absoluto (cero en unidades de Kelvin), los procesos de los sistemas físicos se detienen y la entropía posee un valor mínimo constante.

Resulta difícil alcanzar cotidianamente el llamado cero absoluto ($-273,15^\circ\text{C}$), pero podemos pensar esta ley analizando lo que ocurre en un congelador: los alimentos que depositemos allí se enfriarán tanto, que se ralentizarán o incluso detendrán los procesos bioquímicos en su interior. Por eso se retarda su descomposición y será apto su consumo durante mucho más tiempo.

Temperatura

Es una magnitud física que mide el grado de agitación térmica de las partículas (átomos o moléculas) de un cuerpo o sustancia. Indica qué tan caliente o frío está un objeto en relación con una escala de referencia (como Celsius, Kelvin o Fahrenheit).

Calor

Es una forma de energía (energía térmica) que se transfiere entre dos cuerpos o sistemas debido a una diferencia de temperatura. Siempre fluye desde la región más caliente hacia la más fría hasta alcanzar el equilibrio térmico.

Tipos de sistemas termodinámicos

Un sistema es una porción del universo que se estudia, donde se analiza el intercambio de energía y materia.

Este sistema está separado del resto del universo (denominado alrededores) mediante límites reales o imaginarios.

Abierto

Sus fronteras permiten el intercambio de materia y energía con el entorno.

Ejemplo: Una olla abierta donde el agua se evapora.

Cerrado

Sus fronteras sólo permiten el intercambio de energía.

Ejemplo: Una botella sellada que puede calentarse o enfriarse.

Aislado

No hay ningún tipo de interacción con el entorno.

Ejemplo: Un termo perfectamente aislado.

Procesos termodinámicos

Isobárico

Se presenta cuando la presión del sistema permanece constante independientemente de los cambios de temperatura o volumen que sufran.

Isocórico

Se presenta cuando el volumen del sistema permanece constante independientemente de los cambios de temperatura o presión que sufran.

Isotérmico

Se presenta cuando la temperatura del sistema permanece constante independientemente de los cambios de presión o volumen que sufran.

6.6 Gases

Ecuaciones de estado

Un gas se caracteriza porque sus moléculas están muy separadas unas de otras, razón por la cual carecen de forma definida y ocupan todo el volumen del recipiente que lo contiene.

Sus consideraciones principales son:

- Los gases están constituidos por moléculas de igual tamaño y masa para un mismo gas, pero serán diferentes si se trata de gases distintos.
- Las moléculas de un gas contenido en un recipiente se encuentran en constante movimiento, razón por la cual chocan entre sí o contra las paredes del recipiente que las contiene.
- Las fuerzas de atracción intermoleculares son despreciables, pues la distancia entre molécula y molécula es grande comparada con sus diámetros moleculares.
- El volumen que ocupan las moléculas de un gas es despreciable en comparación con el volumen total del gas.

Ley de Boyle

A una temperatura constante y para una masa dada de un gas, el volumen del gas varía de manera inversamente proporcional a la presión absoluta que recibe.

$$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

Ley de Charles

A una presión constante y para una masa dada de un gas, el volumen del gas varía de manera directamente proporcional a su temperatura absoluta.

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

Ley de Gay – Lussac

A un volumen constante y para una masa dada de un gas, la presión del gas varía de manera directamente proporcional a su temperatura absoluta.

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

Elasticidad

Ley de Hooke

Esta ley la formuló en el siglo XVII el físico Robert Hooke al estudiar un resorte y darse cuenta de que la fuerza necesaria para comprimirlo era proporcional a la variación de su elongación al aplicar dicha fuerza.

$$F = -kx$$

donde F es la fuerza medida en N, x la longitud de la compresión o alargamiento medida en m, y k una constante de proporcionalidad (constante de resorte) expresada en Newtons sobre metros ($\frac{N}{m}$).

6.8 Hidrodinámica

Principio de Pascal

Toda presión que se ejerce sobre un líquido encerrado en un recipiente se transmite con la misma intensidad a todos los puntos del líquido y a las paredes del recipiente que lo contiene.

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Principio de Arquímedes

Todo cuerpo sumergido en un fluido recibe un empuje (medido en Newtons) ascendente igual al peso del fluido desalojado.

$$E = p \cdot g \cdot v$$

Donde el volumen tiene unidad de m^3 , la densidad (ρ) del fluido tiene unidad de $\frac{kg}{m^3}$ y finalmente la aceleración de la gravedad se toma como $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$.

6.9 Electromagnetismo

Ley de Ohm

Se usa para determinar la relación entre la diferencia de potencial (V), la corriente eléctrica (I) y la resistencia eléctrica (R), en un circuito eléctrico.

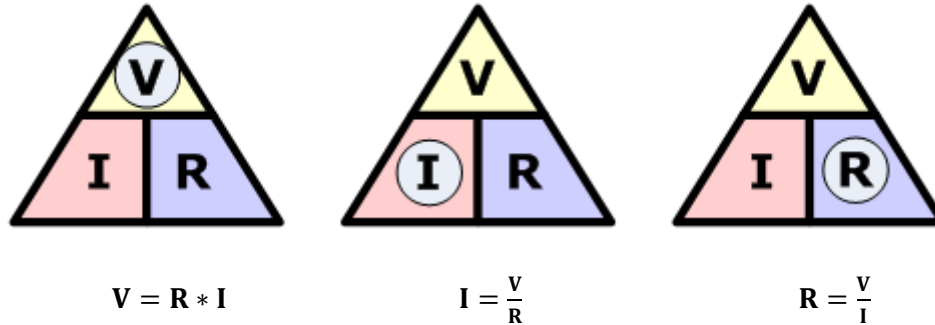


Figura 3. Representación algebraica de ley de Ohm.

6.10 Óptica

Ley de Snell

Se utiliza para calcular el ángulo de refracción de la luz al atravesar la superficie de separación entre dos medios de propagación de la luz, la expresión a continuación representa dicha ley:

$$n_1 \text{sen}\theta_1 = n_2 \text{sen}\theta_2$$

Donde n_1 es el índice de refracción del primer medio, n_2 es el índice de refracción del segundo medio, $\text{sen}\theta_1$ es el seno de ángulo de incidencia y $\text{sen}\theta_2$ es el seno de ángulo de refracción.

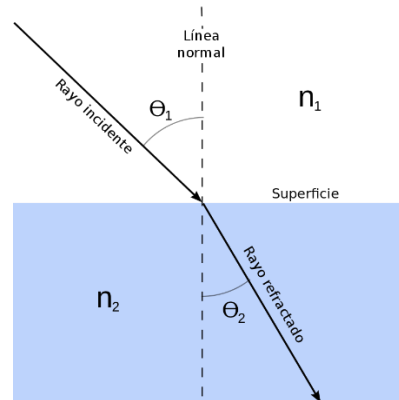


Figura 4. Representación de la Ley de Snell.

Bibliografía sugerida

- Bueche, F. J., Hecht, E. y Castellanos, J. H. P. (1991). Física general. McGraw-Hill.
- Montiel, H. P. (2020). Física General (3a Edición Ebook). Grupo Editorial Patria.
- Pérez, H. (2018). Física General serie Bachiller. 5ta edición, Grupo Editorial Patria.
- Tippens, P. (2000). Física (6th ed.). McGraw-Hill Interamericana.
- Wilson, J. (1996). Física, 2ª edición. Prentice Hall Hispanoamericana.

7. Comunicación

7.1 Elementos en el proceso de comunicación

Proceso de comunicación

La comunicación es un proceso que integra varios elementos en el intercambio de información entre un emisor y un receptor por medio de un mensaje, utilizando un canal o medio para la transmisión de éste y un código común, en un contexto determinado.

Los elementos básicos por identificar en el proceso de comunicación son:

- Emisor: Quien emite el mensaje
- Mensaje: La información que contiene
- Canal: El medio por el que se transmite el mensaje
- Código: El sistema de signos que permite la elaboración del mensaje y su interpretación
- Receptor: Quien recibe el mensaje del emisor

7.2 Propósitos del texto

Intención y situación comunicativa

Cuando un emisor codifica un mensaje y lo envía, lo hace con un objetivo claro a cumplir. Esta finalidad se le conoce como intención y trata de provocar una cierta reacción en el receptor, quien reaccionará dependiendo de su propia comprensión y deseos. A esto se le conoce como “intención comunicativa”.

De esta manera, las principales intenciones comunicativas son:

- Descriptivas. Son los mensajes que el emisor configura para representar en la mente del receptor un objeto o un estado de las cosas del mundo al que se refiere el enunciado.
- Apelativas (ordenar). Buscan influir en el receptor para que realice determinada acción o piense de determinada manera a deseo del emisor.
- Compromisivas (prometer). Con ellas el emisor se compromete con el receptor a realizar una determinada acción en el futuro.
- Expresivas o emotivas. Mediante esta intención, el emisor busca reflejar sus emociones al receptor para que éste reaccione y entienda el estado psicológico del primero.

Asimismo, en algunas clasificaciones se integran otras denominaciones sobre las intenciones comunicativas:

- Narrativa. Busca relatar una historia con personajes que realizan acciones. Dicha narración puede ser ficticia o no.
- Informativa. Busca avisar de un hecho en concreto, en un tiempo, espacio y contexto definido, al emisor.
- Convencer. A partir de la intención apelativa de la clasificación anterior, la definen como la que busca influir, a partir de proporcionar información fidedigna, hechos y procesos lógicos de razón, para que el receptor realice cierta acción.
- Persuadir. Lo mismo que la anterior, ésta se basa en la intención apelativa y es definida como la que busca influir, a partir de sentimientos, engaños o falacias, para que el receptor realice cierta acción.

Sentido connotativo y denotativo

Cuando un autor elabora un mensaje, sus emociones, creencias, opiniones y demás estados psicológicos personales están presentes en su escrito. De esta manera, mientras más alejado esté su escrito de su punto de vista personal, tendremos un texto denotativo; contrariamente, entre más cercano a sus opiniones el texto será más connotativo.

En la siguiente tabla se ponen en contraste las principales características de este tipo de enunciados.

Denotativo	Connotativo
Se enfoca en el objeto, es decir, en los elementos de la realidad externa al autor.	Se enfoca en el sujeto, es decir, en lo que opina, cree, piensa, siente o le gusta al autor.
Intentan hablar sobre objetos, fenómenos o eventos que pasan en la realidad cotidiana.	Intenta hablar de realidades psicológicas o internas del autor, como estados de ánimo, sensaciones, gustos, deseos, creencias u opiniones.
La información que presentan es fácilmente comprobable por cualquiera (es una información universal).	La información es personal (del autor), se puede equivocar o fácilmente alguien más puede no estar de acuerdo.
Habla de la realidad cotidiana que cualquiera puede notar o comprobar con sus sentidos externos.	Habla únicamente de lo que una persona percibe, opina o cree sobre la realidad que lo rodea.
Como apoyos, tenemos datos duros, como estadísticas, resultados de experimentos o registros históricos concretos. De igual manera, se complementa la información con otros libros o artículos científicos.	Como apoyos, tenemos los ejemplos, las comparaciones, las analogías, generalizaciones y demás recursos retóricos. Del mismo modo, se acompaña con la opinión de otras personas expertas en el tema, encuestas o sondeos.
Dentro de las posibilidades del texto, se escriben con claridad y sencillez para que no haya confusiones y sólo tenga un significado literal (o sea, lo que significa al pie de la letra). Su información es única y verdadera hasta que otro texto demuestre lo contrario, entonces este texto pasará a ser desechado.	Pese a los objetivos del autor, un texto puede tener diversas interpretaciones dependiendo del lector y el contexto; y cada interpretación es igual de válida y correcta, mientras que se justifique bien con los argumentos correctos.

Tabla 1. Sentido denotativo y connotativo.

7.3 Estrategias de comprensión de textos

Esquema lógico de redacción

La estructura o esquema lógico de redacción es fundamental en la elaboración de un texto, ya que su propósito principal es que éste tenga coherencia, a partir de su integración textual por tres partes.

- **Introducción:** Parte inicial del texto en la que presenta el tema o problema, el planteamiento general, los objetivos por lograr y otros aspectos que ofrecen, en forma breve, una panorámica general del texto.
- **Desarrollo:** Parte del texto en el que se desarrolla el tema presentando la información en datos, cifras, hechos, argumentos, explicaciones, definiciones, conceptos, organizadores gráficos, pruebas, citas textuales, etc.
- **Conclusión o cierre:** Es la parte del texto que sintetiza o presenta una conclusión con base en la información previa.

Ideas primarias y secundarias

Las ideas primarias contienen la parte esencial o fundamental que un autor busca transmitir o comunicar en un texto. Corresponde a la raíz de la idea, a partir de la cual se presenta y desarrolla información adicional.

Las ideas secundarias corresponden a la parte complementaria, de refuerzo, explicación o ampliación de las ideas primarias.

La identificación de las ideas primarias posibilita la comprensión de un texto, debido a que se conoce el contenido esencial de la misma.

7.4 Gramática

Oraciones simples y compuestas

Oraciones simples

Las oraciones son unidades mínimas de predicación, es decir, segmentos que ponen en relación un sujeto con un predicado. Hay oraciones simples que constan de un sujeto, verbo y predicado que por la actitud del hablante se divide en enunciativas, interrogativas, exclamativas, desiderativas, dubitativas y exhortativas. Las enunciativas enuncian juicios, ideas, opiniones; las interrogativas expresan preguntas; las exclamativas delatan la emoción del hablante; las desiderativas expresan el deseo de que suceda algo, sin decirlo directamente. En general, usan el modo subjuntivo; las dubitativas no afirman, expresan duda del hablante y las exhortativas indican orden, ruego, suplica

Sumado a lo anterior, por la naturaleza del predicado hay atributivas o copulativas (uso de verbo ser o estar), transitivas (uso de verbos transitivos), reflexivas (uso de verbos reflexivos), recíprocas (uso de verbos recíprocos), intransitivas (uso de verbos intransitivos) y pasivas (uso de verbo en voz pasiva).

Oraciones compuestas

Por otra parte, las oraciones compuestas son aquellas que contienen un sujeto, dos o más verbos y los complementos del predicado. Éstas se clasifican en yuxtapuestas, coordinadas y subordinadas.

Las oraciones yuxtapuestas

La palabra yuxtaponer significa ‘poner algo junto a’. Las oraciones yuxtapuestas entonces aparecen juntas, una al lado de la otra, pero no tienen una palabra como nexos, sino un signo de puntuación (generalmente una coma, un punto y coma, o dos puntos). Esto provoca que entre las oraciones yuxtapuestas no haya una relación explícita porque un mismo signo de puntuación nos permite plantear varias ideas.

Las oraciones coordinadas

A este grupo pertenecen las oraciones que se unen entre sí para sumar elementos, agregar información, dar opciones, hablar de oposición o referirse a varios elementos de manera alternativa.

Se considera que la relación planteada entre estas oraciones es de iguales o, dicho en otras palabras, que las oraciones enlazadas tienen el mismo valor.

Las oraciones subordinadas

Una oración subordinada siempre forma parte intrínseca de otra oración, es decir, funciona como sujeto, objeto directo, complemento circunstancial o da características de un sustantivo. Entre la oración subordinada y la oración principal de la que forma parte se establece un vínculo estrecho, por eso, si se elimina la subordinada, la oración principal pierde sentido.

Puntuación

El punto marca una pausa al final de un enunciado. Después de un punto siempre se escribe mayúscula. Hay tres tipos de puntos:

- Punto y seguido: separa enunciados que integran un párrafo.
- Punto y aparte: separa dos párrafos distintos con dos contenidos diferentes.
- Punto final: cierra un texto.

También se usa después de las abreviaturas. Nunca se usa el punto en los títulos y subtítulos de libros, artículos, capítulos, obras de arte.

Punto y coma

Indica una pausa superior a la coma e inferior al punto. Se utiliza:

- Para separar los elementos de una enumeración cuando se trata de expresiones que incluyen comas.
- Delante de las conjunciones o locuciones como: pero, mas, aunque, sin embargo, por tanto, por consiguiente, cuando los periodos tienen cierta longitud.

Dos puntos

Se usan en los siguientes casos:

- Delante de una enumeración anunciada con un verbo.
- En citas textuales.
- Después de las fórmulas de saludo en las cartas y documentos.
- En textos jurídicos y administrativos detrás del verbo (decretos, bandos, certificados, etc....).

Puntos suspensivos

Suponen una interrupción en la oración o un final impreciso. Se usan en los casos siguientes:

- Al final de una enumeración cuando tiene el mismo valor que la palabra etcétera.
- Para expresar un momento de duda.
- Para dejar un enunciado incompleto y en suspenso.
- Cuando se omite una parte de una cita textual.

Uso de comas

La coma marca una pausa breve en un enunciado y se utiliza en los casos siguientes:

- Para separar los elementos de una enumeración.
- Para aislar el vocativo.
- En los incisos que interrumpen una oración, para aclarar o ampliar lo que se dice, o para mencionar el autor u obra citados.
- Para separar elementos gramaticalmente equivalentes en un enunciado.
- En las cabeceras de las cartas se escribe coma entre el lugar y la fecha.

Grafías c, s, z

Letra C

- Se escriben con C, los verbos terminados en cir y ducir. Excepción: asir.

Ejemplos: conducir, aducir, traducir, esparcir, producir, relucir, zurcir, decir.

- Se escriben con C, las palabras terminadas en ancía, ancio, encía. Excepciones: ansia, Hortensia.

Ejemplos: constancia, excelencia, extravagancia, cansancio, decadencia, indulgencia, fragancia, conciencia, distancia.

- Se escriben con C, los diminutivos: cito, ecito, ecillo, si proceden de palabras sin S final.

Ejemplos: pez – pececito, dulce – dulcecito, pie – piececito, flor – florecita, mamá – mamacita.

Excepción: Las palabras que llevan S en la última sílaba distinta al plural, conservan la S en el diminutivo. Ejemplo. Masa-masita, tasa-tasita, rosa- rosita.

- Se escriben con C, las palabras terminadas en el sufijo cida/cidio (matar), cimiento.

Ejemplos: homicida, parricida, suicidio, reconocimiento.

- Se escriben con C, los verbos terminados en cer. Excepciones: toser, coser, ser.

Ejemplos: nacer, yacer, hacer, adolecer, agradecer, retorcer, estremecer.

- Se escriben con C, los verbos terminados en ciar. Excepciones: lisiar, ansiar, extasiar, anestesiarse.

Ejemplos: apreciar, acariciar, neciar, vaciar, negociar, viciar.

- Se escriben con C, las palabras terminadas en acia, icia, icie, icio. Excepciones: Dionisio, gimnasio, Asia, Anastasia, alisio, eutanasia.

Ejemplos: Fenicio, planicie, bullicio, pericia, codicia, malicia, falacia.

- Se escribe con C, la terminación ces que surge del plural de las palabras que contienen z.

Ejemplos: maíz-maíces, raíz-raíces, pez-peces, rapaz-rapaces, atroz-atroces.

- Se escriben con C, las formas de los verbos terminados en ceder, cender, cibir, citar, siempre que no proceda de raíces que lleven S, ejemplo transitar.

Ejemplos: conceder, encender, recitar, recibir, anteceder, percibir.

Letra S

- Se escriben con S, las palabras que terminan en ense (gentilicio), erso, ersa.

Ejemplos: nicaragüense, costarricense, reversa, adverso. Excepción. Fuerza, almuerzo.

- Se escriben con S, las terminaciones sivo, siva.

Ejemplos: corrosivo, masiva, explosivo, expresiva, intensivo.

- Se escribe con S, en el pronombre enclítico pospuesto al verbo.

Ejemplos: caerse, peinarse, bañarse.

- Se escriben con S, las palabras terminadas en los superlativos ísimo, ísima.

Ejemplos: bellísima, lindísimo, feísima, inteligentísima, delicadísima.

- Se escriben con S, los adjetivos (cualidad) terminados en oso, osa.

Ejemplos: Bondadoso, sabrosa, dadivoso, perezosa, maravilloso, grandioso.

- Se escriben con S, las palabras terminadas en ismo y sura (excepto Dulzura).

Ejemplos: espiritismo, oscurantismo, basura, censura.

- Se escriben con S, las palabras terminadas en esca, esco que no sean verbos.

Ejemplos: grotesca, dantesca, burlesco, gigantesco, pintoresco.

- Se escriben con S, las terminaciones esta, esto, ista.

Ejemplos: feminista, violinista, tiesto, fiesta, artista.

- Se escriben con S, en las palabras que comienzan con tras, des, dis, seg, sig.

Ejemplos: Trascender, desleal, disgustar, segmento, signo.

Excepciones: cigoñal, cegar, ceguera, cigüeñal, cigüeña.

- Se escribe con S, la terminación S, cuando se deriva de una palabra terminada en sor.

Ejemplos: Televisor – televisión, visor – visión.

Letra Z

- Se escriben con Z, las palabras terminadas en anza/o y azgo. Excepciones: gansa/o, mansa/o.

Ejemplos: adivinanza, mudanza, panza, hallazgo, danza, alabanza, almirantazgo.

- Se escriben con Z, las terminaciones ez, eza, az, oz, de los nombres abstractos.

Ejemplos: belleza, voraz, pereza, fugaz, rigidez, atroz, palidez, paz, torpeza, rapaz, timidez, eficaz.

- Se escriben con Z, las terminaciones azo, aza que denotan aumento, golpe.

Ejemplos: manaza, carraza, ojazos, codazo.

- Se escriben con Z, para la terminación zco derivada de los verbos terminados en acer, ecer, ocer, ucir.

Ejemplo: Complacer-complazco, conocer-conozco, padecer-padezco, lucir-luzco.

- Se escriben con Z, las terminaciones zuela, zuelo (que denotan disminución o desprecio) y en los sustantivos y en los sustantivos terminados en Zal cuando indican lugar donde hay algo o abundancia.

Excepción: Mocosuelo, marquesuela, cipresal, fresal y todas las palabras que en la última sílaba llevan S.

Ejemplos: mujerzuela, ladronzuelo, portezuela, jovenzuelo, maizal.

Grafías b, v

Letra B

- Los verbos terminados en -bir.

Ejemplos: escribir, recibir, sucumbir.

Excepciones en voces de uso actual: hervir, servir, vivir y sus compuestos.

- Los verbos terminados en -buir.

Ejemplos: contribuir, atribuir retribuir.

- Los verbos deber, beber, caber, saber y haber.
- Las terminaciones -aba, -abas, -abamos, -aban del pretérito imperfecto del indicativo (copretérito, en la terminología de Andrés Bello) de los verbos de la primera conjugación.

Ejemplos: cantaba, bajabas, amaban.

- El pretérito imperfecto de indicativo de ir: iba, ibas, etc.
- Las palabras que empiezan por el elemento compositivo biblio-(libro).

Ejemplos: biblioteca.

- Las palabras que empiezan por las sílabas bu-, bur- y bus-.

Ejemplos: bula, burla, buscar.

Excepción: vudú y sus derivados, además de otras voces caídas en desuso.

- Las que empiezan por el elemento compositivo bi-, bis, biz ('dos' o 'dos veces').

Ejemplos: bipolar, bisnieto, bizcocho.

- Las que contienen el elemento compositivo bio-, -bio ('vida').

Ejemplos: biografía, biosfera, anaerobio, microbio.

- Las palabras compuestas cuyo primer elemento es bien o su forma latina bene.

Ejemplos: bienaventurado, bienvenido, beneplácito.

- Toda palabra en que B precede a otra consonante o está en final de palabra.

Ejemplos: abdicación, abnegación, absolver, obtener obvio, subvenir, amable, brazo, rob, nabab.

Excepciones: ovni y algunos términos desusados. En las palabras obscuro, subscribir, substancia, substitución, substraer y sus compuestos y derivados, el grupo bs- se simplifica en s.

Ejemplos: sustancia, sustantivo, oscuro.

- Las palabras acabadas en -bilidad

Ejemplos: amabilidad, habilidad, posibilidad.

Excepciones: movilidad, civilidad y sus compuestos.

- Las acabadas en -bundo y -bunda.

Ejemplos: tremebundo, vagabundo, abunda.

Letra V

- Las palabras en las que las sílabas ad-, sub- y ob preceden a V.

Ejemplos: adviento, subvención, obvio.

- Las palabras que empiezan por eva-, eve, eví- y evo-.

Ejemplos: evasión, eventual, evitar, evolución.

Excepciones: ébano y sus derivados, ebionita, ebonita y eborario.

- Las que empiezan por el elemento compositivo vice-, viz- o vi- (en lugar de).

Ejemplos: vicealmirante, vizconde, virrey.

- Los adjetivos llanos terminados en -avo, -ava, -evo, -eva, -eve, iva, -ivo.

Ejemplos: esclavo, octava, longevo, nueva, aleve, decisiva, activo. Excepciones: suabo y mancebo.

- Las voces llanas de uso general terminadas en -viro, vira.

Ejemplos: decenviro, Elvira, triunviro.

- Las voces esdrújulas terminadas en -ívora.

Ejemplos: carnívora, herbívoro, insectívoro.

Excepción: víbora.

- Los verbos acabados en -olver.

Ejemplos: absolver, disolver, volver.

- Los presentes de indicativo, imperativo y subjuntivo del verbo ir.

Ejemplos: voy, ve, vaya.

- El pretérito perfecto simple de indicativo (o pretérito, según Bello) y el pretérito imperfecto (pretérito) y futuro de subjuntivo de los verbos estar, andar, tener y sus compuestos.

Ejemplos: estuvo, estuviéramos, estuviere, anduve, desanduvo, desanduviere, tuviste, retuvo, sostuviera, contuviese, mantuviere.

Acentuación

La acentuación de las palabras en español permite determinar el énfasis fonético sobre una sílaba al pronunciar una palabra. Ortográficamente se representa mediante una tilde (´) y puede colocarse sobre las cinco vocales (á, é, í, ó, ú). Cada palabra puede llevar solo una tilde.

Las palabras monosílabas

Las palabras monosílabas se componen de una sola sílaba y no se acentúan nunca, por regla general.

Ejemplo:

yo, pan, bien, mes

La tilde diacrítica

La tilde diacrítica se coloca sobre todo en palabras monosílabas que tienen un par homónimo y que buscan diferenciarse una de la otra por su grafía.

Ejemplo:

Él es el chico que está esperando para entrar en esta sala.

Me han pedido que te dé este ramo de flores.

Te he llamado para tomar un té.

Las palabras polisílabas se componen de dos o más sílabas. Se clasifican conforme a su acentuación (esto es, según cual sea la sílaba tónica) en agudas, llanas o graves, esdrújulas y sobresdrújulas. La tabla siguiente explica en qué casos llevan tilde las palabras polisílabas según del tipo que sean.

Tipos de palabra	Sílaba tónica	Tilde	Ejemplos
Aguda	Última	- Si la palabra termina en -n, -s o vocal - Excepto si termina en más de una consonante	camión, compás, colibrí, tapiz robots
Llana o Grave	Penúltima	- Si la palabra no termina en -n, -s o vocal - Si termina en más de una consonante	álbum, lápiz, mañana bíceps
Esdrújula	Antepenúltima	Siempre llevan tilde	década, México, rápido
Sobresdrújula	Anterior a la antepenúltima	Siempre llevan tilde	cómetelo

Tabla 2. Clasificación de palabras polisílabas.

Sinónimos, Antónimos y Homónimos

En los idiomas humanos, muchas palabras tienen significados que se relacionan mutuamente, ya sea en igualdad o siendo contrarias entre ellas. Las relaciones de significado más usuales son la sinonimia, antonimia y la homonimia.

- **Sinonimia:** El significado de dos o más palabras es muy cercano o equivalente, por lo que pueden intercambiarse dependiendo del contexto del enunciado. Por ejemplo, con el sentido de que una acción se pone en marcha, los términos “empezar” y “comenzar”.
- **Antonimia:** El significado de dos o más palabras está alejado o es contrario, por lo que entre ellas se niegan o rechazan. Por ejemplo, “claro” y “oscuro”; “antes” y “después”.
- **Homonimia:** Este fenómeno de la lengua puede clasificarse en dos tipos. Por una parte, los homógrafos son aquellas palabras que se escriben igual pero su significado es completamente distinto. Por ejemplo, el término “vino” puede significar una bebida alcohólica extraída de la uva o puede derivarse de la conjugación del verbo “ir”. Por otra parte, tenemos los homófonos, que son palabras que suenan o se pronuncia igual, pero que su significado y escritura es distinta. Por ejemplo, “votar” del acto de elegir democráticamente a alguien y “botar” de hacer que un objeto elástico, como una pelota, sea lanzado a alguna superficie.

7.5 Producción de textos

Texto Descriptivo

En el texto descriptivo se representa la realidad mediante palabras. Muchas veces se ha definido como pintura verbal. Si la historia en la narración se desarrolla como un proceso temporal, el contenido de la descripción detiene el transcurso del tiempo para observar los detalles de un objeto, una persona o un entorno como si de una pintura se tratara. La descripción es un modo de organización del contenido de un texto que está constituido por tres actividades: nombrar la realidad (definir la realidad), situarla en el espacio y el tiempo, y calificarla (calificar es una forma de tomar partido, por eso toda calificación implica subjetividad). La intención del autor y la finalidad que el autor desea alcanzar con el texto señalan las diferencias entre los dos tipos de descripción.

Texto narrativo

Un texto narrativo es una forma de expresión que cuenta hechos o historias acontecidas a sujetos, ya sea humanos (reales o personajes literarios), animales o cualquier otro ser antropomorfo, cosas u objetos; en él se presenta una concurrencia de sucesos (reales o fantásticos) y personas en un tiempo y espacio determinados. Dos elementos básicos de las narraciones son la acción (aunque sea mínima) encaminada a una transformación, y el interés que se produce gracias a la presencia de elementos que generan intriga (definida ésta como una serie de preguntas que porta el texto y a las cuales la narración termina dando respuesta).

Las narraciones son actos comunicativos que suponen la existencia de un emisor con una intención (¿por qué narrar?) y una finalidad (¿para qué narrar?). Existen narraciones literarias, cuya finalidad es eminentemente artística (por ejemplo, las presentes en cuentos, fábulas, leyendas, mitos y novelas, entre otros textos artísticos o de pretensiones estéticas), así como las narraciones no literarias, cuya finalidad es informativa (por ejemplo, noticias periodísticas, crónicas, reportajes, conversaciones en donde se relata algo, anécdotas, entre otros); en este último caso se narran hechos no ficticios.

Texto Argumentativo

Los textos argumentativos son de los más recurrentes en las lecturas de estudiantes, profesores, científicos, políticos, entre otros. A través de la argumentación se expresan ideas fundamentales para defender o refutar los pensamientos o ideas de otro. La argumentación es la base del convencimiento, del razonamiento, de la persuasión, de la demostración y del conocimiento humano.

No sería posible concebir a un individuo sin que pudiera expresar sus opiniones. Sin embargo, éstas deben estar perfectamente fundamentadas pues, de lo contrario, no tendrían el peso suficiente para tratar de cambiar conductas, desarrollar nuevas formas de conocimiento, exhortar a realizar ciertas actividades, entre otros propósitos. Para realizar una lectura analítica, para desarrollar en los hablantes la posibilidad de tratar y resolver conflictos, es necesario saber leer y escribir textos argumentativos: reconocer su esquema general y sus características; los propósitos, algunos géneros y los recursos discursivos más empleados; identificar y comprender las ideas más importantes a favor o en contra de un tema polémico.

Texto Expositivo

El texto expositivo es el texto escolar por excelencia; a lo largo de la vida, en particular de la vida académica, se está en contacto permanente con este tipo textual que tiene como propósito fundamental transmitir información y explicar nuevos temas; es decir, el texto expositivo transmite información o ideas con la intención de mostrar, explicar o hacer comprensible algo. En síntesis, el propósito del texto expositivo es hacer comprender una información, un tema, un concepto. Para que algo sea comprensible tiene que ser mentalmente representable. Los lectores se enfrentan con textos expositivos cotidianamente; se puede decir que son omnipresentes pues están en libros de texto, enciclopedias, manuales y textos de divulgación científica en general. Exponer equivale a suministrar información y, a la vez, a explicarla. Si bien la función primordial consiste en transmitir información, el texto expositivo no se limita sólo a proporcionar datos, sino que agrega a éstos explicaciones; describe o ilustra con ejemplos o analogías una determinada información con la finalidad de reelaborar el conocimiento.

En un texto expositivo son importantes dos aspectos: el texto y su clasificación a partir de las teorías verbales que permiten que los lectores se fijen en:

- Su estructura informativa. Cómo se ordena el contenido de lo que se dice, de lo particular a lo general o viceversa.
- El tema del que se trata y que se desplegará en campos semánticos. Es decir, se notará la progresión del tema básicamente con una serie de conceptos relacionados entre sí.

Objetividad y Subjetividad

Objetividad

La objetividad se basa en hechos reales y verificables. Asimismo, expresa la realidad tal cual es y aporta información objetiva.

Subjetividad

La subjetividad es un concepto que sintetiza la idea de que la naturaleza o el mundo y nuestra forma de sentido dentro del espacio social están constituidas esencialmente por las opiniones, creencias y saberes de los sujetos; así, estas entidades subjetivas de conocimiento fundamentarían los códigos y usos de sentido en nuestra existencia.

Hecho

Un hecho es todo evento comprobable mediante la percepción de los sentidos. El primer punto a considerar es si un hecho en concreto debe ser tomado como una manifestación de la realidad a la que tenemos al menos un acceso limitado, o tan solo como un dato que además de mostrar la verdad de las cosas, la oculta. Aunado a ello, el hecho es objeto de prueba y una entidad compleja que combina elementos observacionales y teóricos.

Opinión

La opinión es un juicio o valoración que se forma una persona respecto de algo o de alguien. Por otra parte, puede ser la fama o el concepto en que se tiene a alguien o algo.

Suposición

La suposición estriba en considerar como cierto o real algo a partir de los indicios que se tienen. Aunado a ello, también es considerar como cierto o real algo que no lo es o no tiene por qué serlo.

7.6 Diferentes tipos de texto

Tipos de texto expositivo

Los tipos de textos expositivos tienen como finalidad dar a conocer información de forma objetiva, apegada a la realidad, a los hechos, careciendo de opiniones o valoraciones subjetivas.

Destacan:

- La nota informativa: Que es ampliamente utilizada como forma de transmitir información apegada a los hechos. Utilizada ampliamente como fuente de información primaria y publicada en periódicos y revistas físicas o digitalizadas.
- Los textos didácticos: Son utilizados en el proceso de enseñanza-aprendizaje en los centros educativos.
- Los textos de consulta: Diccionarios, códigos, enciclopedias, que de igual forma son utilizados en los ámbitos escolares, académicos, de investigación y laborales.
- Los textos de divulgación científica: Que tienen por característica difundir los avances científicos a segmentos amplios de la población.

Tipos de texto argumentativo

Hay diversos tipos de textos argumentativos. Destacan los periodísticos de opinión, entre los que se encuentran el artículo, el editorial y la columna; los mensajes publicitarios y propagandísticos, que corresponden al ámbito comercial y del discurso político, respectivamente; el ensayo y la reseña crítica, que son textos ampliamente utilizados en trabajos escolares, académicos y obras literarias.

Todos los anteriores dentro del discurso argumentativo, que tiene como propósito o intención comunicativa convencer, persuadir, influir o modificar la postura del receptor-lector en torno a un tema.

7.7 Géneros literarios

Género narrativo

Elementos del análisis narrativo

Existen partes identificables y comunes en todo texto narrativo. A partir de ellas podemos analizar cómo se estructura un relato y cuáles son las funciones de cada una de las partes. De esta manera, los elementos serían:

- **Tema.** Es la idea principal o valor que el autor quiere resaltar y en torno al cual giran todos los elementos del relato. Por lo general, el tema puede definirse en unas pocas palabras. Por ejemplo, el tema de la “rectitud moral” o “portarse bien” en la historia de Pinocho.
- **Argumento.** Son las acciones básicas y principales que realizan o padecen los personajes. Dichas acciones no tienen una relación causal entre sí. Por ejemplo, el argumento es el mismo en el relato de Pinocho: un hombre mayor que nunca tuvo hijos talla un muñeco de madera. Luego un hada le da vida al muñeco y éste, tras enfrentar varios problemas, se gana la capacidad de volverse humano.
- **Historia.** A partir del ingenio del autor, es el orden y acomodo de los sucesos relatados dentro de una obra determinada. Por ejemplo, a pesar de que el argumento es el mismo, la historia en la obra de *Las aventuras de Pinocho*, escrita en 1883 por Carlo Collodi, es completamente distinta que la de la película Pinocho, producida por Walt Disney en 1940. Esto se debe a que los objetivos de ambos autores eran distintos, por lo cual algunos sucesos importan más que otros.
- **Trama.** Es el orden cronológico de los sucesos del relato. A diferencia del argumento, la trama intenta explicar las relaciones causales de dichos sucesos. Según la morfología de Propp, la trama se divide en un planteamiento (los personajes viven en la normalidad), nudo (problema que surge), clímax (cómo se resuelve el problema) y desenlace (regreso a una nueva normalidad). Según la red actancial de Grimas, la trama se divide en secuencias *mayores* (como las del planteamiento, nudo, clímax y desenlace) y *menores* (que son las acciones concatenadas dentro de cada secuencia mayor).
- **Narrador.** Es quien toma la voz para contar la historia. Según las clasificaciones de Mieke Bal, en tanto a la postura del narrador tenemos el *autodiegético* (que cuenta su propia historia); *homodiegético* (que cuenta la historia de alguien más, pero siendo también un personaje del relato); y *heterodiegético* (cuenta la historia desde fuera, sin ser personaje). Según el punto de vista del narrador tenemos en *primera persona* (ve los hechos y los cuenta), en *segunda persona* (haciendo la ilusión de que el narrador describe las acciones del lector hablándole de tú) y en *tercera persona* (cuenta la historia de alguien más, ya sea porque es testigo de los sucesos o relatando todo como una especie de dios omnisciente).
- **Personajes.** Son los seres que tienen la capacidad de realizar acciones e interactuar entre sí dentro de la obra. Según la red actancial de Greimas, los personajes son denominados como actantes y se dividen entre sujetos (protagonista); facilitadores o ayudantes (aquellos que benefician al protagonista); opositores (antagonista); dificultadores (aquellos que perjudican al protagonista, ya sea porque ayudan al antagonista o por sí mismos); y beneficiarios (quienes obtienen provecho de las acciones del protagonista).
- **Contexto.** Es el tiempo, lugar y circunstancias en los que se ambienta el relato.

Subgéneros narrativos

El mito

Los mitos son narraciones de tintes fantásticos que ofrecen interpretaciones religiosas y sagradas del mundo. Son muy comunes en los principios de toda civilización y los temas comunes son la creación del universo (mitos cosmogónicos), el nacimiento y función de los dioses (mitos teogónicos) la creación de los seres humanos (mitos antropogónicos), así como la creación de ciudades, batallas entre grupos humanos y trabajos de héroes y semidioses, quienes por lo general compartían la condición divina al ser concebidos entre mortales y dioses. Como ejemplos prototípicos tenemos a la *Ilíada* y a la *Odisea*, compuestas por Homero, y que cuentan muchos de los mitos de la Grecia clásica.

La leyenda

Este tipo de narraciones comparten algunas características de los mitos, especialmente por tener sucesos paranormales o fantásticos provocados por entidades divinas, demoniacas o sobrehumanas. Pero a diferencia de los anteriores, las leyendas cuentan historias que suceden en tiempos históricos y lugares conocidos; sus temas son menos trascendentes o religiosos, volviéndose más comunes, como la invención de un objeto o técnica, el consumo de cierto alimento o las relaciones entre seres vivos. En las leyendas, los personajes son de tinte popular, que pudieron haber existido, aunque los eventos que viven pudieron nunca haber pasado, y que muchas veces interactúan con objetos, animales o seres fantásticos, pero que tienen acciones o emociones humanas (prosopopeya). Como ejemplo tenemos la leyenda de la Llorona; la historia del Popocatepetl e Iztaccíhuatl; o la Mulata de Córdoba.

La fábula

La fábula es un subgénero narrativo originado en la época clásica, específicamente en la cultura griega. Las historias que cuenta son de tinte fantástico y ficticio, pues muchas veces encontramos seres inanimados o animales actuando como seres humanos (prosopopeya), así como personajes históricos. Su objetivo principal es la enseñanza o promoción de ciertos valores, acciones o actitudes consideradas como correctas a partir de la moral propia de la época. Por lo general, para que la enseñanza quedara más clara, se resumía en una parte final denominada “ moraleja”. Los autores más conocidos que practicaban este subgénero son Esopo, Tomás de Iriarte, Félix María Samaniego y Jean de La Fontaine.

Género dramático

Es el que se concibe para ser representado a través de una obra de teatro y se presenta a través de un diálogo. Por lo tanto, es uno de los grandes géneros de la literatura y se inicia en Grecia a través de los festivales que se realizaban en honor al Dios Dionicio. Por ese motivo se efectuaban dos fiestas al año: las tragedias y las comedias. Ver representadas sus tragedias significaba, para el pueblo griego una gran catarsis existencial. Las representaciones duraban todo el día y durante días. El teatro era semicircular. El estado les daba de comer y si no tenían dinero, la entrada era pagada por los ciudadanos con posibilidades económicas.

Ahora bien, el teatro se ha ido modificando a través del tiempo. Por consiguiente, actualmente se utilizan elementos como el guion, los personajes, acotaciones, (gesticulaciones de cara y cuerpo) parlamentos, (diálogos en la obra de teatro) vestuario, escenografía, espectador, escenario, (lugar y época dónde ocurre la obra de teatro) maquillaje, sonido, iluminación, director, dramaturgo, etc.

Subgéneros dramáticos

Subgéneros dramáticos son los que se originan posteriormente a la fundación del teatro. Asimismo, desde el origen se promulgó:

- La tragedia: Obras que tienen un destino predestinado fatídico, mueren o son asesinados los personajes.
- La comedia: Narrativa con un final feliz, la obra hace reír por las cosas chuscas que representa.
- La tragicomedia: Es la combinación de la tragedia y la comedia.
- La ópera: Trata como un género de música teatral en el que una acción escénica se armoniza, se canta y tiene acompañamiento de una orquesta.
- Zarzuela: es un tipo de teatro musical en el que la palabra hablada se alterna con la música

Género lírico

Otro de los grandes géneros fue el de los poemas llamado género lírico que trata cuándo el poeta expresa sus sentimientos más íntimos a través de los poemas. Se sugiere que el poema de Gilgamesh ha sido uno de los primeros poemas escritos y el Poema épico de la *Ilíada* y la *Odisea*.

Ahora bien, los elementos de la poesía son las figuras retóricas que son expresiones que dan belleza a la expresión y se clasifican en:

- Metáfora: Se cambia el sentido denotativo por sentido connotativo.
- Comparación: Establece una semejanza entre algo real e imaginario.
- Hipérbole: Consiste en la exageración para dar mayor énfasis a la expresión. Es una exageración desmedida.
- Prosopopeya: Atribución de cualidades o de acciones de seres animados a seres inanimados o abstractos.
- Aliteración: Consiste en repetición de un mismo sonido o varios en una misma palabra.
- Pleonismo: Consiste en la repetición de frases o expresiones para dar mayor énfasis a la expresión. etc.

El poema

Está conformado por versos, que son la unidad de palabras que integran un renglón. Las estrofas son el conjunto de versos pueden ser tres o cuatro versos. Si es un soneto son cuatro versos y así sucesivamente.

La poesía es una forma del discurso que se organiza en función del ritmo. La métrica de un poema implica rasgos que construyen el ritmo. El verso con su número de sílabas y su peculiar distribución de acentos, la estrofa, que viene determinada por la cantidad y la alternancia de versos que la integran, y las diferentes agrupaciones estróficas que hacen a un poema son lo que conforma la métrica de un poema.

Subgéneros líricos

- Oda: Se considera como una composición poética del género lírico, dividida en estrofas iguales, cuyo tono es la alabanza.
- Elegía: Relacionado con la tristeza, el lamento y el dolor.
- Sátira: Discurso o composición literaria en prosa o verso en el que se critican las costumbres o vicios de alguien con el afán de burlarse o de moralizar.
- Himno: Composición solemne, poética o musical, en alabanza de personajes, cosas o sucesos extraordinarios.

7.8 Elementos de una investigación

Etapas de la investigación

El proceso de investigación tiene estrecha interrelación con la lectura, la escritura y la revisión. Existen diversas etapas las cuales son:

- Selección o asignación de un tema. El estudiante desde un principio debe manejar una perspectiva del tema que va a investigar. Para esta labor puede dar respuesta a preguntas como las siguientes:
 - ¿Qué sabe del tema al momento de la asignación o elección?
 - ¿Cómo se relaciona con otros temas?
 - ¿En qué fuentes se puede consultar?
- Búsqueda de información. En el primer acercamiento a la bibliografía sobre el tema se pone en práctica la lectura exploratoria. Se indagan datos generales de los documentos, se formulan hipótesis sobre los títulos encontrados y se leen textos preliminares y breves, antes de acercarnos plenamente al contenido.
- El plan de trabajo. Es una herramienta fundamental que sirve para guiar y organizar la investigación, da una visión global del trabajo y orienta el orden en que debe cumplirse cada etapa. Esta planeación se elabora después de la búsqueda de la información preliminar. Sus partes son: delimitación del tema, justificación, objetivos, marco referencial, hipótesis, esquema inicial, agenda de trabajo y bibliografía.
- Acopio de la información. El momento de acopio de la información constituye, en el proceso general de la investigación, la parte fundamental de interrelación de las habilidades de lectura y escritura. El alumno pone en práctica la lectura analítica para conocer de manera profunda el contenido de la información y así sustraer lo más relevante para la investigación. En esta fase o etapa se elaboran las fichas de trabajo. En ellas se plasma la información recabada y constituye un trabajo de escritura en sí mismo y de preescritura para el texto final.
- Interpretación de la información. Se requiere la revisión de cada capítulo, tema y subtema. La relectura que se llevará a cabo sobre toda la información recabada permitirá ir construyendo el contenido fundamental del tema que se va a exponer por escrito.
- Redacción del escrito. Se divide en textualización y revisión. La textualización consiste en empezar a escribir el texto. En esta parte del proceso, el alumno debe resolver cuestiones para la escritura de su trabajo sin perder de vista a su receptor y el propósito del texto. En la revisión se observa si la coherencia se sostiene, si el texto está cohesionado, si se respetan las normas de ortografía, si el léxico es adecuado.
- Presentación del trabajo. En esta se debe incluir la versión final del trabajo de investigación. Por lo tanto, se debe tomar en cuenta la portada, el índice, la introducción, el cuerpo del trabajo, la conclusión y la bibliografía.

Método cuantitativo y cualitativo

El método de investigación cualitativo se centra en el “por qué” y básicamente se enfoca en recopilar datos que no son numéricos. Sus características son: la observación, es subjetiva, se infieren los datos, orientada al proceso y no generalizada.

El método de investigación cuantitativo es aquel que permite examinar los datos de manera numérica, especialmente en el campo de la Estadística. Sus características son: es objetiva, confirmatoria, datos sólidos y repetibles, generalizable.

Citas textuales y notas al pie de página

Cita textual

La cita textual se refiere a la extracción de fragmentos de una fuente externa. Se sugiere restringir su uso a situaciones particulares, por ejemplo, la inclusión de una definición exacta, datos numéricos que no se puedan aproximar, una idea memorable de algún autor o ideas precisas que luego se vayan a analizar o contrastar. Para este tipo de cita es necesario incluir el apellido del autor, el año de la publicación y la página de la que se retoma la información. Su formato varía de acuerdo con el énfasis de la cita. Hay dos formas de realizar una cita dependiendo de lo que se quiera enfatizar con ella. Por un lado, encontramos la citación narrativa, en la que se destaca el pensamiento o la posición específica de un autor. Por otro lado, en las citas parentéticas (o entre paréntesis) se hace referencia a una idea en la que el autor tiene un papel secundario.

A la luz de lo dicho, en la cita narrativa el autor se incluye en la redacción del párrafo, la fecha se pone entre paréntesis, se hace énfasis en el autor, implica el uso de frases de citación. Ejemplo:

Quintero (2020) plantea que...

Por otra parte, en la cita parentética se menciona la idea y los datos de autor y fecha aparecen entre paréntesis. Asimismo, se hace énfasis en el texto y no implica el uso de frases de citación. Ejemplo:

(Quintero, 2020)

Sumado a lo anterior, en los tipos de citas, además del énfasis, podemos encontrar el mecanismo que se usa para incluir la información de las otras fuentes. En ese sentido, las citas pueden ser textuales o directas, cuando se retoma la información tal como la han expresado los otros autores, y parafraseadas, cuando se elabora con las propias palabras, pero manteniendo su sentido original.

Finalmente, cuando la cita textual tiene menos de 40 palabras se integra en el párrafo y se pone entre comillas, sin cursiva. Se escribe punto al finalizar la oración que incluye la cita.

Nota al pie de página

Una nota al pie es una nota breve que proporciona información adicional o complementaria al texto. Debe contener solo una idea y evitar información excesivamente compleja, irrelevante, poco esencial o que pueda distraer al lector. Se deben numerar las notas al pie con números arábigos en superíndice. Pueden aparecer al interior del texto, en el pie de página, o en un apartado específico después de las referencias.

Bibliografía sugerida

- Baez Pinal, G. E. (2005). Diccionario básico de lingüística. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Barajas Sánchez, B. y Huitrón Torres, R. (2018). Prontuario del estudiante. herramientas básicas para desarrollar la escritura.
<https://www.cch.unam.mx/sites/default/files/ProntuarioEstudiante.pdf>
- Bal, M. (2006). Teoría de la narrativa. (6° ed.) Cátedra.
- Bauzá, H. F. (1998). El mito del héroe. Morfología y semántica de la figura heroica. Fondo de Cultura Económica.
- Berlo, D. (2014) El proceso de la comunicación. El Ateneo.
- Campbell, J. (1959). El héroe de las mil caras. Psicoanálisis del mito. (Trad. del inglés de Luisa Josefina Hernández) Fondo de Cultura Económica.
- Clases de lengua (2020). El teatro: género, representación. Tragedia, rama, comedia.
<https://www.claseslengua.com/2020/06/el-teatro.html>
- Escandell Vidal, M. V. (2014). La comunicación. Lengua, cognición y sociedad. Akal.
- Gómez Chagoya, M., Textos argumentativos. Universidad Autónoma del Estado de Morelos.
http://ri.uaemex.mx/bitstream/handle/20.500.11799/69957/secme-2549_3.pdf?sequence=3
- Gonzalos (2021) Los subgéneros literarios y sus características. Tendencias Media
<https://espaciolibros.com/los-subgeneros-literarios/>
- Gracida Juárez, M.Y. y Martínez Montes, G.T. (Coord.). (2007). El quehacer de la escritura. Propuesta didáctica para la enseñanza de la redacción en el ámbito universitario. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Greimas, A. J. (1971). Semántica estructural. Gredos.
- Morales, A. (s.f.). Figuras literarias. <https://www.significados.com/figuras-literarias/>
- Moreno, P. (2021) Lenguaje y Comunicación I y II. Ed. Geer.
- Narvaez, M. (s.f.) Método de investigación cualitativo: Qué es y cómo usarlo. QuestionPro.
<https://www.questionpro.com/blog/es/metodo-de-investigacion-cualitativo/>
- Real Academia Española. (2010). Manual de la nueva gramática de la lengua española. Espasa.
- Mendoza, D. (2024). Elementos básicos del teatro. Studocu.
<https://www.studocu.com/es-mx/document/escuela-normal-rural-j-guadalupe-aguilera/de-lo-humano-a-lo-comunitario/elementos-basicos-del-teatro/94614919>
- Mendoza, O. (2016). "Subjetividad y objetividad". Diccionario iberoamericano de filosofía de la educación.
<https://www.fondodeculturaeconomica.com/dife/definicion.aspx?l=S&id=21>

Propp, V. (2018). Morfología del cuento. Akal.

Rodríguez Pérez, D. (2008). Serpientes, dioses y héroes: el combate contra el monstruo en el arte y la literatura griega antigua. Universidad de León.

Sampieri, R. (2003). Metodología de la investigación. M-Graw-Hill.

Saniz Balderrama, L. (2008). El esquema actancial explicado. Punto Cero.

Soy Literatura (2020). Géneros y subgéneros literarios de la literatura universal y moderna.

<https://soyliteratura.com/generos-literarios/>

Suárez, E. (2023) Diferencia entre investigación cualitativa y cuantitativa. Experto Universitario.

<https://expertouniversitario.es/blog/diferencia-entre-investigacion-cualitativa-y-cuantitativa/>

Suárez, Violeta (s.f.). Los 12 elementos más importantes del teatro (y para qué sirven).

<https://estilonext.com/cultura/elementos-del-teatro>

Sule Fernández, T. (Coord.). (2010). Conocimientos fundamentales de español. Universidad Nacional Autónoma de México.

Taller de lectura y redacción.

https://0201.nccdn.net/1_2/000/000/09b/a7d/Taller-de-Lectura-y-Redaccion-I.pdf

Universidad Autónoma de México. (s.f.) Figuras Retóricas. Ejemplos.

<https://portalacademico.cch.unam.mx/alumno/tlriid3/unidad1/textoIconico/figurasRetoricasEjemplos>

Vidal, L. (2020). Lenguaje y Comunicación I y II. Ed. Asterión.

Wayra. (2019). El teatro griego: origen y desarrollo. Educa.

<https://www.youtube.com/watch?v=hx640mxyfRM>

8. Lengua adicional al español – Inglés

8.1 La comunicación y las relaciones interpersonales

Preguntas “Wh”

Se les conoce como Wh preguntas porque comienzan con esas letras (excepto how).

Son utilizadas para preguntar toda la información necesaria respecto a algún evento, cosa o persona y son las siguientes:

- What Utilizada para preguntar: “Qué”
- When Pedir información respecto al tiempo “Cuándo”
- Where Pedir información respecto al lugar “Dónde”
- Who Pedir información respecto a la(s) persona(s) “Quién(es)”
- Why Pedir información con respecto a la razón “Por qué”
- Which Pedir información con respecto a la elección “Cuál”
- How Pedir información respecto al modo “Cómo”

Verbos auxiliares de modo para deberes u obligaciones

Should y Must

Should + verb en forma simple para expresar consejo:

- You should study more Deberías de estudiar más

Must + verb en forma simple para expresar obligación:

- You must obey the law Tienes que obedecer la ley

Nota: Must expresa un fuerte compromiso, deber u obligación a diferencia de should que sirve para dar recomendación, consejo o sugerencia.

Verbos auxiliares de modo para expresar habilidad o pedir permiso

Can, Could, May y Might

can/could/may/might + verb en forma simple para expresar habilidad:

- I can work Yo puedo trabajar
- I could work Yo podría trabajar
- I may work Yo podría trabajar
- I might work Yo podría trabajar

Nota: May y might aunque expresan lo mismo, son expresiones con un grado mayor de cortesía

Verbos auxiliares de modo para expresar situaciones hipotéticas

Would

Would + verb en forma simple para expresar una situación imaginaria:

- I would work Yo trabajaría
- She would buy Ella compraría
- We would live in other place Nosotros viviríamos en otro lugar

8.2 La estructura y los elementos lingüísticos característicos de cada tiempo verbal

Presente simple

Se utiliza para hablar sobre acciones o rutinas diarias y la frecuencia con la que las realizamos.

- I always go to the park on Friday Siempre voy al parque los viernes
- My father works every day Mi padre trabaja todos los días
- I am a teacher Soy maestro

Pasado simple

Se utiliza para expresar eventos en el pasado.

- I visited my mother yesterday Visité a mi madre ayer
- Sam saw a cat in the park Sam vio un gato en el parque
- We ate fish yesterday Comimos pescado ayer

Pasado continuo

Son acciones en progreso que suceden en el pasado.

- I was jumping the rope yesterday Estuve saltando la cuerda ayer
- We were talking on the phone last night Estuvimos hablando por teléfono anoche
- Tom was doing his homework yesterday Tom estaba haciendo su tarea ayer

Futuro “will” y futuro “going to”

Se utilizan para expresar situaciones o acciones futuras.

will + verbo en forma simple para expresar una acción futura cuya decisión ha sido tomada repentinamente, y para expresar predicciones basadas en información previa.

- It is cold, I will close the window Hace frío, cerraré la ventana
- It is too much, I will not finish Es mucho, creo que no terminaré

be + going to + verbo en forma simple principalmente para expresar acciones futuras basadas en planes hechos y en rutinas u horarios establecidos.

- I am going to travel to Paris in two weeks and I am going to see the Eiffel tower.
Voy a viajar a París en dos semanas y voy a ver la torre Eiffel.

Primer condicional

Se utiliza para expresar causas y consecuencias.

will + verbo en forma simple para expresar una consecuencia futura basada en una causa presente. En las causas se comienza la frase con “if”

- If I don't care my health, I will be sick Si no cuido mi salud, me enfermaré

El orden

El orden puede ser invertido sin que el significado de la oración resulte afectado.

- I will be sick If I don't care my health Me enfermaré si no cuido mi salud

8.3 El texto como fuente de información y de expresión de nuevas ideas

Estrategias de lectura de comprensión

La comprensión de lectura es un proceso en el cual se integran los conocimientos y habilidades para entender un texto. Para poder comprenderlo es necesario reconocer el título y/o subtítulos ya que estos nos pueden dar la idea principal del mismo.

Se deben localizar los cognados verdaderos (son las palabras parecidas al español), ellos ayudarán a comprender de manera general el texto. Una imagen también puede ayudar a comprender de que trata la lectura.

Las palabras conocidas, es decir, las que se reconocen en inglés y su significado serán otro apoyo para comprender el texto.

Nota: No es necesario comprender todas y cada una de las palabras para lograr comprenderlo.

Bibliografía sugerida

Michael McCarthy, Jeann McCarten. (2004). Touchstone 1. Cambridge University Press.

https://uapa.cuaieed.unam.mx/avi/ing_1/U_4/ing1_u4_t1/index.html

Michael McCarthy, Jeann McCarten. (2014). Touchstone 2. Second edition. Cambridge University Press.

https://uapa.cuaieed.unam.mx/avi/ing_2/U_3/ing2_u3_t2/index.html

Michael McCarthy. (2012). Touchstone 3. Cambridge University Press.

<https://www.slideshare.net/danyboytiburon/student-book-touchstone-3-62753501>

Ambiente virtual de idiomas

https://uapa.cuaieed.unam.mx/avi/ing_2/U_2/ing2_u2_t1/index.html

https://uapa.cuaieed.unam.mx/avi/ing_3/U_2/ing3_u2_t1/index.html

Texto: The rabbit and the turtle

<http://www.web-esl.com/advreadings/rabbitturtle.htm>

Ejercicios de comprensión lectora

<https://www.grammarbank.com/lectura-en-ingles.html>

9. Ciencias Sociales

9.1 Ciencias Sociales

Durante los siglos XVII y XVIII algunos pensadores se preocuparon por iniciar el estudio de los fenómenos sociales sin recurrir a explicaciones teológicas o sobrenaturales, por lo tanto, las ciencias sociales cobran fuerza y se desarrollan como disciplinas intelectuales que estudian al hombre como ser social, por medio del método científico. A diferencia de las ciencias naturales, las ciencias sociales estudian la conducta de los individuos, así como las relaciones que establecen entre grupos y sus sociedades. Existen diferentes disciplinas incluidas bajo este campo, algunas de ellas son: Historia, Economía, Ciencia Política, Sociología, Derecho, Antropología, Comunicación y Psicología.

9.2 Formación Cívica Estado y gobierno

La vida cotidiana de los individuos se encuentra vinculada con diversas funciones que son reguladas por el Estado. Es decir, para garantizar la convivencia armónica del hombre en sociedad se planteó la necesidad de poner límites y establecer las normas que rigen los derechos y los deberes de los integrantes de los grupos sociales, cuya acción pública está regida por una entidad superior a ellos, el Estado. De este modo, el gobierno de un Estado es un conjunto de órganos e instituciones encargados de dirigir la vida de los ciudadanos.

Democracia en México

Etimológicamente, el término democracia y sus derivados provienen de los términos griegos demos (pueblo) y kratos (poder o gobierno). La democracia es una forma de gobierno, un modo de organizar el poder político en el cual el pueblo no es sólo el objeto del gobierno, es decir, lo que hay que gobernar, sino también el sujeto que gobierna. Por lo tanto, se distingue y se opone al gobierno de una sola persona, la monarquía o monocracia, y al gobierno de unos pocos como sería el caso de la aristocracia o de la oligarquía. Sin embargo, a pesar de cualquier definición general, cada país guarda características específicas correspondientes a su gobierno democrático, como México, para el presente caso.

Instituciones sociales

Este concepto implica reconocer una gran diversidad de formas de organización que abarcan desde las más sencillas, como la familia, hasta las más complejas como la escuela, las instituciones políticas o las jurídicas. Las instituciones sociales constituyen la compleja estructura social, a través de ellas se coordina y se establece la vida política, económica, ideológica y religiosa de la sociedad. Estas formas de organización pueden ser públicas, cuando dependen del Estado o privadas, cuando dependen de empresarios para su funcionamiento. Las instituciones sociales tienen como función la satisfacción de necesidades, tienen una existencia más o menos permanente, cuenta con una estructura, con identidad propia y normas de conducta.

Valores cívicos

Los principios civiles son valores fundamentales que nos permiten vivir adecuadamente en sociedad, es decir, permiten desarrollar relaciones adecuadas entre los distintos ciudadanos que integran el Estado mexicano. Algunos de los principios civiles más importantes son: libertad, igualdad, equidad, justicia, respeto, tolerancia, solidaridad, responsabilidad y el respeto por el medio ambiente.

9.3 Modelos teóricos

A partir del siglo XIX, las ciencias sociales se han desarrollado según distintos modelos o paradigmas con sus propios postulados o principios teóricos. Algunos de los modelos teóricos más relevantes son los siguientes:

Positivismo

El positivismo, creado por el pensador francés Augusto Comte, buscaba la existencia de leyes en la sociedad y por lo mismo un método que las estudiara. Este modelo se inclinó por la imitación del método utilizado por las ciencias naturales. Comte creó la Ley de los Tres Estadios Sociales, según la cual toda comunidad humana pasa por tres etapas de pensamiento: el estado teológico, metafísico y positivo. En el estadio positivo, la sociedad renuncia a la búsqueda inútil de ideas metafísicas y absolutas; pues se reconoce en la ciencia y su aplicación el verdadero motor del progreso humano.

Materialismo histórico

El materialismo histórico estudia los diferentes modos de producción que dominan sobre el desarrollo de la historia humana. De este modo la historia social depende de un desarrollo dialéctico, mediante el cual cada sistema económico encuentra contradicciones al interior de su propio funcionamiento hasta que finalmente queda superado por un nuevo modo de producción. Algunos de los principales exponentes de este modelo teórico fueron Karl Marx y Friedrich Engels.

Estructuralismo Funcionalismo

Es una perspectiva que busca entender cómo las estructuras e instituciones contribuyen a la estabilidad y el funcionamiento general de la sociedad. Émile Durkheim, Talcott Parsons, Herbert Spencer y Robert K. Merton fueron los principales exponentes. Entre sus estudios destacan cómo las instituciones sociales ayudan a mantener la cohesión y cómo se logra la estabilidad de la sociedad entendida como un sistema interdependiente, donde los individuos comparten normas y valores que los integran y previenen el caos. En síntesis, esta corriente sostiene que cada elemento de la sociedad (instituciones, normas, roles, etc.) desempeña una función que contribuye al funcionamiento general. El estructural funcionalismo fue criticado por restar valor a la agencia individual pues para esta teoría el contexto es prioritario, se le critica también el énfasis en la estabilidad por sobre el conflicto, lo que puede caer en justificar el conservadurismo o el determinismo del status quo ignorando las injusticias sociales.

9.4 Historia de México

El estudio de la historia de México comienza con el mundo prehispánico que coincide con el desarrollo de las grandes culturas de Mesoamérica que actualmente conocemos. Sin embargo, el proceso de formación cultural que hoy en día forma parte de la identidad nacional es bastante amplio y atraviesa por distintos periodos; cada uno igual de importante que los otros para interpretar y conocer nuestro presente.

México Prehispánico

A diferencia de *Aridoamérica* y *Oasisamérica*, el concepto de *Mesoamérica* se usa para ubicar el área geográfica en la República Mexicana donde se desarrollaron diferentes civilizaciones importantes, entre las cuales se encuentran, por ejemplo: la Olmeca, Mexica, Tolteca, Teotihuacana, Zapoteca, Mixteca, Purépechas, la zona Maya, entre otras.

La Conquista

La Conquista refiere al periodo que comienza desde la llegada a América de Cristóbal Colón en 1492, hasta la caída de Tenochtitlán. En este contexto es de suma importancia la participación de Hernán Cortés que había salido de Cuba con un ejército privado de alrededor de 500 soldados para llegar a las costas de Veracruz en abril de 1519, bajo órdenes de Diego Velázquez de Cuéllar.

El Virreinato de la Nueva España

El periodo colonial en México es bastante extenso, pues abarca aproximadamente 300 años de conquista española sobre el territorio nacional. Durante este periodo se formó gran parte de nuestra identidad cultural como consecuencia de un continuo sincretismo social entre elementos de la cultura europea, importada por España y la población indígena.

Independencia de México

El proceso de Independencia en México duró aproximadamente 11 años, durante los cuales participaron diferentes personajes para expulsar finalmente el dominio extranjero sobre el territorio de la nueva nación. Entre semejantes personajes se encuentran Miguel Hidalgo, José María Morelos y Pavón, Vicente Guerrero o Agustín de Iturbide.

México Independiente (1821-1855)

Tras la expulsión del dominio español bajo el territorio de la nueva nación, México atravesó por una gran inestabilidad política definida por el constante cambio entre formas de gobierno inestables. Es decir, durante este breve periodo que duró menos de cuatro décadas, en México se desarrollaron un imperio, dos repúblicas federalistas, una república centralista y una dictadura. Asimismo, la nación sufrió derrotas bélicas importantes bajo las intervenciones extranjeras de Francia y Norteamérica.

Conflictos bélicos internos e intento de reconquista (1829-1848)

Expedición de Isidro Barradas. En 1829, el militar español Isidro Barradas intentó reconquistar México tras la independencia. Con un ejército enviado desde Cuba, Barradas desembarcó en la costa de Veracruz, pero fue derrotado por las fuerzas mexicanas lideradas por Antonio López de Santa Anna. Esta expedición marcó el último intento serio de España de recuperar el territorio mexicano.

República del Río Grande. Fue un intento fallido de secesión de los territorios del noreste de México, incluidos los actuales estados de Tamaulipas, Coahuila, Nuevo León y Texas. En 1836, un grupo de separatistas proclamaron la República del Río Grande, pero no lograron el reconocimiento ni la estabilidad política, y fueron derrotados por el ejército mexicano.

Independencia de Texas. En 1836, Texas se separó de México después de una serie de rebeliones y conflictos armados, culminando en la batalla de San Jacinto, donde las fuerzas texanas, lideradas por Sam Houston, derrotaron al ejército mexicano. Texas se declaró independiente y, en 1845, fue anexado a los Estados Unidos, lo que desencadenó la Guerra con México.

Primera Intervención Francesa. En 1838, Francia intervino militarmente en México debido a las quejas de los comerciantes franceses sobre los daños a sus propiedades en México. El conflicto se resolvió tras el pago de una indemnización de 600,000 pesos a Francia, este episodio de la historia es popularmente conocido como la "Guerra de los Pasteles".

Independencia de Yucatán. En 1841 Yucatán declaró su independencia de México debido a tensiones políticas y económicas con el gobierno central, pero después de varios conflictos y un intento fallido de unirse a la República de Centroamérica, la región volvió a incorporarse a México en 1848, tras una serie de negociaciones.

Intervención de los Estados Unidos de América

Abonando a las difíciles décadas que vivía la joven nación mexicana, sobrevino entre 1846 y 1848 la Intervención de los Estados Unidos. Esta fue un conflicto armado entre ambos países que tuvo lugar a partir de la anexión de Texas a los Estados Unidos en 1845, lo que provocó una disputa territorial entre México y su vecino del norte. Tras el fracaso de las negociaciones diplomáticas, el presidente estadounidense James K. Polk ordenó el envío de tropas a la región disputada del río Bravo (también conocido como Río Grande), lo que llevó a los enfrentamientos en 1846. La guerra se extendió por varios frentes, incluyendo la ocupación de territorios como California y Nuevo México. El conflicto culminó con la firma del Tratado de Guadalupe Hidalgo en 1848, en el cual México cedió más de la mitad de su territorio (incluyendo los actuales estados de California, Arizona, Nuevo México, Texas, entre otros) a los Estados Unidos a cambio de 15 millones de dólares y la promesa de respeto por los derechos de los mexicanos en esas tierras. La guerra tuvo profundas repercusiones en la política interna de México y en su relación con los Estados Unidos.

Proceso de Reforma Liberal

a) Guerra de Reforma (1857-1861)

Después de la dictadura de Santa Anna, el gobierno liberal de Ignacio Comonfort enfrenta problemas ante una oposición conservadora dirigida por Félix Zuloaga mediante el Plan de Tacubaya. Como consecuencia, el presidente abandona el cargo y el gobierno liberal de Benito Juárez se tiene que enfrentar al gobierno conservador mencionado.

b) El Segundo Imperio: Maximiliano de Habsburgo (1863-1867)

Tras la derrota de los conservadores, Benito Juárez toma el poder bajo un breve periodo de tiempo (1861-1863) pues, como medida para fortalecer la economía de la nación, Juárez decreta una moratoria que suspende durante dos años el pago de todas las deudas públicas con las naciones extranjeras y, bajo este pretexto, el gobierno francés decide invadir la nación, por segunda ocasión, imponiendo a Maximiliano como emperador de México, quien después de medítalo acepta el encargo pero su gobierno decepciona a los conservadores que lo apoyaron por ser corte liberal, sin que por ello se ganará el respeto de sus opositores.

c) República restaurada (1867-1876)

Después de la retirada del ejército francés y de la caída de Maximiliano de Habsburgo, en México se restaura la república bajo el gobierno de Benito Juárez y Sebastián Lerdo de Tejada sucesivamente. No obstante, cuando Lerdo de Tejada busca reelegirse, Porfirio Díaz aprovecha para declararse en contra con el Plan de Tuxtepec y, contrario a lo sucedido con su Plan de la Noria, esta vez consigue el apoyo militar necesario para derrocar al gobierno y ocupar el poder.

El Porfiriato (1876-1910)

Durante sus primeros años de gestión Porfirio Díaz reprimió levantamientos para consolidarse como dictador. La llamada paz porfiriana se caracterizó por una mayor centralización y elecciones fraudulentas para conservar el control del Estado. Para sostener su política Díaz utilizó el ejército como herramienta para sofocar rebeliones y controló a la oposición mediante persecuciones y encarcelamientos. En su gobierno la economía mexicana experimentó un crecimiento impulsado por la inversión extranjera en sectores como el ferrocarril, la minería y la agricultura, en este último ámbito, la tierra productiva se concentró en grandes latifundios en perjuicio de los pequeños campesinos. Por otro lado, se promovieron importantes obras de infraestructura cultural, como el Palacio de Bellas Artes. En síntesis, el país se modernizó, pero a costa de una gran desigualdad social,

los beneficios de la educación y el progreso eran solo para la élite porfirista, situación que sería el origen de la Revolución Mexicana.

La Revolución Mexicana (1910-1920)

Aunque la Revolución Mexicana comenzó con las acciones populares en contra del gobierno de Porfirio Díaz. Durante este proceso, que duró muchos años, diferentes grupos en pugna generaron un ambiente político de constante tensión caracterizada por conflictos locales armados. Entre algunos personajes importantes de este proceso se encuentran, Francisco I. Madero, Emiliano Zapata, Francisco Villa, Venustiano Carranza, Victoriano Huerta o Álvaro Obregón. Algunos hechos destacados de este periodo fueron el exilio de Díaz en 1911, el golpe de estado orquestado por Huerta en 1913, la toma de Zacatecas en ese mismo año por las tropas de Villa, la invasión de este caudillo a la ciudad de Columbus en EUA, la promulgación de la Constitución de 1917, la emboscada a Zapata en Chinameca en 1919 y finalmente el Plan de Agua Prieta que significó la renuncia y asesinato de Carranza en 1920.

La Reconstrucción Nacional (1920-1934)

A partir del gobierno de Álvaro Obregón comienza un periodo de reconstrucción en México que continúa con el gobierno de Plutarco Elías Calles y durante la etapa conocida como *Maximato* que se extendió desde la muerte de Obregón en 1928 hasta el ascenso de Manuel Ávila Camacho en 1940. Este periodo incluyó los gobiernos de Emilio Portes Gil, Pascual Ortiz Rubio y Abelardo L. Rodríguez. Sus gestiones, aunque dominadas por el autoritarismo y la intervención del poder de Calles, sentaron las bases para muchas de las reformas políticas, sociales y económicas que marcarían el rumbo de México en las siguientes décadas. Por ejemplo, Portes Gil consolidó el control político del PNR y negoció el fin de la Rebelión Cristera, por su parte, Ortiz Rubio enfrentó la crisis económica de 1929 y la gran depresión, mientras que Rodríguez impulsó la reforma agraria, creó la CNC y profundizó el proceso de nacionalización del país, además de seguir con la institucionalización de las relaciones laborales.

Cardenismo (1934-1940)

Aunque Lázaro Cárdenas fue designado presidente por Calles, éste no pudo ejercer control sobre él y su gestión destacó porque expropió la industria petrolera, antes controlada por empresas extranjeras, lo que proporcionó ingresos significativos para el Estado y fortaleció la soberanía nacional, sin embargo, esto creó una dependencia económica de la industria, lo que pudo poner en riesgo la estabilidad económica a largo plazo. Cárdenas también distribuyó tierras a los campesinos, reduciendo disputas por la propiedad y promoviendo la autosuficiencia alimentaria, aunque no se redujo significativamente la proporción de latifundios, y muchos campesinos siguieron en condiciones precarias, además el plan para modernizar el campo careció de los recursos necesarios, limitando su efectividad. Por otro lado, aumentó considerablemente el presupuesto educativo, mejorando la calidad y accesibilidad de la educación en el país, pero hubo falta de financiamiento para la formación técnica. En el ámbito laboral y social, fomentó la organización sindical y la negociación colectiva, lo que resultó en mejoras salariales y mejores condiciones laborales para los obreros y recibió a miles de exiliados republicanos españoles, enriqueciendo la cultura mexicana con intelectuales y artistas.

México contemporáneo: a partir de 1940

a) 1940 a 1982

Entre 1940 y 1982, México experimentó un crecimiento sostenido en las primeras décadas del periodo, bajo el modelo de desarrollo estabilizador. Sin embargo, la estabilidad política estuvo marcada por el control absoluto del PRI, la represión de opositores y movimientos sociales, y la falta de reformas electorales significativas, en estos años se vivió la guerra sucia o guerra de baja intensidad

hacia los opositores del régimen, con importantes repercusiones sociales. La economía pasó por distintas etapas, desde un enfoque moderado hacia un mayor endeudamiento externo y un modelo de desarrollo basado en la explotación de recursos naturales. La crisis de 1982, además de servir como antecedente para la imposición del modelo neoliberal en el país, marcó el fin de una era que declaró cumplidas las exigencias de la Revolución Mexicana al tiempo que explotó hasta el final el llamado Milagro Mexicano. Siete presidentes encabezaron la administración del país en estos años. Enseguida se detallan algunos de los hechos más significativos de cada periodo.

Manuel Ávila Camacho (1940-1946)

Durante su gobierno, se mantuvo una política económica basada en la estabilidad y el control del gasto público. Se fomentó la industria nacional tras la Segunda Guerra Mundial, pero con una política de moderación fiscal. Con el PRI se consolidó el sistema político autoritario y no se implementaron reformas electorales significativas. Gracias a que Ávila Camacho mantuvo un equilibrio entre las fuerzas políticas y evitó grandes conflictos su gobierno fue visto como un periodo de estabilidad después de los excesos de la Revolución Mexicana.

Miguel Alemán Valdés (1946-1952)

Impulsó una política de industrialización, con un enfoque en la modernización del país y el fomento a la inversión privada. Se promovieron grandes obras de infraestructura, como el aeropuerto de la Ciudad de México y la carretera Panamericana. Durante su mandato, se modificó el Código Electoral para fortalecer la intervención del gobierno en las elecciones. Alemán, conocido como el "presidente del progreso", favoreció a las élites económicas y consolidó un modelo económico capitalista y moderno.

Adolfo Ruíz Cortines (1952-1958)

Ruíz Cortines continuó con el modelo del desarrollo estabilizados, impulsó políticas de austeridad y mantuvo una estabilidad económica. La inflación se controló, y el país experimentó un crecimiento moderado. En 1953, bajo su mandato, las mujeres obtuvieron el derecho al voto, un hito histórico en la política mexicana. Esta reforma fue un gran avance en los derechos civiles.

Adolfo López Mateos (1958-1964)

López Mateos continuó con crecimiento sostenido y control de la inflación. Durante su gobierno se nacionalizó la industria eléctrica en 1960, lo que provocó un conflicto con Estados Unidos, pero representó un avance en la soberanía económica. López Mateos mantuvo el control sobre las elecciones y la política lo que consolidó aún más la hegemonía del PRI.

Gustavo Díaz Ordaz (1964-1970)

Díaz Ordaz aumentó la deuda externa y fomentó la industria pesada y la infraestructura, aunque mantuvo el modelo de desarrollo estabilizador. Durante su mandato, la represión política aumentó especialmente hacia los movimientos estudiantiles, con la matanza de Tlatelolco en 1968, un hecho de gran repercusión política y social.

Luis Echeverría Álvarez (1970-1976)

México experimentó una acelerada expansión del gasto público y de la deuda externa durante este periodo. Aunque Echeverría implementó el modelo de "desarrollo compartido", la inflación y la deuda comenzaron a aumentar significativamente. Al igual que su predecesor su mandato estuvo marcado por un autoritarismo y la represión de movimientos sociales. En 1971, durante el "Halconazo", se reprimió violentamente a los estudiantes.

José López Portillo (1976-1982)

López Portillo implementó un modelo económico orientado hacia la modernización y la explotación de recursos naturales. La crisis de 1976 lo obligó a recurrir a la deuda externa, lo que aumentó la dependencia financiera de México. En 1977, implementó una serie de reformas fiscalistas para modernizar la economía, pero al final de su gobierno en 1982 se produjo una crisis económica debido al colapso de los precios del petróleo. Durante su mandato la oposición comenzó a crecer debido a las crisis políticas y económicas y el creciente descontento hacia el PRI.

b) Neoliberalismo

El gobierno de Miguel de la Madrid marca el inicio del neoliberalismo en la historia de México, caracterizado por la privatización y la apertura del mercado nacional, mediante su incorporación al comercio internacional o globalizado. No obstante, la historia de México durante este periodo también ha estado marcada por fuertes crisis económicas que han generado grandes problemas sociales, por ejemplo, relacionados con la desigualdad entre las clases sociales.

Miguel de la Madrid (1982-1988)

Durante este periodo el país vivió una fuerte devaluación del peso y una inflación elevada. Ante la crisis, el gobierno de la Madrid adoptó las recomendaciones del Fondo Monetario Internacional (FMI) y el Banco Mundial. Esto incluyó políticas recortes en el gasto público, privatización parcial de empresas estatales y una política económica más orientada hacia el mercado. México reestructuró su deuda externa bajo acuerdos con bancos internacionales, buscando aliviar los pagos a largo plazo. En la industria se inició un proceso gradual de apertura con la firma de acuerdos de libre comercio y la reducción de aranceles.

Carlos Salinas de Gortari (1988-1994)

Salinas asumió la presidencia luego de una polémica elección en la que su opositor del PRD, Lázaro Cárdenas, alegó fraude por la caída del sistema de conteo de votos. Su gestión continuó las reformas neoliberales privatizando más de 1,000 empresas estatales, incluidas las grandes empresas del sector energético, telecomunicaciones, transporte y la banca. En su gobierno también se firmó el TLCAN entre México, Estados Unidos y Canadá, promoviendo la apertura comercial y la integración económica regional, aunque con costos muy altos para la industria nacional, especialmente para el campo. Por otro lado, para incrementar la inversión extranjera la banca fue privatizada, se promovió la competitividad y la globalización de las empresas mexicanas. En los últimos días de este sexenio estalló el conflicto armado del EZLN en Chiapas en el que numerosos indígenas se declaraban en contra de las reformas neoliberales del gobierno y a favor del reconocimiento de sus derechos y autonomía.

Ernesto Zedillo (1994-2000)

El sexenio de Zedillo comenzó no solo con la crisis social y política provocada por el levantamiento del EZLN en Chiapas y el asesinato de Luis Donaldo Colosio, entonces candidato del PRI a la presidencia, sino también con la crisis económica de diciembre de 1994, conocida como el "error de diciembre", provocada por la devaluación del peso y una fuga de capitales. Estas situaciones pusieron en evidencia las vulnerabilidades del modelo neoliberal. A pesar de ello, Zedillo reformó el sistema bancario, liberó el mercado de las telecomunicaciones y siguió privatizando empresas. Destacó por la polémica que provocó el rescate que hizo con dinero público de las deudas privadas de los bancos, conocido como Fobaproa.

Vicente Fox (2000-2006)

Dado el descontento con los gobiernos anteriores, luego de Zedillo, asumió la presidencia el candidato del PAN, partido opositor, por lo que se considera que este fue el periodo de la alternancia política, sin embargo, Fox, mantuvo muchas de las políticas neoliberales implementadas por el PRI, continuó con la implementación del TLCAN y fortaleció la integración económica con Estados Unidos. Durante su gobierno enfrentó movimientos sociales opositores como el de los maestros en Oaxaca (APPO), o los pobladores de San Salvador Atenco en el Estado de México estos últimos fueron reprimidos por el entonces gobernador Enrique Peña Nieto.

Felipe Calderón (2006-2012)

Una vez más, el candidato del PAN asumió el gobierno, tras reclamos de fraude e impugnaciones por parte de su opositor del PRD, Andrés Manuel López Obrador. El gobierno de Calderón enfrentó la falta de legitimidad social a través de una política de seguridad nacional enfocada en el combate al narcotráfico, lo que afectó gravemente la seguridad en varias regiones del país. En términos económicos continuó con la desregulación del mercado laboral, por ejemplo, con la extinción de grandes empresas y sindicatos como el de la compañía paraestatal de Luz y Fuerza del Centro y promovió la privatización de servicios y sectores productivos.

Enrique Peña Nieto (2012-2018)

El PRI recuperó la presidencia de México con Peña Nieto, pero heredó una desaceleración económica y altos niveles de corrupción y violencia. A pesar de esto, se continuó implementando las reformas neoliberales de todos los años anteriores. Una de las más importantes fue la reforma energética, que permitió la inversión privada en el sector energético, especialmente en petróleo y gas, que buscaba debilitar el control de PEMEX y la CFE de los hidrocarburos y la producción de electricidad. Peña Nieto también promovió reformas en diversas áreas como educación, telecomunicaciones, competencia económica, y laboral, buscando dar mayor dinamismo a la economía mexicana. Sin embargo, la imagen del gobierno fue duramente afectada por escándalos de corrupción, como el caso de la "Casa Blanca", y atropellos a los derechos humanos como la desaparición de 43 estudiantes de la normal rural Raúl Isidro Burgos en Ayotzinapa, Guerrero.

Estructura socioeconómica de México en el siglo XXI

Población y demografía

a) Diversidad social

México es un país de extraordinaria diversidad étnica y cultural, reflejada en sus múltiples regiones y comunidades, que albergan una rica variedad de lenguas, tradiciones, costumbres y manifestaciones

artísticas. Cada una de sus regiones tiene características propias que enriquecen el panorama nacional. En el sur, por ejemplo, el estado de Chiapas es hogar de diversos grupos indígenas como los tzeltales y tzotziles, cuyas costumbres y lenguas siguen vivas a través de los siglos. En el sureste, en Oaxaca, conviven un gran número de pueblos originarios, como los zapotecos y mixtecos, quienes mantienen vivas sus tradiciones textiles y gastronómicas. En el centro, el Estado de Puebla es famoso por su mezcla de tradiciones indígenas y coloniales, reflejada en su arquitectura y festividades como la Guelaguetza. En el norte, estados como Sonora y Chihuahua tienen una fuerte influencia de las culturas mestizas y nativas, pero también de tradiciones estadounidenses, debido a su cercanía con la frontera. Esta diversidad se extiende a las lenguas, ya que México es hogar de 68 lenguas indígenas, siendo el náhuatl y el maya algunos de los más hablados.

En conjunto, estas diferencias culturales y étnicas convierten a México en un mosaico de tradiciones vivas que se celebran y preservan a través de una gran variedad de festividades, gastronomía, arte y costumbres que definen la identidad del país. En este contexto, cabe señalar, que la etnicidad, al igual que la raza, es una construcción social; no una predeterminación biológica. Sin embargo, las diferencias étnicas en México lamentablemente han generado problemas de discriminación y asilamiento de diferentes grupos sociales y sus prácticas culturales.

b) Población

México es un país con una población de aproximadamente 126 millones de habitantes (según el INEGI, 2020), y esta población muestra una notable diversidad en cuanto a características demográficas. En términos de grupos de edad, el país presenta una estructura demográfica relativamente joven, con una mediana de edad de 29 años. Sin embargo, este perfil está cambiando gradualmente debido al envejecimiento poblacional. Mientras que los estados del sur, como Chiapas y Guerrero, tienen una mayor proporción de población joven, en entidades del norte y centro del país, como Nuevo León y CDMX, hay un aumento progresivo de la población adulta mayor.

c) Desarrollo demográfico

El estudio del desarrollo demográfico parte de categorías como migración, crecimiento urbano, natalidad, mortalidad y esperanza de vida. Por ejemplo, en cuanto a la esperanza de vida, México ha mostrado avances significativos, con un promedio de 75 años a nivel nacional, aunque existen variaciones entre las entidades federativas. Por ejemplo, la CDMX tiene una esperanza de vida más alta, cercana a los 77 años, debido a mejores servicios de salud y condiciones de vida, mientras que estados como Chiapas y Guerrero presentan cifras más bajas, con una esperanza de vida promedio de alrededor de 72 años, reflejando disparidades en acceso a salud y condiciones socioeconómicas.

En términos de población rural y urbana, el país sigue siendo mayoritariamente urbano, con cerca del 80% de la población viviendo en áreas urbanas. Esta urbanización ha crecido especialmente en ciudades como Guadalajara, Monterrey y la Ciudad de México, que concentran la mayor parte de la población y recursos económicos del país. Esto se entiende porque el crecimiento urbano es un proceso económico con una dimensión espacial, en la que los factores de producción, las empresas y las localidades adquieren niveles de especialización cada vez mayores. A medida que una zona urbana aumenta en población, adquiere nuevas funciones, amplía las existentes y modifica las relaciones que son el vínculo entre las condiciones técnicas y las espaciales del progreso económico.

Esto nos lleva a revisar también el concepto de migración se puede definir como el movimiento de las personas desde un lugar hasta otro; con la intención de fijar su residencia en el destino de forma permanente o semipermanente. En nuestro país, la migración se ha vuelto un fenómeno social cada vez más grande, lo que produce tensiones latentes entre los residentes de las ciudades de acogida y la búsqueda de mejores condiciones de vida para las personas que migran, ya sea de países vecinos o de

connacionales hacia EUA.

Desarrollo social

a) Salud

México cuenta con un sistema de salud mixto en el que coexisten varios servicios, tanto públicos como privados. Según el INEGI y la Encuesta Nacional de Salud y Nutrición (ENSANUT), alrededor del 80% de la población tiene acceso a algún servicio de salud, a través de diferentes instituciones. Los principales organismos de salud pública en México son: IMSS (Instituto Mexicano del Seguro Social), que atiende principalmente a trabajadores asalariados y sus familias. ISSSTE (Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado), dirigido a los empleados públicos. Seguro Popular (hasta su sustitución por el INSABI en 2020), que buscaba ofrecer cobertura a quienes no estaban afiliados a otros servicios, principalmente en áreas rurales. INSABI (Instituto de Salud para el Bienestar), creado para asegurar la atención médica universal gratuita, aunque enfrenta desafíos operativos. Sin embargo, persisten desigualdades en el acceso a los servicios entre las zonas urbanas y rurales, con las regiones del sur del país enfrentando mayores limitaciones en cuanto a infraestructura y cobertura médica.

Otras variables importantes para tomar en cuenta cuando analizamos el sector de salud en México, es la cobertura de la salud mental por los servicios de seguridad social. La salud mental ha emergido como una de las preocupaciones más importantes en México, especialmente con los efectos de la pandemia de COVID-19. Según los datos del INEGI y la ENSANUT, se ha observado un aumento en los casos de trastornos mentales, como la depresión y la ansiedad. Un par de puntos proposiciones descriptivas y estadísticas sobre la salud mental en México son que casi el 10% de la población adulta mexicana presenta algún tipo de trastorno mental, siendo la depresión y los trastornos de ansiedad los más comunes y, por otra parte, el suicidio es una causa significativa de muerte, especialmente entre los jóvenes. Las tasas más altas de suicidio se han registrado en estados como Durango y Chihuahua.

En cuanto a la discapacidad, otro tema pendiente en la agenda de salud en México también enfrenta desafíos importantes. Según el INEGI: 7.6% de la población mexicana (alrededor de 9.4 millones de personas) vive con alguna discapacidad, ya sea motriz, visual, auditiva, intelectual o psicosocial. Las personas con discapacidad enfrentan barreras significativas en términos de acceso a la educación, el empleo y servicios de salud adecuados. El gobierno mexicano ha implementado políticas y programas, como el Programa de Inclusión Social para Personas con Discapacidad y la Ley General para la Inclusión de las Personas con Discapacidad, pero la integración plena de estas personas en la sociedad y la eliminación de barreras arquitectónicas y sociales sigue siendo un reto importante.

b) Educación

El sector educativo en México ha avanzado significativamente, pero persisten desafíos importantes, especialmente en lo que respecta a la desigualdad regional, el analfabetismo, y el acceso a la educación superior. Los programas de becas y los esfuerzos para aumentar la cobertura en todos los niveles han tenido un impacto positivo, pero se necesita continuar trabajando para garantizar que todos los estudiantes, independientemente de su origen social o geográfico, tengan acceso a una educación de calidad.

En términos de cobertura y acceso a la educación los niveles de escolaridad han mejorado en las últimas décadas, pero persisten disparidades significativas entre las zonas urbanas y rurales. Por ejemplo:

- Educación básica (primaria y secundaria): La cobertura es casi universal, alcanzando cerca del 98% de la población en edad escolar. Sin embargo, en estados del sur como Chiapas, Guerrero y Oaxaca, el acceso a la educación secundaria es menor que en otras regiones.
- Educación media superior (preparatoria): La cobertura ha aumentado en las últimas décadas, pero aún existen diferencias significativas entre las regiones del país, y solo alrededor del 50-60% de los jóvenes de 18 a 23 años acceden a la preparatoria, con mayores brechas en zonas rurales y marginadas.
- Educación superior (universitaria): Aproximadamente el 40% de los jóvenes en edad de ingresar a la universidad tiene acceso a este nivel educativo, aunque el acceso es más limitado en áreas rurales y para los grupos socioeconómicos más bajos.

Por otro lado, México ha logrado avances importantes en la reducción del analfabetismo, especialmente en las últimas décadas. Según el INEGI y datos del Censo 2020, el porcentaje de analfabetismo en la población adulta (de 15 años y más) ha disminuido al 4.0% a nivel nacional, pero sigue siendo mayor en zonas rurales y entre mujeres adultas mayores. En estados como Chiapas, Guerrero y Oaxaca, las tasas de analfabetismo son más altas, lo que refleja la desigualdad en el acceso a la educación básica.

También hay que tomar en cuenta que, aunque la educación pública predomina en México, los servicios educativos privados han crecido, especialmente en las grandes ciudades y entre los sectores de clase media y alta. La educación privada representa alrededor del 10-15% de la matrícula escolar, principalmente en los niveles de educación media superior y superior. Las instituciones privadas tienen una fuerte presencia en áreas urbanas y ofrecen alternativas educativas con estándares internacionales, lo que también genera una brecha en la calidad educativa.

Frente a este panorama México ha implementado varios programas sociales de becas para mejorar la equidad en el acceso a la educación, como parte de sus políticas para combatir la pobreza y promover la inclusión. Algunos de los programas más importantes incluyen la Beca Universal para Estudiantes de Educación Media Superior (Becas Benito Juárez), dirigida a estudiantes de preparatoria en familias de bajos recursos, con el objetivo de reducir la deserción escolar, la beca para la Educación Superior (Beca Elisa Acuña) que ofrece apoyos a estudiantes de universidades públicas en situaciones de vulnerabilidad económica o las becas al Bienestar Benito Juárez en el nivel primaria y secundaria, con el fin de asegurar que los estudiantes continúen sus estudios sin ser afectados por limitaciones económicas.

Una vez asegurada la educación básica, se enfrenta el problema del acceso a la educación superior. Aunque este ha crecido en las últimas décadas, sin embargo, hoy en día la demanda supera la oferta en muchas universidades públicas, especialmente en las más prestigiadas. Por ello el proceso de admisión en universidades públicas como la UNAM, IPN y UAM es altamente competitivo, con exámenes de selección que filtran a los aspirantes. La tasa de ingreso a la universidad varía entre el 40% y 50% de la población joven, con diferencias notables entre entidades federativas y estratos socioeconómicos. El aumento de las universidades privadas ha contribuido a satisfacer la demanda de acceso a educación superior, pero la calidad y el costo siguen siendo factores determinantes en el acceso para estudiantes de menores recursos.

c) Empleo y desempleo

El empleo y desempleo en México muestran una realidad compleja que varía considerablemente tanto a nivel nacional como estatal. Según datos más recientes del INEGI, la tasa de desempleo a

nivel nacional se mantiene alrededor del 3.5%, aunque con diferencias notables entre regiones. Los estados del norte, como Nuevo León y Baja California, tienden a tener menores tasas de desempleo, gracias a su cercanía con los Estados Unidos y su enfoque en la manufactura, mientras que los estados del sur como Chiapas y Guerrero presentan tasas más altas debido a una menor industrialización. En términos de género, las mujeres enfrentan una tasa de desempleo ligeramente superior a la de los hombres, y están más concentradas en trabajos informales y de bajos salarios, con mayores dificultades para acceder a puestos en sectores de alta remuneración. En cuanto a edades, el desempleo es más elevado entre los jóvenes (15-29 años), que enfrentan barreras significativas para ingresar al mercado laboral formal debido a la falta de experiencia y las limitadas oportunidades en sectores como la tecnología y la industria. El empleo en México está muy marcado por la informalidad, representando aproximadamente el 56% de la población ocupada, con la mayoría en actividades de comercio y servicios. Además, las condiciones laborales suelen ser precarias, con una gran parte de los empleados contratados bajo salarios bajos y contratos temporales o por honorarios, especialmente en sectores como agricultura y servicios. El nivel salarial en el país está por debajo de la media de América Latina, con una gran parte de la población laboral ganando menos del salario mínimo, lo que afecta su calidad de vida y limita su acceso a servicios de salud, educación y seguridad social.

d) Distribución de la riqueza

En México, la distribución de la riqueza es extremadamente desigual, con una concentración significativa de los recursos en manos de una pequeña élite, mientras que una gran parte de la población vive en condiciones de pobreza. La distribución de la riqueza se refiere a cómo se reparte la propiedad de los recursos y activos, como tierras, bienes y patrimonio, mientras que la distribución del ingreso está relacionada con la manera en que se distribuyen los ingresos generados por el trabajo, el capital y el sector productivo.

México enfrenta niveles de pobreza alarmantes: cerca del 40% de la población vive en situación de pobreza, y de estos, aproximadamente 20% se encuentran en pobreza extrema. Estas cifras reflejan la dificultad de una gran parte de la población para acceder a necesidades básicas como alimentación, vivienda y servicios de salud. A nivel de desarrollo humano, México se encuentra en el puesto 74 en el Índice de Desarrollo Humano (IDH) global, lo que indica un desarrollo moderado, con avances en áreas como la esperanza de vida, pero persistentes desigualdades en educación y calidad de vida.

El Índice de Gini en México, que mide la desigualdad en la distribución del ingreso, es uno de los más altos del mundo, con un valor cercano a 0.48 (siendo 0 la igualdad total y 1 la desigualdad extrema). Esto refleja una gran disparidad en los ingresos entre los distintos segmentos de la población. La brecha en el poder adquisitivo entre los diferentes deciles de la población es considerable; mientras que el primer decil (el 10% más pobre) tiene ingresos extremadamente bajos, el décimo decil (el 10% más rico) concentra una proporción desmesurada de la riqueza nacional.

Para mitigar esta desigualdad, el gasto público en México incluye programas de transferencias monetarias, becas, y subsidios a los más pobres, a través de iniciativas como Prospera (ahora Sembrando Vida) y el programa de Becas Benito Juárez. Sin embargo, el gasto en educación, salud e infraestructura sigue siendo insuficiente para cerrar las brechas de desigualdad, y la informalidad laboral limita el acceso de una gran parte de la población a servicios sociales y prestaciones básicas.

La distribución del ingreso y de la riqueza se usan de manera indistinta, sin embargo, no son lo mismo. El ingreso es un flujo de dinero que se recibe en muchos casos mensualmente, como por ejemplo un sueldo, o una vez por año en el caso de la venta de una cosecha. La riqueza se puede definir como la suma de activos (todos los bienes o patrimonio que una persona posee) menos los pasivos (todo lo que

una persona debe). Es decir, los activos pueden tener la forma de bienes físicos, como un campo, un comercio, una fábrica o un camión, o de activos financieros, como acciones, bonos del gobierno, depósitos en bancos, etc.

Economía

Distribución de sectores productivos y PIB por regiones del país

La economía mexicana es altamente diversa y se caracteriza por una fuerte concentración en ciertas regiones, mientras que otras enfrentan desafíos significativos en términos de desarrollo económico. El Producto Interno Bruto (PIB) de México se distribuye de manera desigual entre las diferentes regiones, reflejando las disparidades en desarrollo industrial, infraestructura y recursos naturales.

El noroeste del país, que incluye estados como Sonora y Baja California, es clave para la industria maquiladora y las exportaciones a Estados Unidos. La agricultura (especialmente el cultivo de hortalizas y frutas) también es importante, y la cercanía con la frontera ha facilitado el comercio internacional. El PIB en esta región es relativamente alto debido a la manufactura y el comercio.

El noreste incluye estados como Nuevo León y Coahuila, que se destacan por su industria automotriz, metalmecánica y energética. Monterrey, en Nuevo León, es el principal motor económico del noreste, concentrando gran parte del sector industrial y comercial. Esta región tiene un PIB elevado, principalmente por el sector manufacturero y la minería.

En el occidente, representado por estados como Jalisco y Nayarit existe un sector industrial diversificado, que va desde la electrónica y la tecnología hasta la agricultura (especialmente agave y café). Jalisco, con Guadalajara como su centro económico, es también un punto importante para la tecnología y los servicios.

Para el oriente, un estado clave en términos de comercio exterior gracias a su puerto marítimo es Veracruz. Aquí el sector petrolero es esencial, aunque la región también cuenta con un sector agrícola significativo. El PIB aquí varía, con una fuerte dependencia de la exportación de petróleo y productos agrícolas.

Con estados como San Luis Potosí y Zacatecas, la región centro norte es un importante productor de minerales y metales. También destaca por la agricultura y un sector automotriz creciente, impulsado por la cercanía con el norte del país. El PIB aquí depende en gran medida de la minería y la industria automotriz.

En el centro sur, estados como Querétaro, Guanajuato y Aguascalientes tienen una economía industrial robusta, con fuerte presencia de la manufactura automotriz y electrónica. Estas regiones han experimentado un crecimiento económico sostenido gracias a la inversión extranjera. El ejemplo icónico es la Ciudad de México (CDMX) capital y el principal motor económico del país, aunque geográficamente forma parte de esta región, la CDMX tiene características económicas y sociales que la distinguen de otros estados de la misma área, debido a su importancia como centro político, cultural y comercial. Contribuye de manera significativa al PIB nacional, ya que concentra una gran parte de los sectores de servicios, comercio, finanzas y tecnología. Además, alberga a una gran cantidad de empresas multinacionales y tiene una infraestructura de transporte y comunicación muy desarrollada.

Por el contrario, en el suroeste del país, que incluye a Guerrero y a Oaxaca, se enfrenta altos índices de pobreza y un PIB bajo en comparación con otras regiones. La agricultura sigue siendo crucial, pero la infraestructura limitada y la informalidad laboral afectan su crecimiento. El turismo también es una fuente clave de ingresos en algunos estados como Oaxaca.

Otro caso es el del sureste, con estados como Chiapas, Tabasco y Yucatán que tienen una economía

agrícola predominante, aunque la industria petrolera ha sido importante, especialmente en Tabasco y Campeche. El PIB es bajo en comparación con el resto del país, y la pobreza es más pronunciada en esta región, aunque el turismo en lugares como la Riviera Maya contribuye a la economía.

Economía nacional en el marco del mercado internacional

México se posiciona como un actor clave en el mercado internacional, beneficiándose de su ubicación geográfica estratégica y su participación en acuerdos comerciales que le permiten acceder a mercados globales y diversificar sus exportaciones. Sin embargo, enfrenta retos como la desigualdad interna, la dependencia del mercado estadounidense y las tensiones comerciales con otras potencias económicas. Su estrategia de integración global continúa siendo un factor fundamental para su crecimiento económico y desarrollo sostenido. A continuación, se describen algunas de las características más relevantes de su participación en la economía global:

México es la 15ª economía más grande del mundo por PIB nominal, con un PIB cercano a los 1.3 billones de dólares (según datos más recientes). En América Latina se encuentra en la segunda posición respecto de este índice, solo superado por Brasil. Su PIB per cápita (es decir, el promedio de ingreso de la población) es moderado en comparación con países desarrollados, pero ha mostrado crecimiento en las últimas décadas, aun así, su PIB per cápita está por debajo de países como Chile, Uruguay y Costa Rica, reflejando la desigualdad en la distribución de la riqueza y los desafíos socioeconómicos internos. A nivel global, México representa aproximadamente el 1.5% del PIB mundial.

El Índice de Bienestar Económico Sustentable (IBES) de México ha mostrado una relación estrecha con el crecimiento económico y las políticas de desarrollo sustentable. Aunque el país ha tenido avances en términos de desarrollo humano, la desigualdad económica sigue siendo un desafío significativo. La informalidad laboral, las brechas en el acceso a la educación y la pobreza afectan el bienestar general, a pesar de que el país ha mostrado resiliencia en varios indicadores macroeconómicos.

En términos de acuerdos regionales de comercio, nuestro país ha firmado tratados clave que le permiten ser parte de varios bloques económicos regionales. Uno de los más destacados es el Tratado entre México, Estados Unidos y Canadá. El llamado T-MEC reemplazó al NAFTA (TLC) en 2020 y sigue permitiendo un acceso preferencial al mercado de los Estados Unidos y Canadá, sus principales socios comerciales. Esto ha impulsado las exportaciones mexicanas, especialmente en sectores como automotriz, electrónica y productos agrícolas.

México también es parte del Acuerdo de Asociación Transpacífico (CPTPP), un bloque comercial con países de Asia-Pacífico, que fomenta el libre comercio y la cooperación económica con naciones como Japón, Australia y Malasia. Además, el país mantiene acuerdos comerciales con la Unión Europea, lo que facilita el intercambio de productos y servicios y promueve la inversión extranjera directa.

En cuanto a exportaciones, el país se sitúa como uno de los principales exportadores mundiales de productos manufacturados, especialmente automóviles, electrónica, petróleo y agroindustria. Las exportaciones mexicanas en 2023 se estimaron en más de 500 mil millones de dólares, con Estados Unidos como su principal socio, representando alrededor del 80% de las exportaciones mexicanas. En cuanto a las importaciones, México depende de insumos como maquinaria, vehículos, productos electrónicos y combustibles, principalmente provenientes de Estados Unidos y China.

Nuestro país participa activamente en cumbres internacionales que promueven la cooperación económica y el comercio global, comprometido con la globalización comercial, mantiene un rol activo en las discusiones y acuerdos dentro de la Organización Mundial del Comercio (OMC) así como

en las cumbres del G20, un foro internacional clave para la coordinación de políticas económicas globales entre las principales economías del mundo. En términos regionales, el país es miembro de la Alianza del Pacífico, un bloque económico que busca estrechar la relación entre México, Chile, Perú y Colombia no solo en el intercambio comercial sino también en áreas como educación, innovación y desarrollo de pequeñas y medianas empresas, esto puede ser un contrapeso al Mercosur que agrupa a países de América del Sur y del cual no forma parte nuestro país.

Bibliografía sugerida

Ciencias Sociales

Aranda, P., Castro, M., García, G., Zúñiga, M. (2014) *Introducción a las Ciencias Sociales*. Dirección Académica del Colegio de Bachilleres del Estado de Sonora.

Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión (2024) *Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos*. Disponible en <https://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/ref/cpeum.htm>

Colegio de Bachilleres (2000) *Introducción a las Ciencias Sociales I*. Compendio Fascicular. Disponible en <https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/index.php/compendios-fasciculares/>

Montoya, J. M. (2010) *Introducción a las Ciencias Sociales y Humanidades*. Universidad Autónoma de Sinaloa.

Historia de México

Cosío, D. (Ed.). (2010). *Nueva historia general de México*. El Colegio de México.

Escalante, P., García, B., Jauregui, L., Vázquez, J., Speckman, E., Garcíadiego, J. y Aboites, L. (2022) *Nueva historia mínima de México*. El Colegio de México. Disponible para descarga gratuita en: <https://repositorio.colmex.mx/concern/books/3r074z14d?locale=es>

Medina, L. (2014). *Hacia el nuevo Estado: México, 1920-2000*. Fondo de Cultura Económica.

Estructura Socioeconómica de México

Castillo, V., et al. (2014). *Estructura Socioeconómica de México II*. Colegio de Bachilleres. Consulta libre en: <https://repositorio.cbachilleres.edu.mx/index.php/compendios-fasciculares/>

CONAPO. (2024) *Información sociodemográfica - Salud Sexual y Reproductiva y Grupos en condición de vulnerabilidad*. Catálogo Digital. Consulta libre en: <https://www.gob.mx/conapo/documentos/catalogo-digital-informacion-sociodemografica-salud-sexual-y-reproductiva-y-grupos-en-condicion-de-vulnerabilidad?idiom=es>

CONEVAL. (2021) *Treinta años de evolución de las carencias sociales a partir de instrumentos censales y la Encuesta Intercensal, 1990-2020*. Consulta libre en: www.coneval.org.mx/Medicion/Documents/Carencias_sociales_censales_90_20/Presentacion_evolucion_carencias_sociales_censales_1990_2020.pdf

INEGI (2020) *Censos de Población y Vivienda*. <https://www.inegi.org.mx/programas/ccpv/>
 Estadísticas de salud y mortalidad: <https://www.inegi.org.mx/temas/salud/>
 Banco de Información Económica <https://www.inegi.org.mx/app/indicadores/?tm=0>
 Encuesta Nacional de Ocupación y Empleo (ENOE): <https://www.inegi.org.mx/programas/enoe/15ymas/>

Méndez, J. (2012). *Problemas Económicos de México*. McGraw Hill.

México, ¿Cómo Vamos? (2023) *Plataforma con indicadores económicos y sociales actualizados por estado*.

<https://mexicocomovamos.mx/>

Paredes, C. y Rivera, P. (2012). *Estructura socioeconómica de México*. Gafra.

Sistema de Información de la Secretaría de Salud (2023) *Datos en salud*. Consulta libre en:

<http://sinaiscap.salud.gob.mx:8080/DGIS/>

10. Introducción al Trabajo

Esta asignatura se encuentra organizada para que los sustentantes identifiquen los elementos teórico-metodológicos que les permitan ser capaces de reconocer un plan de vida ocupacional, así como, una estrategia de búsqueda de empleo e identificar el contexto legal de las relaciones laborales.

10.1 Plan de vida ocupacional para insertarse en el sector productivo

El diseño de un plan de vida ocupacional orientado a la inserción en el sector productivo es esencial para establecer una trayectoria profesional clara y enfocada. Este plan debe considerar las fortalezas, intereses y habilidades de cada individuo, alineándolos con las demandas del mercado laboral. De esta forma, se fomenta un aumento en las oportunidades de empleo y se facilita la adaptación a los cambios del sector productivo, permitiendo un crecimiento profesional y una contribución efectiva al desarrollo económico.

10.1.1 Características personales

Las características personales son los rasgos que nos definen y afectan cómo pensamos, actuamos y nos relacionamos. Estas incluyen aspectos físicos, emocionales, sociales e intelectuales, así como nuestras fortalezas, necesidades, habilidades, actitudes y áreas de oportunidad. Reconocer nuestras características es esencial para enfrentar retos, tomar decisiones y mejorar nuestras relaciones, lo que contribuye a nuestro crecimiento personal y a destacar nuestras cualidades.

10.1.2 Sectores económicos

Los sectores económicos abarcan diversas áreas productivas, como la agricultura, la industria, los servicios, entre otros, y cada uno presenta características específicas. Conocerlos permite a las personas alinear sus metas y habilidades con las necesidades de un sector, identificar áreas de oportunidad en el mercado laboral y tomar decisiones informadas sobre su formación y futuro profesional. Además, este conocimiento facilita prever tendencias de crecimiento, identificar las ocupaciones con mayor demanda de empleo y anticipar posibles cambios en la economía, lo cual es clave para tomar decisiones estratégicas y adaptarse a un entorno laboral en constante evolución.

10.1.3 Plan de vida

Un plan de vida es una herramienta que permite identificar tanto las características personales como profesionales de una persona, organizar metas a corto, mediano y largo plazo, así como, determinar los recursos necesarios para alcanzarlas. Al crear el plan de vida, podemos identificar lo que nos gusta o disgusta. Es importante establecer metas de manera realista y honesta, comenzando con las de corto y mediano plazo. A medida que vayamos alcanzando estas metas, podremos incorporar objetivos a largo plazo. El plan de vida es flexible, ya que existen factores externos que no podemos controlar, pero lo que sí está a nuestro alcance es cómo reaccionamos y nos adaptamos.

10.2 Uso de herramientas para buscar empleo e insertarse en el sector productivo

El uso de herramientas no solo optimiza el proceso de búsqueda de empleo, sino que también facilita la inserción en el sector productivo al brindar acceso a una amplia variedad de oportunidades laborales. Además, permite mejorar las habilidades de autopromoción y fortalecer la empleabilidad en un entorno altamente competitivo.

10.2.1 Fuentes y medios de reclutamiento

La capacidad de distinguir entre fuentes y medios de reclutamiento constituye una competencia clave para diseñar estrategias de búsqueda de empleo, especialmente para quienes se integran por primera vez al ámbito laboral. Asimismo, se destaca la importancia de analizar las ventajas y desventajas de estas herramientas, ya sea desde la perspectiva del área de reclutamiento o en la selección adecuada de las herramientas que contribuyan al cumplimiento de los objetivos organizacionales.

10.2.2 Documentos para la búsqueda de empleo

Distinguir el uso, la estructura y el llenado de documentos como el curriculum vitae, la carta de presentación, la solicitud de empleo, entre otros, es fundamental para construir un expediente claro y preciso que facilite su interpretación por parte de las áreas contratantes. La puntualidad en la descripción de talentos, objetivos, metas alcanzadas, formación profesional, experiencia laboral y demás información relevante de los candidatos contribuye a que los empleadores analicen los diferentes perfiles de manera ágil, clara y concisa.

10.2.3 Factores de selección

Los departamentos de recursos humanos emplean diversas formas de entrevistas y pruebas para obtener información clara y consistente sobre los objetivos y características de los candidatos. La entrevista de trabajo constituye una etapa clave del proceso de selección, ya que permite evaluar la idoneidad del aspirante para el puesto. Entre los tipos de entrevista se incluyen las cerradas, abiertas, por competencias, de estrés, estructuradas, grupales y de juego de roles.

Por otro lado, las pruebas psicométricas complementan este análisis, ofreciendo una visión más amplia de los rasgos cognitivos, conocimientos, habilidades y personalidad de los candidatos. Estas herramientas permiten predecir el desempeño y comportamiento laboral, contribuyendo a identificar al aspirante que mejor se adapte a la cultura organizacional.

10.2.4 Número de Seguridad Social, Administradora de Fondo para el Retiro, Servicio de Administración Tributaria

Todo empleado debe realizar ciertos procedimientos según la naturaleza de su labor, como el trámite del RFC, NSS y AFORE, ya sea de manera presencial o remota. Es fundamental que el empleado comprenda la naturaleza de cada trámite, distinguiendo sus características, requisitos y las dependencias responsables de su gestión.

10.3 Normatividad en una relación de trabajo

La normatividad en una relación laboral es fundamental para garantizar que empleadores y empleados respeten sus derechos y obligaciones dentro del marco legal. El cumplimiento de las disposiciones establecidas en la Ley Federal del Trabajo contribuye a prevenir conflictos y abusos, promoviendo una convivencia armónica en el lugar de trabajo y fomentando el respeto mutuo entre las partes involucradas.

10.3.1 Modalidades de la relación de trabajo

El contrato de trabajo es un acuerdo celebrado entre el trabajador y el empleador, mediante el cual el trabajador se compromete a prestar sus servicios de manera voluntaria a cambio de una retribución previamente convenida. Existen diferentes tipos de contratos laborales, entre ellos el contrato individual, el contrato colectivo y el contrato ley.

Así mismo, encontramos las siguientes modalidades en que se pueden clasificar las relaciones laborales:

- Por tiempo indeterminado
- Por tiempo determinado
- Por obra determinada
- Por temporada
- Por capacitación inicial
- Periodo de prueba

10.3.2 Jornadas de trabajo

La jornada de trabajo se define como el tiempo durante el cual una persona trabajadora está a disposición del empleador para prestar sus servicios. La Ley Federal del Trabajo regula las jornadas laborales con el objetivo de garantizar condiciones dignas y equitativas para los trabajadores. Esta ley establece tres tipos principales de jornada: diurna, nocturna y mixta.

Asimismo, es importante asegurar el reconocimiento de los días de descanso, tanto los obligatorios como los incluidos dentro de la jornada laboral. Otro aspecto relacionado con la jornada laboral es la forma de remuneración, la cual debe garantizar una compensación justa por el tiempo y esfuerzo dedicados.

10.3.3 Prestaciones

Entre las prestaciones mínimas otorgadas a un trabajador se encuentran beneficios como las vacaciones, el aguinaldo y el reparto de utilidades. Estas prestaciones deben cumplir con requisitos específicos, incluyendo porcentajes, fechas y plazos de pago establecidos por la ley.

10.3.4 Derechos, obligaciones y prohibiciones adquiridos en una relación de trabajo

Los derechos, obligaciones y prohibiciones que regulan a patrones, trabajadores y madres trabajadoras en una empresa u organización establecen las responsabilidades y prerrogativas de las partes involucradas en la relación laboral. Su objetivo es garantizar el conocimiento y cumplimiento de las normas esenciales para mantener un ambiente de respeto en los centros de trabajo, promoviendo una convivencia armoniosa y el logro de los objetivos de la relación laboral.

10.3.5 Suspensión, rescisión y terminación de una relación laboral

En este tema se identificarán y analizarán los actos que permiten dar por terminado un contrato laboral debido al incumplimiento imputable a alguna de las partes. También se estudiarán las situaciones en las que un contrato puede concluir por razones de oportunidad o conveniencia, determinadas por decisión unilateral o acuerdo mutuo. Además, se comprenderán las circunstancias en las que las obligaciones contractuales pueden extinguirse sin generar responsabilidad legal para ninguna de las partes, siempre que se cumplan los requisitos legales correspondientes. Estos conceptos se abordarán desde las perspectivas de rescisión, terminación y suspensión.

Bibliografía sugerida

Online <https://www.psicologia-online.com/cualidades-de-una-personaque-son-cuales-son-y-ejemplos-4893.html>

Arias, F. (1989). Administración de Recursos Humanos. Trillas.

Carvazos, B. (1998). Nueva Ley Federal del Trabajo, tematizada y actualizada. Trillas.

Barranco, M. A. (2013). La entrevista de selección de personal. CEP.

Barrón Rosas, N. A. (2019). Introducción al Trabajo. SADAMA.

Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. (2024). Ley Federal del Trabajo. [archivo PDF]. <https://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/LFT.pdf>

Casares, S. (2006) Planeación de vida y carrera. Limusa.

Castañeda, L. (2001). Un plan de vida para jóvenes. ¿Qué harás con el resto de tu vida? Poder.

Castillo, I. (24 de noviembre de 2021). Sectores económicos de México. Lifeder. <https://www.lifeder.com/sectores-economicos-mexico/>

Fernández, M. (15 diciembre de 2023). Pruebas psicométricas: 9 ejemplos clave en reclutamiento y selección. factorial. <https://factorial.mx/blog/pruebas-psicometricas/>

Frederick, D. (noviembre de 2017). Sectores económicos. Enciclopedia Iberoamericana. Recuperado el 05 de diciembre de 2024 de <https://enciclopediaiberoamericana.com/sectores-economicos/>

Gordillo, A. (31 mayo de 2023). ¿Qué empresas no están obligadas al pago de reparto de utilidades o PTU? El Contribuyente. <https://www.elcontribuyente.mx/2023/05/que-empresas-no-estan-obligadas-al-pago-de-reparto-de-utilidades-o-ptu/>

<http://www.imss.gob.mx/imssdigital#menu1>

<https://www.sat.gob.mx/personas/tramites-del-rfc>

<https://www.gob.mx/profedet>

<https://www.gob.mx/stps>

<https://www.gob.mx/consar/articulos/como-me-registro-en-una-afore>

<https://www.gob.mx/conampros/acciones-y-programas/derechos-laborales-de-los-trabajadores>

IDC. (18 abril de 2022). Generalidades de PTU. <https://idconline.mx/laboral/2022/04/18/generalidades-de-ptu>

indeed Orientación profesional. (21 de agosto de 2024). Qué es una carta de presentación y cómo hacerla. Recuperado el 5 de diciembre de 2024 de <https://mx.indeed.com/orientacion-profesional/cv-cartas-presentacion/que-es-una-carta-de-presentacion>

Maslow, A. (1991). Motivación y Personalidad. Díaz de Santos.

Pardo, & B.I. (2001). Jóvenes construyendo su proyecto de vida. Neisa.

Ramos, A. (26 marzo de 2015). Modalidades de las relaciones de trabajo. Actualidad y Estudio. <https://caridadenlaverdad.wordpress.com/2015/03/26/modalidades-de-las-relaciones-de-trabajo/>

Reyes, P. A. (1994). Administración de personal: sueldos y salarios. Segunda parte. Limusa

Torres, A. (3 de octubre de 2024). Cómo hacer un plan de vida (en 8 pasos). Psicología y Mente. Recuperado el 05 de diciembre de 2024 de <https://psicologiaymente.com/vida/plan-de-vida>

Voccia, L. (11 de mayo de 2022). Profesiones y oficios en México: cuáles cursar en 2022. cursos ycarreras.com. <https://www.cursosycarreras.com.mx/orientacion/profesiones/>

11. Recursos Humanos

11.1. Desarrollo de la administración

11.1.1. El origen de la administración y evolución de las diferentes teorías

En los inicios de la aparición del hombre en la tierra, se tuvo la necesidad de trabajar en grupo para el desarrollo humano. Dado que la administración existió no como una disciplina, sino como un medio para coordinar los esfuerzos y lograr objetivos comunes. Estos logros que el ser humano desarrolló en el ámbito tecnológico, social y económico, se relacionan con la administración. Así surgieron las escuelas y teorías que contribuyen a la aplicación de la administración.

11.1.2. La importancia de la administración en las empresas y en la vida cotidiana

Con el paso del tiempo, han surgido teorías administrativas contemporáneas que retoman aspectos de las teorías y escuelas antecesoras. Cabe señalar que la importancia de las estrategias administrativas radica en que también es aplicable en aspectos cotidianos, por ejemplo, a la hora de una planificación para algún evento escolar.

11.2. El proceso administrativo

11.2.1. El proceso administrativo

Se entiende como proceso administrativo como la secuencia de etapas en las que se lleva a cabo la práctica administrativa, que comienza desde la planeación de una actividad hasta con la verificación de los resultados.

11.2.1. Etapas del proceso administrativo

El proceso administrativo se divide en cuatro etapas: planeación, organización, dirección y control.

11.3. La empresa y el recurso humano

11.3.1. La empresa, sus áreas funcionales y recursos

La empresa nació para atender las necesidades de la sociedad al crear factores a cambio de una retribución que compensara el riesgo, los esfuerzos y las inversiones de los empresarios. Las áreas funcionales son aquellas que integran funciones específicas y responsabilidades y que integran a una empresa. Para que una empresa puede operar, debe contar con recursos que la sostengan, entre ellos están los recursos humanos que son las personas que trabajan en las empresas y son considerados como el recurso más importante dentro de la empresa. Entre el personal que integra a una empresa se encuentra personal operativo, técnicos, administradores, vendedores, supervisores, ejecutivos y directivos.

11.3.2. Aplicación del proceso administrativo en el área de recursos humanos

Al ejemplificar el uso del proceso administrativo permite reconocer las diferencias entre cada una de las etapas por las que está integrado.

11.4. Manuales administrativos

11.4.1. Finalidad de implementar los distintos manuales administrativos en las empresas

Los manuales administrativos son instrumentos que persiguen alcanzar la máxima eficacia y eficiencia en la ejecución del trabajo asignado, para alcanzar los objetivos de cualquier empresa, así como de las unidades administrativas que lo constituyen.

11.5. Manual de procedimientos

11.5.1. Importancia de los manuales que describan los procedimientos de la empresa

El manual de procedimientos es un componente del sistema de control interno, con el fin de obtener información detallada, ordenada y sistemática, en el que se integran las instrucciones, responsabilidades e información sobre políticas, funciones, sistemas y procedimientos de las distintas actividades que se realizan en una organización.

11.5.2. Herramientas gráficas

Para la organización de las funciones a describir en un manual de procedimientos, hay herramientas gráficas de apoyo, como un diagrama de flujo o una gráfica de Gantt, cada una de ellas tiene características específicas que podrán visualizar y resumir un objetivo.

11.6. Reclutamiento interno y externo

11.6.1. Características de un puesto para el reclutamiento de personal

El reclutamiento es un conjunto de actividades cuya finalidad es atraer candidatos debidamente calificados y que reúnan los requisitos para ocupar un puesto dentro de la organización.

11.6.2. Fuentes y medios para la captación de personal

Con la finalidad de encontrar candidatos, se da difusión por fuentes y medios internos o externos de las vacantes disponibles.

11.7. Selección de personal

11.7.1. Selección de personal

La selección de personal es el conjunto de etapas y técnicas mediante las cuales se realiza una evaluación de las características y aptitudes de los candidatos para determinar quién cumple con los requisitos y elegir al personal idóneo.

11.8. Contratación e inducción de personal

11.8.1. Contratación de personal

Una vez que se han aprobado todas las etapas anteriores se procede a efectuar la contratación del personal que puede ser: por nómina, eventual, de planta o por honorarios. En el momento de la contratación es muy importante dar a conocer la duración de la jornada laboral, así como el periodo de duración del empleo.

11.8.2. Inducción del empleado de nuevo ingreso

Mediante la inducción se dan a conocer las condiciones generales del trabajo, reglas generales en la empresa, espacios asignados para la ingesta de alimentos o salidas de emergencia, esto con la finalidad de integrar al nuevo personal al ambiente laboral.

11.9. Marco legal de la nómina

11.9.1. Leyes vigentes que regulan el pago de la nómina.

De acuerdo con la Ley Federal del Trabajo, Ley del Impuesto sobre la Renta, Ley del Seguro Social, Ley del INFONAVIT y artículo 123 de la Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos, la nómina es el registro financiero periódico de los salarios de empleados, por sus servicios prestados a una empresa. Es importante conocer las incidencias que se pueden presentar al personal, porque son aquellos movimientos que pueden afectar el pago de las remuneraciones, como altas, bajas, cambio de adscripción, promociones, licencias o faltas.

11.10. Cálculo de las percepciones, deducciones e integración de la seguridad social

11.10.1. Cálculo de las percepciones de la nómina

Los recibos de nómina contienen percepciones, que se definen como la cantidad de dinero que recibe un trabajador por realizar las tareas y funciones que demanda una empresa durante un periodo comprendido, puede ser semanal, quincenal o mensual. Hay percepciones ordinarias (salario, aguinaldo o prima vacacional) y extraordinarias (prima dominical, tiempo extraordinario y días de descanso obligatorio).

11.10.2. Cálculo de las deducciones de la nómina

Por otro lado, también se encuentran las deducciones, que son aquellos montos que se descuentan al salario base del trabajador. El artículo 101 de la Ley Federal del Trabajo menciona que los trabajadores tienen derecho a ser informados sobre sus descuentos de forma detallada. Entre las deducciones están la retención de ISR, descuentos como faltas, licencias, permisos, caja de ahorro, cuota sindical o préstamos.

11.10.3. Incorporación a la seguridad social o INFONAVIT

Las cuotas obrero patronal son la suma total del monto que se aporta al Instituto Mexicano del Seguro Social, están a cargo del patrón y el trabajador. Para realizar dicho cálculo es importante saber cuál es el salario base de cotización (artículo 27 de la Ley de Seguro Social) y su factor de integración, así como su respectivo calculo. Estos cálculos nos permiten saber cuánto se deberá pagar al IMSS y al trabajador, contemplando las percepciones y deducciones.

11.11. Salud, higiene y seguridad laboral

11.11.1. La salud laboral de los trabajadores

De acuerdo con las Normas Oficiales Mexicanas de Seguridad y Salud en el Trabajo, dentro de un centro laboral, los trabajadores están expuestos a diferentes riesgos, enfermedades o accidentes. Por lo que aprender a identificar los riesgos es de ayuda para implementar las medidas preventivas pertinentes y de esta manera, salvaguardar el bienestar y la salud de los trabajadores.

11.11.2. Medidas de seguridad e higiene en la organización

Para promover la mejora de la seguridad y salud de los trabajadores, es importante reconocer la importancia e identificar los siguientes conceptos: salud laboral, prevención, higiene laboral, seguridad laboral, accidente y enfermedad.

11.11.3. Consideraciones jurídicas

Toda empresa debe cumplir con condiciones mínimas para garantizar la seguridad de sus trabajadores, por lo que la clasificación general de las Normas Oficiales Mexicanas de Seguridad y Salud en el Trabajo, se enfocan en los factores de riesgo que podrían poner en riesgo la integridad de los empleados.

11.12. Factores de riesgo, condiciones peligrosas y prácticas de riesgo

11.12.1. Importancia de identificar los factores de riesgo y las condiciones peligrosas

Para prevenir los accidentes de trabajo o las enfermedades en el personal de una empresa es importante identificar las características y clasificación de los factores de riesgo que a continuación se enlistan: físicos, químicos, biológicos, carga de trabajo, psicosociales y condiciones Ergonómicas.

11.12.2. Importancia de identificar las prácticas de riesgo

Las prácticas de riesgo son causadas directamente por los trabajadores, por lo que, es importante que los trabajadores cumplan con los lineamientos y las instrucciones indicadas, para así evitar ponerse en riesgo o arriesgar a otras personas.

11.13. Medidas preventivas

11.13.1. Prevención de riesgos

Los programas de prevención de riesgos tienen como finalidad evitar factores de riesgo, condiciones peligrosas y prácticas de riesgos.

11.13.2. Medidas preventivas

Una vez que se reconocen los factores de riesgo que pueden afectar la salud de los trabajadores, es necesario analizar estrategias que reflejen las medidas preventivas que ayuden a minimizar su impacto.

Bibliografía sugerida

- Álvarez, M. G. (2008). Manual para elaborar manuales de políticas y procedimientos. Panorama Editorial.
- Amo, A. (2022). Reclutamiento y selección de personal. Editorial Elearning.
- Ayensa, Á. M. (2018). Gestión de Recursos Humanos. Paraninfo.
- Brume, M. J. (2019). Estructura organizacional. Institución Universitaria Itsa.
- Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. (2021). Anexo 3 de la Resolución Miscelánea Fiscal para 2021. Diario Oficial de la Federación.
- Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. (2023). Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos. *Diario Oficial de la Federación*.
- Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. (2021). Ley Federal del Trabajo. Diario Oficial de la Federación.
- Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. (2024). Ley del Instituto del Fondo de la Vivienda para los Trabajadores. Diario Oficial de la Federación.
- Cámara de Diputados del H. Congreso de la Unión. (2021). Ley del Seguro Social. Diario Oficial de la Federación.
- Carrera, E. R., Rivadeneyra, C. I., Navarrete, E. D. y Paredes, A. M. (2019). Seguridad y salud ocupacional. Ediciones Grupo Compás.
- Chiavenato, I. (2011). Administración de recursos humanos. El capital humano de las organizaciones. McGraw-Hill.
- Chiavenato, I. (2009). Introducción a la teoría general de la administración. McGraw-Hill.
- Cortés, J. M. (2012). Seguridad e higiene del trabajo. Técnicas de prevención de riesgos laborales. Tébar Flores, S.L.
- Cuéllar, A. (2018). Seguridad Integral de la empresa. Trillas.
- Dessler, G. y Varela, R. A. (2011). Administración de recursos humanos. Enfoque latinoamericano. Pearson Educación.
- Münch, L. (2012). Administración de capital humano. Trillas.
- Münch, L. y García, J. (2020). Fundamentos de administración. Trillas.
- Münch, L. (2017). La gestión del capital humano. Trillas.

12. Contabilidad

12.1 Antecedente histórico

La contabilidad es una de las primeras disciplinas económicas desarrolladas por el ser humano, vinculada desde tiempos remotos a la noción de economía doméstica. Surgió como una técnica destinada a llevar un registro claro y preciso de actividades, recursos, dinero y otros aspectos esenciales para la organización económica.

Los registros más antiguos de operaciones contables se han encontrado en Babilonia, durante el Antiguo Imperio de Hammurabi (2123-2081 a.C.), así como en diversas dinastías de China, en Grecia y en Italia. En esta última, hacia el siglo XIII, destacan las cuentas llevadas por un comerciante florentino anónimo alrededor del año 1211, con características de la llamada Escuela Florentina. También sobresale el método empleado por la Comuna Genovesa, que utilizaba términos como “debe” y “haber”, asientos cruzados y la cuenta de pérdidas y ganancias, marcando un avance significativo en la contabilidad.

En cuanto a la partida doble, aunque ya se utilizaba antes de este periodo, fue formalizada gracias al fraile franciscano **Fray Luca Pacioli**, originario de San Sepolcro, Toscana. En 1494, Pacioli publicó su obra *Summa de arithmetica, geometría, proportioni et proportionalita*, donde describió este método contable. Es importante señalar que Pacioli no inventó la partida doble, sino que documentó y sistematizó el método empleado por los mercaderes de Venecia en su época, preservándolo para futuras generaciones.

Concepto

De acuerdo a la definición del Instituto Mexicano de Contadores Públicos la contabilidad es una **técnica** que se utiliza para **producir sistemática y estructuradamente**, información cuantitativa expresada en unidades monetarias de las transacciones que realiza una entidad económica y de ciertos eventos económicos identificables y cuantificables que la afectan, con el objeto de facilitar a los diversos interesados el tomar decisiones en relación con dicha entidad económica.

Es **sistemática** porque se procesa poco a poco, desde el momento en que se realiza una operación se debe documentar hasta obtener y proporcionar una información, para fomentar la toma de decisiones.

Es **estructurada** porque sus partes se captan, registran o contabilizan en libros o documentos contables: libro de diario, libro mayor y libros auxiliares, y se analizan para obtener y proporcionar información financiera mediante estados financieros (estado de situación financiera o balance general y estado de resultados).

Conforme a la **Norma de Información Financiera (NIF)¹ A1**, la contabilidad es una técnica que permite registrar las operaciones que afectan económicamente a una entidad y generar información financiera de manera sistemática y estructurada.

¹ Las **NIF** (Normas de Información Financiera) son un conjunto de reglas que establecen cómo presentar los estados financieros de las empresas, con el objetivo de unificar un lenguaje contable entre los países que participan en el mercado global, de igual forma, así mismo, se encargan de garantizar que la información financiera que se proporciona a los usuarios sea confiable y fidedigna, para que pueda ser utilizada en la toma de decisiones. En México, las NIF son emitidas por el **Consejo Mexicano de Normas de Información Financiera (CINIF)**, y su aplicación es obligatoria para las entidades que deben presentar estados financieros bajo los estándares nacionales.

Es importante diferenciar el concepto de contabilidad del de Contaduría Pública. La Contaduría Pública es una disciplina social de carácter científico que fundamentada en una teoría específica y a través de un proceso, obtiene y comprueba información financiera sobre transacciones celebradas por entidades económicas. En ese sentido, la Contaduría Pública es un concepto que incluye el de la contabilidad.

Objetivos de la contabilidad

La contabilidad tiene como propósito principal proporcionar información financiera útil para la toma de decisiones económicas. Sus objetivos específicos incluyen:

1. **Registrar las operaciones financieras**
 - Llevar un registro detallado, ordenado y cronológico de las transacciones económicas de una entidad.
2. **Informar sobre la situación financiera**
 - Mostrar, mediante estados financieros, el patrimonio, los activos, los pasivos, los ingresos y los egresos de una organización en un periodo determinado.
3. **Facilitar la toma de decisiones**
 - Brindar información confiable y oportuna para que los dueños, inversionistas, acreedores y otros interesados puedan evaluar el desempeño y tomar decisiones estratégicas.
4. **Determinar la utilidad o pérdida**
 - Establecer si una entidad ha obtenido ganancias o incurrido en pérdidas en un periodo específico, a través de la relación entre ingresos y gastos.
5. **Cumplir con obligaciones legales y fiscales**
 - Proveer los datos necesarios para el cumplimiento de leyes fiscales, laborales y comerciales.
6. **Proteger y controlar los recursos de la entidad**
 - Facilitar el control interno al supervisar el uso y manejo adecuado de los bienes y recursos de la organización.
7. **Facilitar la planificación y previsión**
 - Ayudar en la elaboración de presupuestos, estimaciones y proyecciones que permitan planificar el futuro financiero de la entidad.

El cumplimiento de estos objetivos asegura que la contabilidad sea una herramienta esencial para la administración, el análisis y la supervisión de las actividades económicas en cualquier tipo de organización.

Tipos de contabilidad

La contabilidad se clasifica en diferentes tipos según el enfoque o área de aplicación. A continuación, se presentan los principales:

1. Contabilidad financiera
2. Contabilidad fiscal
3. Contabilidad administrativa
4. Contabilidad de costos

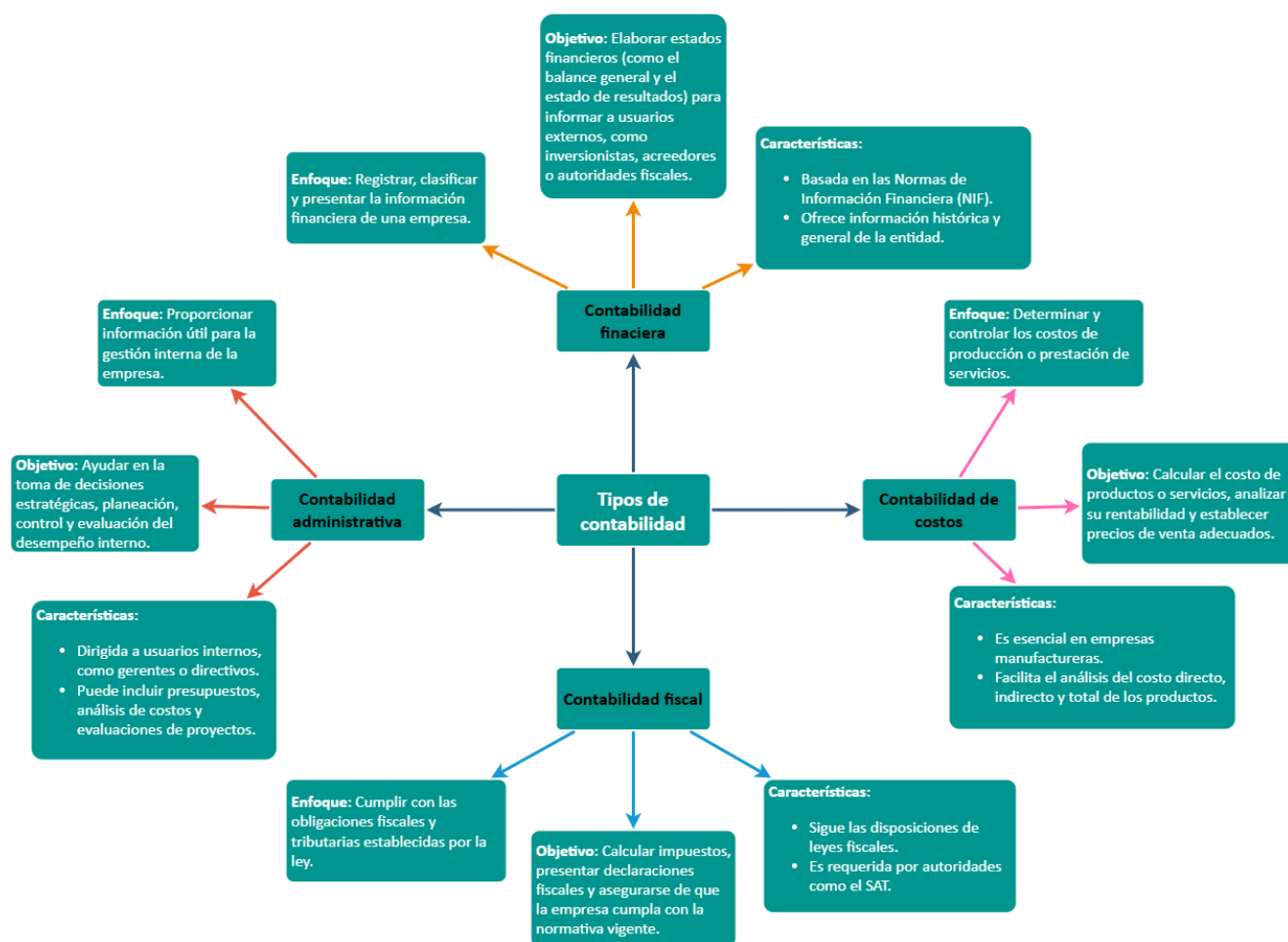


Gráfico 1. Tipos de contabilidad

12.2 Estados financieros principales

Son aquellos en donde se refleja la situación financiera de una entidad económica, mostrando diversas características como son: capacidad de pago, capacidad económica, el resultado de operaciones, etcétera.

Estos son:

1. Estado de situación financiera o balance general
2. Estado de resultados
3. Estado de variaciones en el capital contable
4. Estado de flujo de efectivo

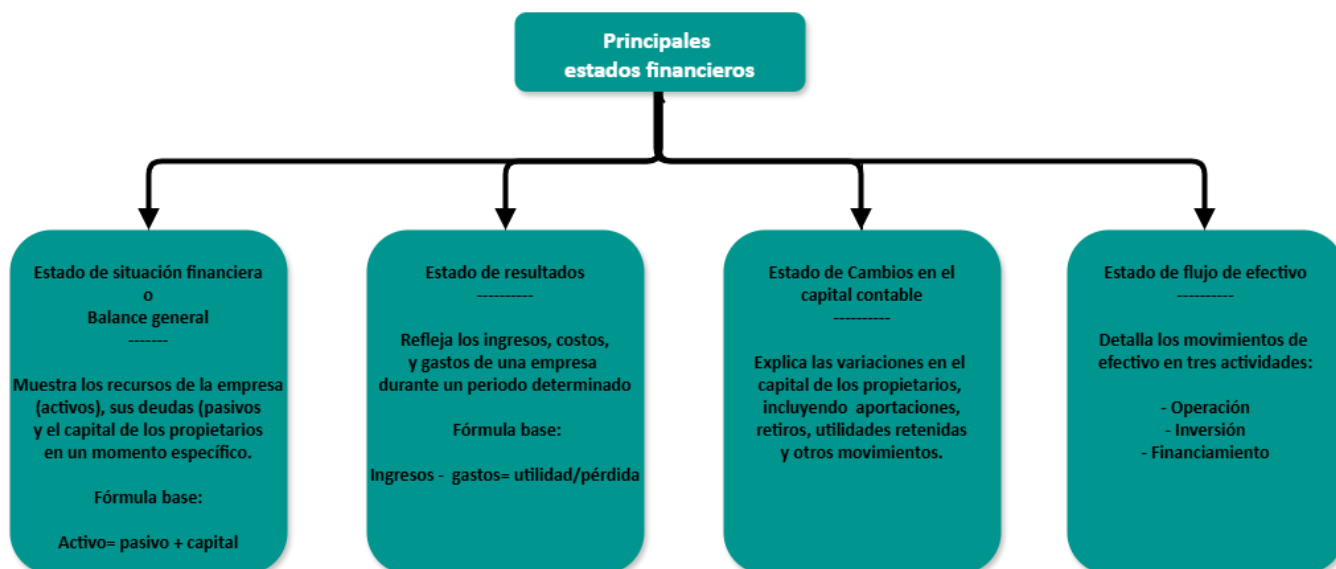


Gráfico 2. Principales estados financieros

Estos estados proporcionan una visión completa del desempeño y la posición financiera de una empresa

12.3 La cuenta

Para la contabilidad, la cuenta es el elemento que permite llevar a cabo la clasificación de las operaciones financieras y comerciales. A través de ésta se representa los elementos que componen financieramente a la empresa, como son bienes y derechos (activos), deudas u obligaciones (pasivo), inversión o patrimonio de los socios (capital), los movimientos y resultados (ganancias o pérdidas).

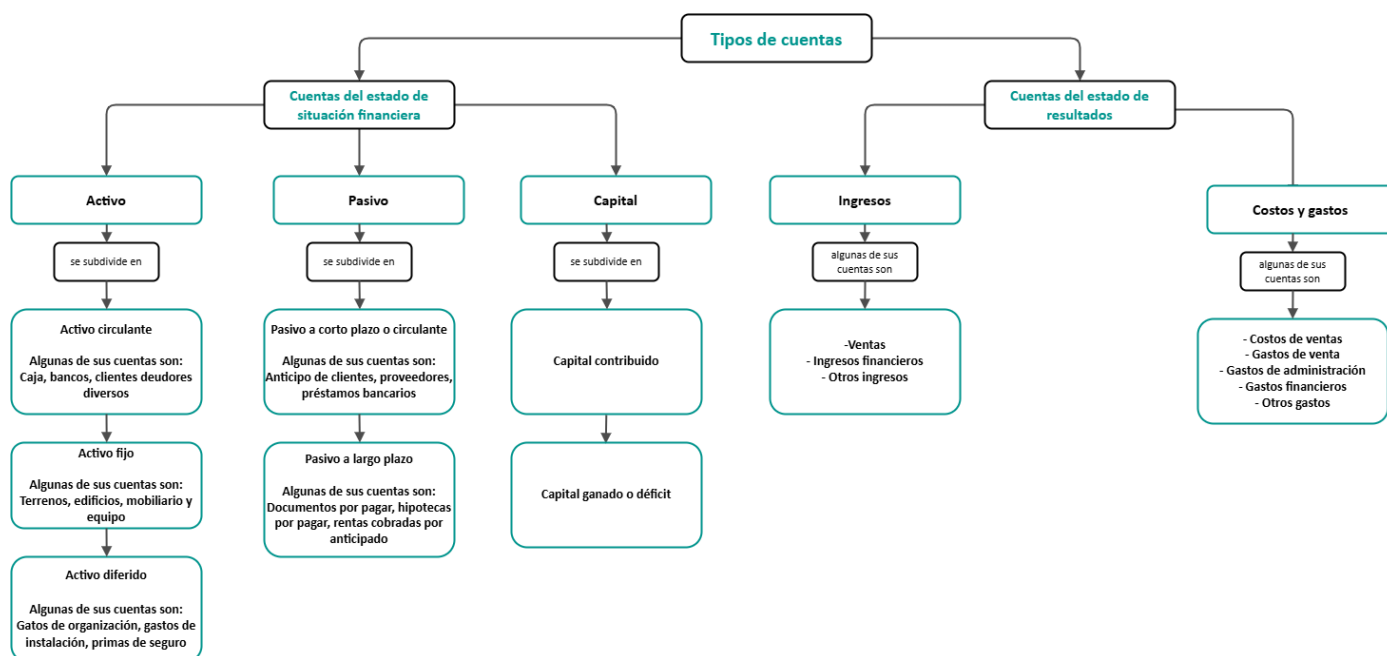
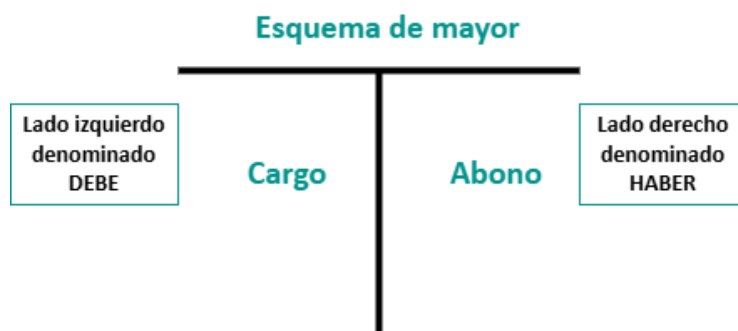


Gráfico3. Tipos de cuentas

La cuenta se representa en el esquema de mayor, conocida también como “T”, ya que corresponde a una representación esquemática de un libro que agrupa las cuentas que integran la contabilidad de una empresa, conocido como libro mayor.



Partes de la cuenta

Nombre de la cuenta: El nombre asignado debe a cada cuenta debe dar una idea clara del concepto a que se refiere.

Columnas de la cuenta. En todas las cuentas se incluyen dos columnas que tienen funciones diferentes:

Debe. Es la columna izquierda de una cuenta, donde se anotan los **cargos** o débitos

Haber. Es la columna derecha de una cuenta, donde se anotan los **abonos** o créditos.

Movimientos de la cuenta: Es la suma de los cargos y de los abonos.

Hay dos tipos de movimientos:

movimiento deudor: es la suma de los cargos de una cuenta. En contabilidad se usan las siglas MD

movimiento acreedor: es la suma de los abonos de una cuenta y sus siglas son MA

Saldo: Es la diferencia entre el movimiento deudor y el acreedor.

Existen dos clases de saldos:

- **Saldo deudor:** Una cuenta tiene saldo deudor cuando su movimiento deudor es mayor que el movimiento acreedor.

- **Saldo acreedor:** Una cuenta tiene saldo acreedor cuando su movimiento acreedor es mayor que el movimiento deudor

Naturaleza de las cuentas

Las cuentas se clasifican en naturaleza deudoras y acreedoras.

1. **Naturaleza deudora:** son cuentas de naturaleza deudora porque **aumentan con los cargos (debe)** y **disminuyen con los abonos (haber)** y su saldo debe mantenerse siempre en la columna del “debe” (saldo deudor).

Algunos ejemplos son:

- **Cuentas de activo:** Bancos, inventarios, clientes, documentos por cobrar, terrenos y edificios las cuales **forma parte del estado de situación financiera**.
 - **Cuentas de gastos:** costo de ventas, gastos de venta, gastos de administración, sueldos y salarios, publicidad, y mantenimiento las cuales **forman parte del estado de resultados**.
2. **Naturaleza acreedora:** contrario a las cuentas de naturaleza deudora, son las cuentas en las que **los aumentos se registran con abonos** y **las disminuciones con cargos**, por lo tanto, su saldo es siempre acreedor.

Algunos ejemplos son:

- **Cuentas de pasivo:** proveedores, documentos por pagar, acreedores diversos, impuestos por pagar **conformadas en el estado de situación financiera**.
- **Cuentas de capital:** capital contable, utilidades retenidas, reservas las cuales **forman parte del estado de situación financiera**.
- **Cuentas de ingresos:** ventas, productos financieros y otros ingresos las cuales **forman parte del estado de resultados**.

12.4 Teoría de la Partida Doble

El franciscano Fray Luca de Pacioli, considerado el precursor de la partida doble, presentó este método en 1494 en su obra *Summa de arithmetica, geometría, proportioni et proportionalita*. En ella expuso que toda operación implica una causa que, a su vez, produce un efecto, basándose en el principio de causalidad: toda causa genera un efecto. Esta teoría sigue siendo aplicable en la actualidad.

En qué consiste

Consiste en registrar, por medio de cargos y abonos (**términos mencionados en el tema de cuenta**), los efectos que producen las operaciones en los diferentes elementos del balance, de tal manera que siempre subsista la igualdad entre el activo y la suma del pasivo más el capital contable.

Por ejemplo, en los siguientes movimientos se realizan:

- un cargo a la cuenta de mobiliario y equipo de cómputo por \$74,000.00 y por lo consiguiente
- un abono a la cuenta de bancos por \$20,000.00; y un abono a la cuenta de acreedores diversos por \$54,000.00.
- donde el saldo de los cargos es de \$74,000.00; y, por otro lado, el saldo de los abonos es de \$74,000.00 al sumar \$20,000.00 y \$54,000.00.

Mob. y equipo de oficina	Bancos	Acreedores diversos
① \$74,000.00	\$20,000.00 ①	\$54,000.00 ①

Al analizar el ejemplo anterior, se puede observar que:

- Cada transacción debe registrarse considerando tanto la causa como el efecto de la misma.
- Cualquier operación involucra al menos dos cuentas, las cuales originan una anotación en el debe (cargo) y otra en el haber (abono).

Por ejemplo:

Si una empresa compra mercancía y la paga en efectivo, debe anotar que tiene más mercancía (aumento en la cuenta de activo: mercancía y registrarse en el **DEBE**) y que tiene menos dinero en su cuenta de banco (disminución en otra cuenta de activo: banco y registrarse en el **HABER**), por la misma cantidad.

Reglas de la Partida Doble

A partir de lo anterior, la teoría de la partida doble se basa en tres reglas:

1. **A todo aumento de activo puede corresponder un:**
 - aumento a capital
 - o aumento de pasivo
 - o disminución de pasivo

Para aplicar y que sea más clara esta regla es importante considerar que:

- Dado que las cuentas de **activo empiezan con un cargo**, para aumentar su saldo éstas se deben **cargar**.
- En cambio, para **disminuir** su saldo se deben **abonar**.
- El capital contable al tener una **naturaleza acreedora**, sus **aumentos** se deben **abonar**.

Lo anterior se puede observar en el siguiente ejemplo:

Caja		Capital contable		Almacén		Proveedores		Prop. y publicidad	
①	\$50,000.00	\$25,000.00	③	\$50,000.00	①	\$2,000.00	②	\$25,000.00	③

2. **A toda disminución de pasivo puede corresponder:**
 - una disminución de activo
 - o un aumento de capital contable
 - o un aumento del propio pasivo

Para aplicar esta regla es importante considerar que:

- Como las cuentas de pasivo empiezan con un **abono**, para aumentar su saldo, necesitan seguir su misma naturaleza, por lo tanto, los aumentos de pasivo se deben **abonar**.
- En cambio, para **disminuir** su saldo se deben **cargar**.
- El capital contable al tener una **naturaleza acreedora**, sus **aumentos** se deben **abonar**.

Lo anterior se puede observar en el siguiente ejemplo:

- A toda disminución de pasivo corresponde: una disminución de activo (1), un aumento de capital contable (2) o un aumento del propio pasivo (3).

Proveedores	Bancos	Capital contable	Documentos por pagar
① \$10,000.00	\$10,000.00 ①	\$15,000.00 ②	\$25,000.00 ③
② \$15,000.00			
③ \$25,000.00			

3. A toda disminución de capital contable puede corresponder:

- una disminución de activo
- o un aumento de pasivo
- o un aumento del propio capital contable.

Para aplicar esta regla es importante considerar que:

Al igual que el pasivo, el capital contable, por ser de naturaleza acreedora, tendrá los mismos movimientos para registrar los aumentos y disminuciones, por lo tanto, **los aumentos de capital** siguiendo su naturaleza, se **deben de abonar**.

Lo anterior se puede observar en el siguiente ejemplo:

- A toda disminución de capital contable corresponde: una disminución de activo (1), un aumento de pasivo (2) o un aumento del propio capital contable (3).

Capital contable	Bancos	Documentos por pagar
① \$18,000.00	\$18,000.00 ①	\$22,000.00 ②
② \$22,000.00		
③ \$25,000.00		
\$25,000.00 ③		

12.5 Ecuación Contable

La ecuación contable es una fórmula fundamental en la contabilidad que muestra la relación entre los recursos de una empresa (*activo*), sus deudas (*pasivo*) y el dinero aportado por los propietarios (*capital*). Es la base para registrar y analizar todas las operaciones financieras.

Fórmula:

$$\text{Activo} = \text{Pasivo} + \text{Capital}$$

¿En qué consiste?

- Activo:** Representa los bienes y derechos que posee la empresa, como dinero, propiedades, inventarios, etc.
- Pasivo:** Son las obligaciones o deudas que la empresa debe pagar a terceros, como préstamos o facturas pendientes.
- Capital:** Es el aporte de los dueños más las ganancias retenidas (o menos las pérdidas).

La ecuación muestra que todo lo que la empresa tiene (*activo*) está financiado ya sea por deudas (*pasivo*) o por aportaciones y utilidades (*capital*). Siempre debe mantenerse en equilibrio.

Por ejemplo:

Si una empresa compra maquinaria por \$10,000.00 financiada con un préstamo de \$6,000.00 un aporte de capital de \$4,000:

$$\text{Activo} = \text{Pasivo} + \text{Capital}$$

$$10,000.00 = 6,000.00 + 4,000.00$$

El equilibrio demuestra que la ecuación es correcta.

12.6 Balanza de comprobación

La balanza de comprobación es un documento contable que sirve para verificar que todas las operaciones se registraron correctamente, siguiendo la regla de la partida doble. Este documento muestra todas las cuentas usadas durante un periodo, indicando:

1. Los **movimientos** de cada cuenta (*Debe y Haber*).
2. Los **saldos** de cada cuenta (lo que queda al final).

El objetivo es comprobar que la suma total de las columnas del *Debe* y el *Haber* sea igual, lo que asegura que los registros están balanceados.

Características principales

1. **Contiene todas las cuentas** del libro mayor, tanto deudoras como acreedoras.
2. **Incluye saldos iniciales**, movimientos del periodo y saldos finales.
3. Sirve como base para preparar los estados financieros.
4. Permite detectar errores como cifras mal registradas o desequilibrio en las cuentas.

Estructura

- Encabezado

Está compuesto por la siguiente información: - El nombre de la empresa - La indicación de que se trata de una balanza de comprobación - La fecha en que se elabora (la fecha del último día del periodo de que se trata).

- Columnas
 - Nombre de la cuenta.
 - Saldos iniciales (Debe y Haber).
 - Movimientos del periodo (Debe y Haber).
 - Saldos finales (Debe y Haber).

Ejemplo de balanza de comprobación:

Panadería La Rosa S.A de C.V Balanza de comprobación al 30 de enero de 2022					
No.	Cuenta	Movimientos		SalDOS	
		Deudor	Acreedor	Deudor	Acreedor

12.7 La empresa

Una **empresa** es una organización o entidad que utiliza recursos (humanos, financieros, tecnológicos, etc.) para producir bienes o servicios con el objetivo de satisfacer necesidades del mercado y obtener una ganancia. También pueden perseguir objetivos sociales, culturales o ambientales si son de naturaleza no lucrativa.

Clasificación de las Empresas

Las empresas pueden clasificarse de acuerdo con diferentes criterios:

1. Según su Actividad Económica

- **Industriales:** Se dedican a la producción de bienes mediante la transformación de materias primas.
 - Ejemplo: Fábricas de alimentos, automotrices.
- **Comerciales:** Se enfocan en la compra y venta de productos terminados.
 - Ejemplo: Supermercados, tiendas de ropa.
- **De Servicios:** Ofrecen servicios en lugar de productos tangibles.
 - Ejemplo: Bancos, empresas de transporte, clínicas.

2. Según su tamaño

- **Microempresas:** Tienen pocos empleados (menos de 10) y capital limitado.
 - Ejemplo: Pequeñas tiendas de barrio.
- **Pequeñas Empresas (PyMEs):** Con un número de empleados entre 11 y 50, y una estructura algo mayor.
 - Ejemplo: Talleres mecánicos, cafeterías.
- **Medianas Empresas:** Cuentan con entre 51 y 250 empleados y mayor capacidad económica.
 - Ejemplo: Fábricas locales.
- **Grandes Empresas:** Tienen más de 250 empleados y operan a nivel nacional o internacional.
 - Ejemplo: Corporaciones como Coca-Cola, Amazon.

3. Según su finalidad

- **Con Fines de Lucro:** Su objetivo es obtener ganancias.
 - Ejemplo: Empresas comerciales, industriales.
- **Sin Fines de Lucro:** No buscan ganancias, sino satisfacer objetivos sociales, culturales o humanitarios.

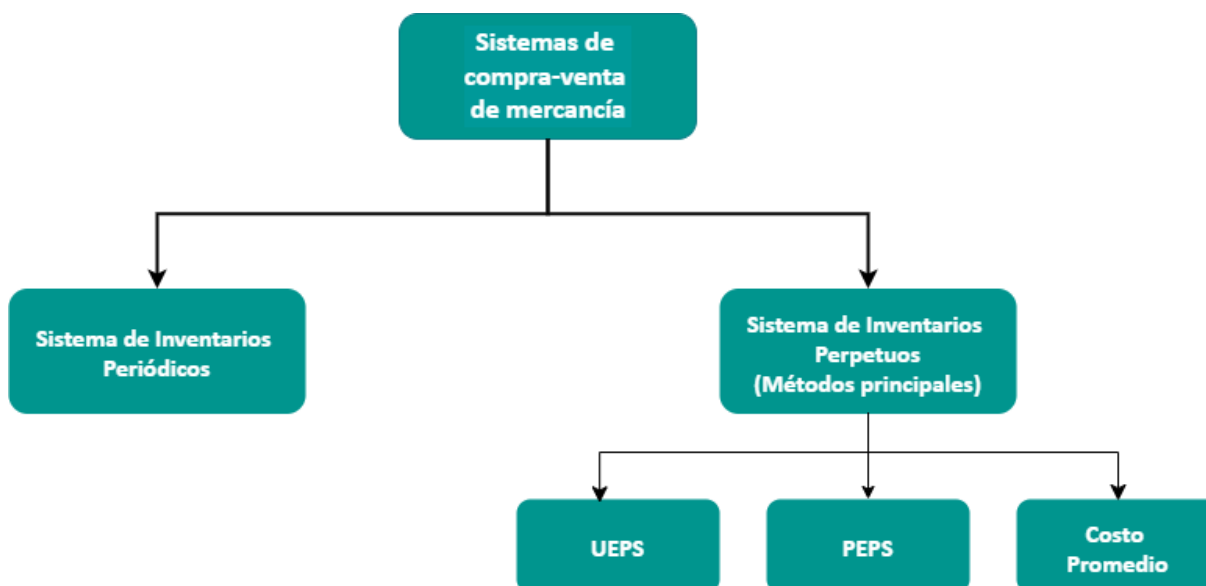
- Ejemplo: ONG, fundaciones

4. Según el origen de su capital

- **Privadas:** Propiedad de particulares o accionistas.
 - Ejemplo: Empresas familiares, multinacionales.
- **Públicas:** Propiedad del Estado o gobierno.
 - Ejemplo: Empresas de servicios públicos, correos.
- **Mixtas:** Combinación de capital público y privado.
 - Ejemplo: Empresas estatales con participación privada.

12.8 Sistema de compra -venta de mercancías

El **sistema de compra-venta de mercancías** se refiere a los métodos utilizados para registrar y controlar las transacciones relacionadas con la adquisición y venta de bienes en una entidad comercial. Estos sistemas permiten registrar tanto las entradas (compras) como las salidas (ventas) de mercancías, así como los costos asociados, para mantener un adecuado control contable.



- **¿En qué consiste?**
 - Registra las compras y ventas de mercancías, pero el inventario final y el costo de ventas se calculan al final del periodo contable mediante un conteo físico.
- **Ventajas:**
 - Es más simple y económico de implementar.
 - No requiere registro constante de cada transacción.
- **Desventajas:**
 - No permite conocer el inventario disponible en tiempo real.
 - Puede haber errores por faltantes o sobrantes no detectados hasta el conteo físico.

2. Sistema de inventarios perpetuos

- **¿En qué consiste?**
 - Registra las compras, ventas y el costo de ventas en tiempo real.
 - Mantiene un control constante del inventario disponible.
 - El costo de la mercancía vendida se calcula en cada transacción.

- **Ventajas:**
 - Permite conocer el saldo del inventario en cualquier momento.
 - Reduce errores en el control de mercancías.
 - Es ideal para empresas con grandes volúmenes de transacciones.
- **Desventajas:**
 - Requiere sistemas computarizados para un registro eficiente.
 - Puede ser costoso de implementar.
- **Principales métodos**
 - PEPS (Primeras Entradas, Primeras Salidas)
 - UEPS (Ultimas Entradas, Primeras Salidas)
 - Costo promedio

A continuación, se explicará a más detalle los principales métodos del sistema de inventarios perpetuos.

Método PEPS (Primeras Entradas, Primeras Salidas)

En este método los primeros productos que entraron al inventario son los primeros en venderse o usarse.
Ejemplo:

1. Se realiza una primera compra

Nota de entrada no.1 por la compra de 50 artículos a \$ 300.00 c/u.

		Unidades			Costo		Valores		
Fecha	Referencia	Entrada	Salida	Existencia	Unitario	Promedio	Debe	Haber	Saldo
10/3	NE No. 1	50		50	\$300.00		\$15,00.00		\$15,00.00

El 10 de marzo entraron a almacén 50 unidades de \$300.00 c/u dando un saldo final de \$15,00.00.

2. Se realiza una segunda compra

Nota de entrada no. 2 por la compra de 90 artículos a \$ 350.00 c/u.

		Unidades			Costo		Valores		
Fecha	Referencia	Entrada	Salida	Existencia	Unitario	Promedio	Debe	Haber	Saldo
10/3	NE No. 1	50		50	\$300.00		\$15,00.00		\$15,00.00
13/3	NE No. 2	90		140	\$350.00		\$31,500.00		\$46,500.00

El 13 de marzo entraron a almacén 90 unidades de \$350.00 c/u dando un saldo final de \$46,50.00.

3. Finalmente, se **venden de los primeros 50** artículos que entraron, 40 a un precio de \$300.00.

El hecho de que los 40 artículos vendidos provengan de la primera compra de 50 unidades, y no de la compra de 90, sumado a que el precio de venta utilizado sea de \$300 y no de \$350, permite concluir que en este caso se aplica el principio de que lo **que primero que entra al almacén es lo primero que sale de él.**

Nota de salida no. 3 por la venta de 40 artículos a \$ 300.00 c/u.

		Unidades			Costo		Valores		
Fecha	Referencia	Entrada	Salida	Existencia	Unitario	Promedio	Debe	Haber	Saldo
10/3	NE No. 1	50/10		50	\$300.00		\$15,00.00		\$15,00.00
13/3	NE No. 2	90		140	\$350.00		\$31,500.00		\$46,500.00
15/3	NS No. 3		40	100	\$300.00			12,000.00	\$34,500.00

El 15 de marzo salen del almacén 40 artículos a un precio de \$300.00 c/u.

Al cruzar con una diagonal el 50, se da a entender que de esa compra quedan sólo 10 unidades, ya que la salida de las 40 fue a costo de \$300.00

Método UEPS (Últimas Entradas, Primeras Salidas)

Siguiendo con el mismo ejemplo, el método aplicado en este caso es el **UEPS** (Últimas Entradas, Primeras Salidas), ya que los 40 artículos vendidos provienen de la última compra de 90 unidades, y no de la primera compra de 50. Además, el precio de venta utilizado es de \$350.00, en lugar de \$300.00, lo que confirma que los últimos artículos que ingresaron al inventario son los primeros en salir.

Nota de salida no. 3 por la venta de 40 artículos a \$ 350.00 c/u.

		Unidades			Costo		Valores		
Fecha	Referencia	Entrada	Salida	Existencia	Unitario	Promedio	Debe	Haber	Saldo
10/3	NE No. 1	50		50	\$300.00		\$15,00.00		\$15,00.00
13/3	NE No. 2	90/50		140	\$350.00		\$31,500.00		\$46,500.00
15/3	NS No. 3		40	100	\$350.00			14,000.00	\$32,500.00

Al cruzar con una diagonal el 90, se da a entender que de esa compra quedan sólo 50 unidades, ya que la salida de las 40 fue a costo de \$350.00.

Costo promedio

Este método determina un costo promedio a todos los artículos en inventario, calculado al dividir el costo total de los productos entre el número total de unidades disponibles. De esta manera, cada unidad tiene el mismo costo promedio, sin importar cuándo ingresó al inventario.

Siguiendo con el mismo ejemplo, en esta ocasión el precio de salida de los 40 artículos vendidos es de \$325.00 debido a que se obtuvo el precio promedio basados en los dos primeros precios de entrada, \$300.00 y \$350.00.

Al utilizar este método, la salida de mercancía puede ser seleccionada indistintamente de cualquiera de las dos compras realizadas anteriormente.

Nota de salida no. 3 por la venta de 40 artículos a \$325.00 c/u

		Unidades			Costo		Valores		
Fecha	Referencia	Entrada	Salida	Existencia	Unitario	Promedio	Debe	Haber	Saldo
10/3	NE No. 1	50		50	\$300.00		\$15,00.00		\$15,00.00
13/3	NE No. 2	90		140	\$350.00		\$31,500.00		\$46,500.00
15/3	NS No. 3		40	100		\$325.00		13,000.00	\$33,500.00

12.9 Documentación comprobatoria

Son los soportes de contabilidad que sirven de base para registrar las operaciones comerciales de una empresa. Y tienen la función de comprobar razonablemente una operación, así mismo generan o amparan registros de contabilidad, además de servir como respaldo para cualquier persona u empresa. A continuación, se mencionan los más utilizados:

- Ticket
- Factura
- Nota de crédito
- Nota de remisión
- Recibo
- Nota de salida del almacén
- Nota de entrada al almacén
- Cheque
- Pagaré

12.10 Registro de documentación comprobatoria

Los documentos comprobatorios brindan soportes de contabilidad en las operaciones comerciales de una empresa u organización. Se apegarán a los requisitos que brinda el código fiscal de la federación para la elaboración de alguno de los documentos, ya sean de compra o venta como:

- Facturas
- Notas de créditos
- Recibos por servicios

12.11 Registro de operaciones comerciales

Se conoce bajo este término a un método analítico de control implementado en empresas de diversos niveles que busca registrar de manera detallada y organizada todos los movimientos contables realizados en un determinado periodo de tiempo. Dicho en otras palabras, se trata de una documentación en la cual se contemplan todos los datos inherentes al flujo de dinero dentro de la empresa, lo que incluye tanto ingresos de dinero como egresos de este y de mercancías generales. Este tema permitirá a los sustentantes tener claro el orden que deben llevar los registros de las operaciones de una entidad mediante el reconocimiento de las características o estructuras de las:

- Pólizas de diario
- Pólizas de cheque
- Pólizas de egreso
- Pólizas de ingreso

12.12 Fondos de caja

El efectivo es el elemento vital de cada negocio y quedarse sin él es una de las principales razones por las que las empresas fracasan. El flujo de efectivo es uno de los pilares en la administración de cualquier empresa, debido a que representa las entradas y salidas de efectivo, producto de la operación diaria de una empresa.

El **efectivo es un elemento de balance** y forma parte del activo circulante. Es el elemento más líquido que posee la empresa. Las empresas reciben dinero a través de las ventas y los rendimientos de las inversiones, es decir, el efectivo que fluye al negocio.

Es el plan de organización entre el sistema de contabilidad, funciones de empleos y procedimientos coordinados que tiene por objeto obtener información segura, salvaguardar el efectivo en caja y bancos, así como fomentar la eficiencia de operaciones y adición de la política administrativa de cualquier empresa.

El control interno comprende el conjunto de planes, métodos, principios, normas, procedimientos y mecanismos diseñados por una empresa para promover la eficiencia en las operaciones, salvaguardar los recursos de la entidad y verificar la veracidad de la información financiera y administrativa.

El dinero es un medio de intercambio, por lo general en forma de billetes y monedas, que es aceptado por una sociedad para el pago de bienes, servicios y todo tipo de obligaciones. El efectivo depositado en caja nos ayuda para hacerle frente a los gastos menores de la empresa y debe realizar arqueos sorpresivos, por lo menos una vez al mes.

12.13 Conciliación bancaria

La conciliación bancaria es aquella en la cual se **comparan los registros de la empresa y los registros del banco**, para encontrar las diferencias. Una vez que tengamos la conciliación entre los dos saldos, se procederá a realizar los asientos de corrección o en su caso la aclaración ante el banco.

En conclusión

En la economía moderna, el dinero es considerado como el lubricante del sistema económico, ya que es el mecanismo que pone en movimiento el proceso de producción de bienes y servicios, permitiendo la acumulación de capital por medio del ahorro y la inversión, que como ya sabemos, son factores de gran importancia para el crecimiento globalizado.

12.14 Contribuciones

Las **contribuciones** son las aportaciones económicas que las personas físicas y morales (empresas) están obligadas a realizar al Estado, de acuerdo con las leyes fiscales, para financiar el gasto público y garantizar el funcionamiento del gobierno y los servicios públicos. Estas aportaciones permiten al Estado cumplir con sus responsabilidades, como la seguridad, educación, salud, infraestructura, entre otros.

Clasificación de las contribuciones

Según el **Código Fiscal de la Federación (CFF)** en México, las contribuciones se dividen en cuatro categorías principales:

1. Impuestos

- Son pagos obligatorios establecidos por la ley, que no implican un beneficio directo o inmediato para el contribuyente.
- Ejemplos:
 - **ISR (Impuesto Sobre la Renta)**: Sobre ingresos personales o empresariales.
 - **IVA (Impuesto al Valor Agregado)**: Sobre el consumo de bienes y servicios.
 - **IEPS (Impuesto Especial sobre Producción y Servicios)**: Sobre productos como alcohol, tabaco y gasolina.

2. Aportaciones de Seguridad Social

- Son pagos destinados a financiar servicios de salud, pensiones y otras prestaciones para los trabajadores y sus familias.
- Ejemplos:
 - Cuotas patronales al IMSS, ISSSTE, INFONAVIT.

3. Contribuciones de mejoras

- Son pagos que realizan los beneficiarios de obras públicas que incrementan el valor de sus propiedades o brindan beneficios directos.
- Ejemplo:
 - Contribuciones por obras de pavimentación o alumbrado público.

4. Derechos

- Son pagos que realizan los beneficiarios de obras públicas que incrementan el valor de sus propiedades o brindan beneficios directos.

IVA (Impuesto al Valor Agregado)

Los contribuyentes pueden tener un IVA acreditable o un IVA trasladado y en el cálculo de sus actividades como persona física o moral estos pueden obtener un IVA a cargo o un IVA a favor.

Los siguientes son los tipos de IVA:

- En deducciones autorizadas. IVA por acreditar (por pagar), IVA acreditable (pagado)
- En ingresos. IVA por trasladar (por cobrar), IVA trasladado (cobrado)

Por lo anterior, una de las obligaciones fiscales consiste en pagar el IVA que el contribuyente cálculo en el periodo fiscal que le corresponde, de acuerdo a su régimen fiscal.

ISR (Impuesto Sobre la Renta)

En contabilidad este impuesto es estudiado con la finalidad de que el aprendiz, de acuerdo a la Ley del Impuesto Sobre la Renta, identifique los elementos generales de esta contribución.

El ISR, es un impuesto que aplica a los ingresos adquiridos por personas físicas o morales, este impuesto es uno de los más importantes en México porque grava directamente las fuentes de riqueza.

Para el pago de este gravamen la Ley del Impuesto Sobre la Renta establece una tasa variable que va desde el 1.9 al 35%, el cual se mide de acuerdo con tarifas de ingresos establecidas; mientras que para las personas morales establece una tasa fija del 30%.

En la determinación del ISR, los contribuyentes, con base en el artículo 105 de la LISR, pueden realizar deducciones, las cuales deberán ser estrictamente indispensables para la obtención de los ingresos.

A diferencia del IVA que es una declaración mensual definitiva, es ISR es un pago provisional. Por lo tanto, los contribuyentes deben realizar una declaración anual del ejercicio fiscal correspondiente y en su caso, realizar los pagos provisionales de acuerdo con su régimen fiscal.

En el cálculo del impuesto los contribuyentes pueden determinar un ISR a cargo o un ISR a favor.

El propósito que tiene el estado sobre este impuesto es recaudar dinero para ejercer el gasto público, por lo que es una contribución que aplica a todos los ingresos obtenidos de la nación.

12.15 Nómina

La **nómina** es un documento administrativo y contable que registra los pagos que una empresa realiza a sus empleados por concepto de su trabajo durante un periodo determinado (semanal, quincenal, mensual, etc.). Incluye tanto las **percepciones** (ingresos) como las **deducciones** (descuentos por impuestos, seguridad social, entre otros), y determina el **salario neto** que cada trabajador recibe.

Elementos principales de una nómina

1. Datos Generales

- Nombre del empleado
- Puesto
- Número de identificación laboral o RFC
- Periodo de pago (fechas)

2. Percepciones

- Todos los conceptos que representan ingresos para el trabajador, como sueldo base, bonos, comisiones, horas extras, aguinaldo, prima vacacional, etc.

3. Deducciones: Descuentos que se aplican al salario bruto, como:

- Impuesto Sobre la Renta
- Cuotas del seguro Social
- Fondos de ahorro
- Préstamos otorgados por la empresa

4. Salario Bruto y Salario Neto

- Salario bruto: es la suma total de las percepciones antes de aplicar deducciones.
- Salario neto: es el monto que el trabajador recibe efectivamente después de restar las deducciones.

Bibliografía sugerida

Cervantes Cruz, a. (n.d.). Tema: la cuenta y sus elementos material educativo elaborado sin fines de lucro. Edu.mx. Retrieved october 9, 2023, from https://huelladigital.cbachilleres.edu.mx/secciones/docs/difcil_comprension/laboral/la_cuenta_y_sus_elementos.pdf

Contabilidad para le enseñanza media superior teoría y casos prácticos ed. Instituto mexicano de contadores públicos 2014. Contabilidad de la estructura financiera de la empresa, 4a.ed.

Contabilidad para le enseñanza media superior teoría y casos prácticos ed. Instituto mexicano de contadores públicos. (2014).

Contabilidad: principios y aplicaciones. Escrito por Horace R. Brock, Charles Earl Palmer, ed. Reveré s.a. 2015. Contabilidad para la enseñanza media superior teoría y casos prácticos ed. Instituto mexicano de contadores públicos 2014.

De diputados, c., congreso de, d. H., & unión, l. A. (n.d.). Ley del impuesto sobre la renta. Gob.mx. Retrieved october 4, 2023, from <https://www.diputados.gob.mx/leyesbiblio/pdf/lisr.pdf>

De, j. (n.d.). Micro, pequeñas y medianas empresas en México. Evolución, funcionamiento y problemática. Gob.mx. Retrieved october 9, 2023, from <http://bibliodigitalibd.senado.gob.mx/bitstream/handle/123456789/1718/mpymem.pdf?sequence=1&isallowed=y>

Edu.mx. Retrieved october 9, 2023, from <https://www.cobachsonora.edu.mx/files/semestre5-2016/contabilidad1.pdf>

Gabriel, m. A. G., & Calderon, V. (n.d.). "apuntes de contabilidad i." Umich.mx. Retrieved october 9, 2023, from <https://www.fcca.umich.mx/descargas/apuntes/academia%20de%20contabilidad/apuntes%20contabilidad%20i%20villalon%20calderon.pdf>

General, c., Maximino, E., & México, D. F. (201 c.e.) manual del usuario del sistema administrativo empresarial (ver. 4.6 para windows), México. Ley del ISR 2017 y código fiscal (s. A. De México, ed.).

Instituto de investigaciones de económicas, antecedentes y desarrollo de la micro y pequeñas empresas en México, México: UNAM, 2001.

Ley, d., impuesto, a. V., de diputados, c., congreso de, d. H., & unión, l. A. (n.d.). Ley del impuesto al valor agregado. Gob.mx. Retrieved october 9, 2023, from <https://www.diputados.gob.mx/leyesbiblio/pdf/liva.pdf>

Meigs f. Robert, contabilidad. La base para decisiones gerenciales. México, Mc Graw Hill, 2001, 11ª ed.), 707 pp.

Primer curso de contabilidad, Lara Flores Elías / Lara Ramírez Leticia, ed. Trillas, p.p. 423 año 2011. Escrito por c.p. Mónica Galindo Cosme, c.p. Jesús F. Hernández Rodríguez fundamentos de contabilidad (alumno), María De Los Ángeles Vargas Moreno, 3a edición, instituto mexicano de contadores públicos, 2016

Segundo curso de contabilidad, Lara Flores Elías ed. Trillas, año 2011 contabilidad para le enseñanza media superior teoría y casos prácticos ed. Instituto mexicano de contadores públicos 2014

Uabc.mx. Retrieved october 9, 2023, creación de nómina from
<https://repositorioinstitucional.uabc.mx/server/api/core/bitstreams/bbc2e770-f41b-4313-ab13-6164957a2d98/content>

13. Informática

En la actualidad, el uso de las computadoras ha cambiado la forma de vida profesional y personal de las personas. La diversificación de las mismas ha transformado profundamente a las sociedades, volviéndose imprescindibles para casi cualquier organización.

Rasso (2021) menciona que la informática es la disciplina que se ocupa de estudiar el tratamiento automático de la información. En principio, nos enseña que todo proceso informático sigue tres pasos: introducción de datos, procesamiento y salida de resultados (fig. 1).



Figura. 1 Proceso informático

13.1 Principios de programación

Gracias al papel que tienen las computadoras en el entorno, es fundamental conocer cómo establecer comunicación con las mismas, esta función se cumple con los programas informáticos, que siguen una serie de instrucciones previamente establecidas.

Con el objetivo de conocer las bases fundamentales de la programación se debe conocer la clasificación y tipos de lenguajes de programación, así como los diferentes conceptos elementales para el entendimiento del modelado de programas informáticos.

Conceptos informáticos básicos

Para llevar a cabo los procedimientos o acciones que permitirán resolver diversos problemas informáticos, se deben dominar los conocimientos básicos como lo son datos, información, conocimiento, variables, constantes, unidades de transferencia y almacenamiento, etc., esto considerando las características para su elaboración.

Algoritmos

De forma consciente o inconsciente, el ser humano realiza diversas actividades siguiendo una serie de pasos delimitados que permitirán llegar a concluir con dicha actividad. Por ejemplo, al lavarnos las manos ponemos en marcha una secuencia de pasos que repetimos cada vez que llevamos a cabo esta actividad y nos lleva al mismo resultado.

Un algoritmo se caracteriza por ser preciso, finito y brinda determinismo; su función principal será apoyar con el entendimiento del problema, generando una serie de pasos con los que se llegará a la solución.

Lenguaje de programación

Un lenguaje de programación es una herramienta que nos permite diseñar e implementar programas encargados de definir y administrar el comportamiento de los dispositivos físicos y lógicos de una computadora. Se conforma por una serie de símbolos y reglas de sintaxis y semántica que definen la estructura principal del lenguaje y le dan un significado a sus elementos y expresiones.

Paradigmas de programación

Un paradigma de programación se refiere a un enfoque particular para abordar la resolución de problemas, lo cual influye directamente en todo el proceso de desarrollo de software. Los paradigmas de programación más utilizados son:

- **Lenguaje declarativo:** solicita al programador que describa el problema en lugar de encontrar una solución algorítmica al problema; es decir, un lenguaje declarativo utiliza el principio del razonamiento lógico para responder a las preguntas o cuestiones consultadas. (Joyanes, 2013). Un ejemplo del lenguaje de programación declarativo es Prolog.
- **Lenguaje imperativo (procedimental):** se basa en una secuencia de instrucciones que se ejecutan una tras otra de forma lineal (salvo cuando se utilizan comandos de control o salto que modifican el flujo de ejecución). Un ejemplo del lenguaje de programación imperativo es Fortran.
- **Lenguaje orientado a objetos:** En primer lugar, el programador identifica los objetos del problema y luego establece los datos y las operaciones que trabajarán con ellos. La programación orientada a objetos es útil porque organiza todo en módulos, como en la vida real, y permite que esos módulos respondan a mensajes o eventos cuando sea necesario. Ejemplos de los lenguajes orientados a objetos son Java y C#.

Identificar los diferentes estilos de programación permite un panorama amplio para el desarrollo de las tareas que deben realizarse en un programa informático.

Diagrama de flujo

Representan una herramienta que permitirá mostrar de manera visual los algoritmos, por lo que se abordará la simbología estandarizada.

Pseudocódigo

Figura como una herramienta para el diseño de soluciones a los problemas computacionales, utilizando un lenguaje parecido al natural.

Estructuras lógicas de control

Para la solución de casi todo tipo de problemas de programación, se utilizan estructuras lógicas de control (secuenciales, selectivas y repetitivas), pues estas especifican el orden o ejecución de una instrucción.

Estructuras de datos

En la solución de problemas donde se requiere más de una dimensión para almacenar variables, las estructuras de datos o arreglos juegan un papel importante al facilitar el manejo de una colección muy grande de información. Pueden utilizarse arreglos unidimensionales o bidimensionales.

13.2 PHP

PHP es un acrónimo recursivo para “PHP: Hypertext Preprocessor”, es un lenguaje de código abierto, originalmente usado para el desarrollo de aplicaciones presentes y que actuarían en el lado del servidor, es capaz de generar contenido dinámico en la Web (Word Wide Web).

IDE (entorno de desarrollo integrado)

Es importante saber que existen diferentes IDE para trabajar con PHP. Es muy útil a la hora de desarrollar aplicaciones web, pues se pueden ejecutar de manera local y visualizar cómo sería el funcionamiento antes de ser subidas a un hosting o servidor web. Además, se pueden gestionar datos con la ayuda del motor de base de datos (MySQL) y su administrador (PHPMysqlAdmin).

Es importante conocer la forma de instalación, configuración y administración del entorno de desarrollo web.

Lenguaje de programación PHP

El lenguaje de programación de código abierto PHP, permite el desarrollo web o aplicaciones web dinámicas, el cual se incorpora directamente dentro del código HTML, siguiendo algunas reglas establecidas. Además, el lenguaje PHP favorece a la conexión entre el servidor y a la interfaz del usuario.

Su característica más importante es la sencillez con que se pueden generar interfaces web con acceso a bases de datos. Y que se ejecuta del lado del servidor (server-side scripting language).

En términos de programación PHP, es indispensable que el sustentante conozca:

- Declaración de variables y constantes
- Identificación y uso de tipos de valores (enteros, reales, booleanos, etc.)
- Operadores
- Estructuras de control
- Comentarios
- Comandos básicos

13.3 Bases de datos

Sistemas de información

Los sistemas de información son un conjunto ordenado de mecanismos para la administrar datos e información de manera que puedan ser recuperados y procesados fácil y rápidamente.

Bases de datos relacionales

Una base de datos es una colección de información que organiza datos en relaciones predefinidas, en la que los datos se almacenan en una o más tablas (relaciones) de columnas y filas, lo que facilita su visualización y la comprensión de cómo se relacionan las diferentes estructuras de datos entre sí.

Existen diferentes tipos de BD, sin embargo, las bases de datos relacionales son las que más se utilizan hoy en día, por lo que es necesario adquirir el conocimiento teórico y práctico para aplicarlos en las diferentes áreas.

Diseño conceptual de una base de datos

En el diseño conceptual de una base de datos, es importante elegir adecuadamente los nombres de los tipos de entidad, atributos y tipos de relación.

Diseño lógico o relacional de una base de datos

Conocer los aspectos semánticos de los datos como es el significado, las interdependencias y relaciones entre ellos, así como los aspectos operacionales de la aplicación y rendimiento, permite que una base de datos sea funcional.

Diseño físico de una base de datos

Conocer el proceso del diseño de una base de datos para después, como paso independiente, transformar ese diseño en cualquier estructura física que soporte el SGBD de destino, donde el diseño físico debe derivarse del diseño lógico y no al revés.

13.4 Sistemas gestores de bases de datos

Conocer las características de los diferentes SGBD ayudará a que el analista identifique documentadamente cuál se adapta mejor al problema o situación que busca satisfacer.

Lenguaje SQL

Debido a su utilidad y aplicación en las empresas, es de suma importancia conocer qué es el lenguaje SQL, tipos, elementos básicos y funciones características.

- Almacenamiento, vistas, consultas y eliminación de datos en SQL

Comandos, cláusulas y operadores en las consultas y creación de tablas virtuales (vistas) mediante el lenguaje SQL.

Diccionario de datos y tipos de datos SQL

El diccionario de datos como herramienta esencial en la administración de bases de datos en SQL. El sustentante debe conocer y usar apropiadamente los tipos de datos en el lenguaje SQL y la importación o captura apropiada de datos.

En términos de programación SQL, es indispensable que el sustentante conozca:

- Declaración de variables y constantes
- Identificación y uso de tipos de valores (enteros, reales, booleanos, etc.)
- Operadores
- Estructuras de control
- Comentarios
- Comandos básicos

13.5 Bases de datos para Android

Al igual que como se diseñan los sistemas de escritorio, las aplicaciones Android requieren de una base de datos para gestionar el almacenamiento y recuperación de los datos. En Android existen diferentes opciones para trabajar con base de datos, como SQLite.

Las bases de datos para Android deben ser bibliotecas livianas y autónomas sin componentes de servidor. Las aplicaciones móviles pueden vincularse (estáticamente o dinámicamente) con ellas y luego usarlas para crear y gestionar sus propias bases de datos privadas o compartidas localmente en el dispositivo.

Creación de bases de datos en SQLite mediante un IDE

SQLite es un ligero motor de bases de datos de código abierto, que se caracteriza por mantener el almacenamiento de información persistente de forma sencilla. SQLite tiene algunas ventajas con respecto a otros sistemas gestores de bases de datos como MySQL, SQL Server y Oracle DB, como son:

- No requiere el soporte de un servidor

- No necesita configuración
- Usa un archivo para el esquema
- Es de Código Abierto

Manipulación de bases de datos en SQLite

SQLite utiliza comandos para manipular las bases de datos. Y estos pueden ser para:

- Crear la base de datos
- Crear o eliminar tablas de datos
- Insertar filas en las tablas
- Recuperar datos simples o condicionales de las tablas
- Modificar registros existentes en las tablas
- Ordenar o agrupar datos, entre otros

En términos de programación SQLite, es indispensable que el sustentante conozca:

- Declaración de variables y constantes
- Identificación y uso de tipos de valores (enteros, reales, booleanos, etc.)
- Operadores
- Estructuras de control
- Comentarios
- Comandos básicos

13.6 Fundamentos de programación en Java

Java es un lenguaje de programación que se basa en el paradigma Orientado a Objetos (POO). Es uno de los lenguajes de programación más populares.

Para lograr programar en Java, es necesario contar con un entorno de desarrollo integrado (IDE, por sus siglas en inglés), la función de dichos entornos es generar código fuente, compilar, ejecutar y buscar errores de lógica, por lo que el sustentante debe conocer los entornos de desarrollo integrado más populares.

- Principios de programación en Java

El sustentante deberá conocer los conceptos de programación orientada a objetos: clase, herencia, objeto, método, evento, atributo y las características como encapsulamiento, abstracción y polimorfismo.

- Metodología de programación orientada a Objetos (POO)

Uso de variables, constantes y métodos de conversión de datos en consola.

- Datos simples y operadores en Java

El sustentante deberá de ser capaz de identificar los operadores aritméticos, lógicos y relacionales, así como su uso en línea de comando.

13.7 Programación en Java

Java es un lenguaje de alto nivel sencillo y orientado a objetos, que permite el desarrollo de aplicaciones en diversas áreas, como seguridad, animación, acceso a bases de datos, aplicaciones cliente-servidor,

interfaces gráficas, páginas Web interactivas y desarrollo de aplicaciones móviles, entre otras. Dentro de las características de Java destacan: robusto, seguro, multitarea, portable y dinámico.

Estructura de control secuencial en Java

La estructura secuencial es el orden natural de ejecución. Las instrucciones que componen esta estructura se ejecutan de una en una en el orden en que se producen de arriba abajo. La mayoría de las instrucciones están separadas por el carácter punto y coma (;). Las instrucciones se suelen agrupar en bloques.

Estructura de control condicionales en Java

Las estructuras de control condicional evalúan una condición para determinar el comportamiento del programa. En Java, la estructura de control de selección principal es una sentencia if; la cual, tiene dos alternativas.

a.	<table><tr><td>1</td><td>if (expresión) Acción</td></tr></table>	1	if (expresión) Acción						
1	if (expresión) Acción								
b.	<table><tr><td>1</td><td>if (expresión)</td></tr><tr><td>2</td><td>acción 1</td></tr><tr><td>3</td><td>else</td></tr><tr><td>4</td><td>acción 2</td></tr></table>	1	if (expresión)	2	acción 1	3	else	4	acción 2
1	if (expresión)								
2	acción 1								
3	else								
4	acción 2								

Estructuras de control repetitivas en Java

Las estructuras de control repetitivas también conocidas como bucles, son aquellas que permiten ejecutar un conjunto de instrucciones varias veces, de acuerdo al valor que genere la expresión relacional y/o lógica.

- While, permite repetir la ejecución de un conjunto de sentencias mientras se cumpla una condición.
- For, se utiliza cuando se conoce el número de iteraciones que hay que realizar.
- Do while, es similar a while, que realiza la comprobación de la condición después de ejecutar el cuerpo del ciclo.

En términos de programación Java, es indispensable que el sustentante conozca:

- Declaración de variables y constantes
- Identificación y uso de tipos de valores (enteros, reales, booleanos, etc.)
- Operadores
- Estructuras de control
- Comentarios
- Comandos básicos

13.8 Fundamentos del sistema operativo Android

Android es un sistema operativo para móviles, se basa en el sistema operativo Linux. Su objetivo inicial fue fomentar el uso de un sistema de tipo abierto, gratuito, multiplataforma y muy seguro.

Arquitectura de los móviles Android

Conocer las 4 capas con que está formada la arquitectura Android basadas en software libre. Por tal motivo es importante saber los beneficios que nos aporta este sistema. El sustentante es capaz de emplear los elementos básicos del entorno de desarrollo integrado para la elaboración de Apps.

Emulador de Android

Utilizar un emulador Android que nos sirve para emular varios elementos como puede ser la cámara, las llamadas o el GPS, las ventajas que se tiene es poder utilizar el ratón, el teclado o probar aplicaciones en muchos dispositivos, y es compatible con un ordenador (pc, Mac).

13.9 Interfaz de usuario Android / aplicaciones para Android

Sin duda alguna el éxito de este sistema operativo se basa en las múltiples características que le han hecho destacar por encima de sus competidores. Por lo anterior, el sustentante conoce los componentes gráficos y elementos de despliegue de las aplicaciones móviles, tales como botones, cuadros de texto, tipos de menú, etcétera.

- Definición y codificación

Desarrollar codificación para el buen manejo de Android utilizando características en el lenguaje de programación java orientado a objetos, siendo la mayor parte de su código abierto.

Tipos de menús

Utilizar los tipos de menús que son menús principales que son los más habituales, submenús, son los secundarios que se muestran al pulsar sobre una opción del menú principal y menús contextuales que aparecen al realizar una pulsación sobre algún elemento de la pantalla.

13.10 Aplicaciones para Android

El sustentante es capaz de desarrollar aplicaciones móviles con conexiones a bases de datos y con los servicios del dispositivo.

Acceso a los servicios de Android

Los accesos son componentes diseñados para la realización de un trabajo sin una interfaz de usuario, este puede descargar un archivo, reproducir música o aplicar un filtro a una imagen siendo operaciones de larga ejecución en segundo plano. Se abordará la forma de invocar un servicio a través de su código en Java.

Bibliografía sugerida

- Android mobile app developer tools –. (s/f). Android Developers. Recuperado el 19 de noviembre de 2024, de <https://developer.android.com/>
- Bailón, J. y Baltazar, J. M. (2021). Cibernética y Computación 1. Portal Académico del CCH, UNAM. <https://portalacademico.cch.unam.mx/cibernetica1>
- Battistutti, O. C. (2022). APRENDE A PROGRAMAR EN JAVA. De cero al infinito. ALFAOMEGA GPO ED. 248 páginas.
- Cairó, O. (2006). Fundamentos de programación. Pearson educación. Osvaldo Cairo Battistutti, (2006) , Pearson educación de México, paginas 392
- Deitel, Paul J, y Harvey M. Deitel. Cómo programar en java. Décima edición. Pearson Educación, 2013.
- Elmasri, R., & Pearson Education. (2005). Fundamentos de sistemas de bases de datos - 3b: Edicion. Pearson Educacion.
- Gómez, E. J. (2023). Metodología de la programación: conceptos, lógica e implementación. AlphaEditorial. 388 páginas.
- IBM Documentation. (2021). Ibm.com. Recuperado el 19 de noviembre de 2024, de <https://www.ibm.com/docs/es/psfa/7.1.0?topic=operators->
- Joyanes Aguilar, Luis (2013). Fundamentos generales de programación (1.ª edición). Ciudad de México, McGraw Hill
- León, R. (2021). El libro práctico de bases de datos. Editorial independiente. España. 469 páginas.
- Marco Galindo, M. J., Marco Simó, J. M. (2010). Escaneando la informática. España: Editorial UOC, S.L.
- Monterde, U. M. (s/f). Lenguajes de Programación. Unidad de Apoyo para el Aprendizaje. CUAED UNAM. Recuperado el 19 de noviembre de 2024, de https://programas.cuaed.unam.mx/repositorio/moodle/pluginfile.php/1023/mod_resource/content/1/contenido/index.html
- Moreno, A. (2021). Aprende Java en un fin de semana. Editorial Independently published. EE. UU. 254 páginas.
- Murphy, I. (2019). Creating SQL Queries Using SQLite Made Easy. Editorial Tolana Publishing. EE. UU. 254 páginas.
- PHP Hypertext Preprocessor. Documentación. <https://www.php.net/>
- Platzi. (2019). Qué es un IDE o Entorno de Desarrollo Integrado. <https://platzi.com/blog/que-es-ide-editor-de-texto/>
- Rasso, H. (2021). Informática I (2nd ed.). McGraw-Hill Interamericana. <https://bookshelf-ref.vitalsource.com/books/9781456277628>
- Silberschatz, A. (2007). Fundamentos de Bases de Datos. McGraw-Hill Interamericana.

Universidad Nacional Autónoma de México. Programación (Estructura de datos). Apunte electrónico.
Revisado el 19 de noviembre de 2024, desde:
LI_1361_051118_A_Programacion_Estructura_Datos_Plan2016.pdf

